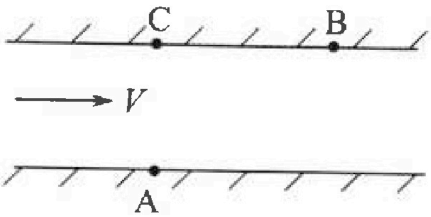
Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2023

Вариант 09-01

Во всех задачах, в ответах допустимы обыкновенные дроби и радикалы.



1. Пловец трижды переплывает реку. Движение пловца прямолинейное. Скорость пловца в подвижной системе отсчета, связанной с водой, во всех заплывах одинакова по модулю.

В двух первых заплывах А – точка старта, В – точка финиша (см. рис., V - неизвестная скорость течения реки). Ширина реки $AC = d = 70$ м, снос, т.е. расстояние, на которое пловец смещается вдоль реки к моменту достижения противоположного берега, $CB = L = 240$ м.

Продолжительность первого заплыва $T_1 = 192$ с, продолжительность второго заплыва $T_2 = 417$ с.

1) Найдите скорости V_1 и V_2 пловца в лабораторной системе отчета в первом и втором заплывах.
2) Найдите скорость U пловца в подвижной системе отсчета, связанной с водой.

В третьем заплыве пловец стартует из точки А и движется так, что снос минимальный.

3) Найдите продолжительность T третьего заплыва.

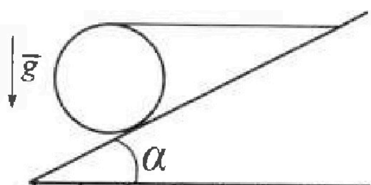
2. Футболист на тренировке наносит удары по мячу, лежащему на горизонтальной площадке и направляет мяч к вертикальной стенке. После абсолютно упругого соударения со стенкой мяч падает на площадку. Наибольшая высота, на которой находится мяч в полете, $H = 16{,}2$ м.
Расстояние от точки старта до стенки в 5 раз больше расстояния от стенки до точки падения мяча на площадку.

1) На какой высоте h происходит соударение мяча со стенкой?
2) Найдите продолжительность t_1 полета мяча от старта до соударения со стенкой.

Допустим, что в момент соударения мяча со стенкой на той же высоте h, стенка движется навстречу мячу со скоростью $U = 2$ м/с.

3) Найдите расстояние d между точками падения мяча на площадку в случаях: стенка покоится, стенка движется.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Соударения мяча со стенкой абсолютно упругие. Траектории мяча лежат в вертикальной плоскости перпендикулярной стенке.



3. Однородный шар массой $m = 3$ кг удерживается на шероховатой наклонной плоскости горизонтальной нитью, прикрепленной к шару в его наивысшей точке. Наклонная плоскость образует с горизонтальной плоскостью угол α такой, что $\sin\alpha = 0{,}6$.

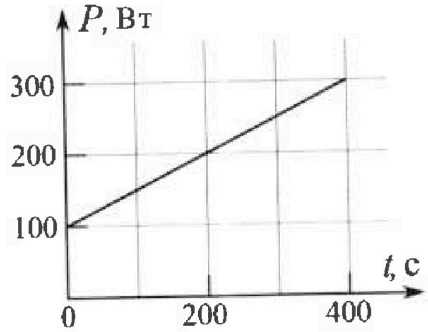
1) Найдите силу T натяжения нити.
2) Найдите силу F_{TP} трения, действующую на шар.
3) При каких значениях коэффициента μ трения скольжения шар будет находиться в покое? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Олимпиада «Физтех» по физике, февраль 2023

Вариант 09-01

Во всех задачах, в ответах допустимы обыкновенные дроби и радикалы.

4. Воду нагревают на электроплитке. Начальная температура воды $\tilde{t}_0 = 14\ ^0$C, объем воды $V = 2$ л. Сопротивление спирали электроплитки $R = 20$ Ом, сила тока в спирали $I = 5$ А.



Зависимость мощности P тепловых потерь от времени t представлена на графике (см. рис.).

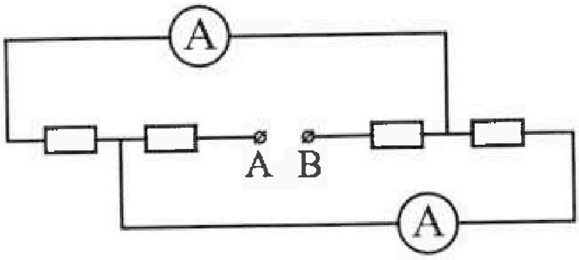
1) Найдите мощность P_H нагревателя.
2) Через какое время T после начала нагревания температура воды станет равной $\tilde{t}_1 = 25\ ^0$C?

Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг$\cdot ^0$C).

5. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, четыре резистора, у двух из которых сопротивление по 20 Ом, у двух других сопротивление по 40 Ом. Сопротивление амперметров пренебрежимо мало.

После подключения к клеммам A и B источника постоянного напряжения показания амперметров оказались различными. Меньшее показание $I_1 = 1$ А.

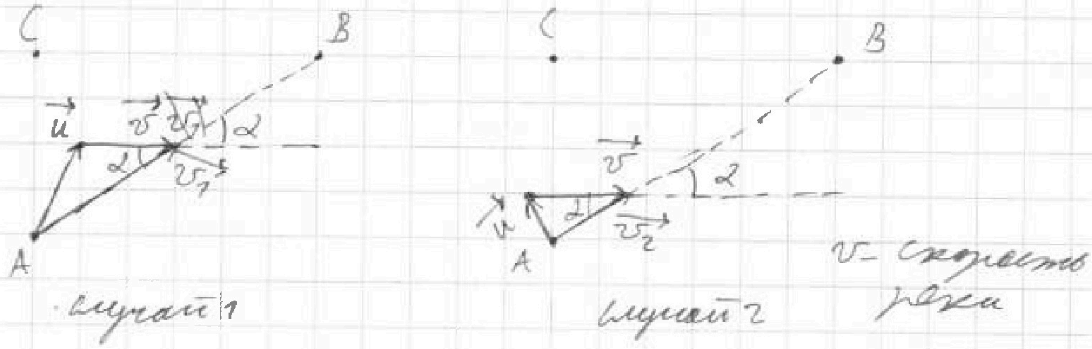
1) Найдите показание I_2 второго амперметра.
2) Найдите напряжение U источника.



~~$L_{AB} = \sqrt{L_{AC}^2 + L}$~~ $AB = l = \sqrt{L^2 + S^2} = 250$ м

Тогда $\begin{cases} v_1 = \dfrac{l}{T_1} \simeq 1{,}3 \text{ м/с} \\ v_2 = \dfrac{l}{T_2} \simeq 0{,}6 \text{ м/с} \end{cases}$

~~Кач~~ Изобразим (качественно) треугольники скоростей в первом и втором случаях:



v – скорость реки

Т.к. движение прямолинейно, то $v_1 \parallel v_2$

Тогда $\alpha = \vec{v} \wedge \vec{v_1} = \vec{v} \wedge \vec{v_2}$ ($\wedge$ – угол между векторами)

По теореме косинусов:

1) $u^2 = v^2 + v_1^2 - 2vv_1\cos\alpha$
где $\cos\alpha = \dfrac{B_{AC}}{AB} = \dfrac{24}{25}$

2) $u^2 = v^2 + v_2^2 - 2vv_2\cos\alpha$
где $\cos\alpha = \dfrac{B_{AC}}{AB} = \dfrac{24}{25}$

Тогда из 1 и 2 получим

$v_1^2 - 2vv_1\cos\alpha = v_2^2 - 2vv_2\cos\alpha$

$2v\cos\alpha(v_1 - v_2) = v_1^2 - v_2^2 = (v_1 + v_2)(v_1 - v_2)$

Значит $2v\cos\alpha = v_1 + v_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2\cos\alpha} \approx 3{,}65\ м/с$$

Тогда $u = \sqrt{v^2 + v_1^2 - 2 v v_1 \cos\alpha} \approx$ ~~4,2 м/с~~ ~~4,78 м/с~~ 3,54 м/с

Вернёмся к пункту:

$$\begin{cases} d = u\cos\alpha\, T, \text{ где } \alpha \text{ — угол между } \vec{u} \text{ и } AC \\ \Delta x = (v - u\sin\alpha) T, \text{ где } \Delta x \to \min \end{cases}$$

Тогда $\Delta x = d\,\frac{v - u\sin\alpha}{u\cos\alpha} = d\,\frac{v}{u\cos\alpha} - d\,tg\,\alpha$

$$\Delta x = d\left(\frac{v}{u\cos\alpha} - tg\,\alpha\right)$$

Где $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + tg^2\alpha}$

$$\Delta x = d\left(\frac{v}{u}\sqrt{1 + tg^2\alpha} - tg\,\alpha\right)$$

Тогда Δx_{min} при $\frac{v}{u}\sqrt{1 + tg^2\alpha} - tg\,\alpha \to \min$

~~Тогда пусть $\frac{v}{u}\sqrt{1+tg^2\alpha} - tg\,\alpha = 0$ — но $\Delta x = 0$~~

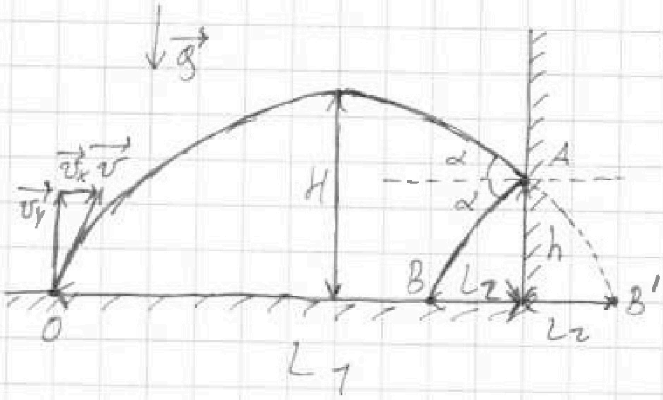
~~$\frac{v}{u}\sqrt{1+tg^2\alpha} = tg\,\alpha$, пусть $\frac{v}{u} = k$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. соударения мяча со стенкой абсолютно упругие, то участок траектории AB симметричен с AB'

Тогда т.к. сопротивлением воздуха можно пренебречь, то $v_x = const$

Тогда заметим, что $H = \frac{v_y^2}{2g}$

Значит $v_y = \sqrt{2gH} = 18 м/с$

Тогда пусть t_1 – время полёта от O до A, а t_2 – время полёта от A до B.

Тогда $\begin{cases} l_1 = t_1 v_x \\ l_2 = t_2 v_x \end{cases}$, где $l_1 = 5l_2$

Отсюда $t_1 = 5t_2$

тогда $\begin{cases} h = v_y t_1 - \frac{g t_1^2}{2} \\ h = v_y t_2 - \frac{g t_2^2}{2} \end{cases} \Rightarrow 5 v_y t_2 - \frac{25 g t_2^2}{2} = v_y t_2 - \frac{g t_2^2}{2}$

$4 v_y t_2 = 12 g t_2^2$

$v_y = 3 g t_2$

$t_2 = \frac{v_y}{3g}$

$\Downarrow$

$t_1 = 5t_2 = \frac{5 v_y}{3g} = 3 с$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $h = v_y t_1 - \frac{g t_1^2}{2} = 9м$

Теперь рассмотрим ситуацию с движущейся стенкой.

Перейдём в СО стены, тогда v_x' ~~мяча~~ мяча стенки равна $v_x' = v_x + V$

тогда после соударения из упругости ~~стен~~ $v_x'' = v_x'$

Вернёмся в СО ~~зем~~ Земли:

Тогда $v_{x0} = v_x'' + V = v_x + 2V$

При этом ~~верт~~ v_y не меняется, т.к. $\vec{V} \perp \vec{v_y}$

А значит время t_2 останется прежним

Тогда $d = v_{x0} t_2 - v_x t_2 = (v_x + 2V) t_2 - v_x t_2$

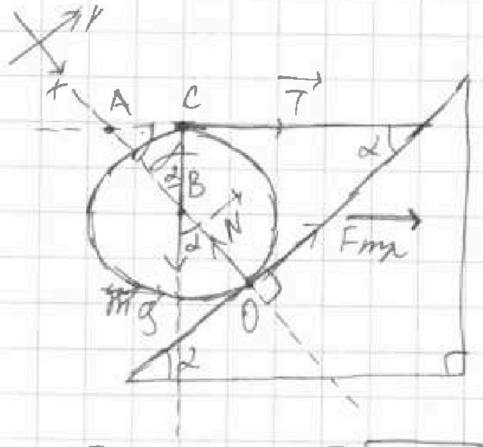
$d = 2 V t_2 = 2,4м$

Ответ: $h = 9м$; $t_1 = 3с$; $d = 2,4м$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $BO = R$, $AB = \ell$

Тогда $\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$

Значит $\frac{BC}{AB} = \sin\gamma = \cos\alpha$

Тогда $AB = \frac{BC}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$

$\ell = \frac{R}{\cos\alpha}$

Где $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 0,8$

Тогда запишем правило моментов относительно точки O:

$mg\sin\alpha \cdot R = T\sin\gamma \cdot (\ell + R)$

$mgR\sin\alpha = TR\cos\alpha\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$

$mg\sin\alpha = T(1 + \cos\alpha)$

$T = mg\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{mg}{3} = 10H$

Т.к. тело находится в равновесии, то

$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0$

В проекции на Ox:

$mg\cos\alpha + T\cos\gamma - N = 0$

$mg\cos\alpha + T\sin\alpha = N$

$N = 0,8mg + 0,2mg = mg = 30H$

В проекции на Oy:

$F_{тр} + T\sin\gamma - mg\sin\alpha = 0$

$F_{тр} = mg\sin\alpha - T\cos\alpha$

$F_{тр} = 0,6mg - \frac{0,8mg}{3} = \frac{mg}{3} = 10H$

Тогда $F_{тр\,min} = \mu_{min} N \Rightarrow \mu_{min} = \frac{F_{тр\,min}}{N} = \frac{1}{3}$

~~Итого~~ Тогда $\frac{1}{3} \leq \mu \leq 1$

Ответ: $T = 10H$; $F_{тр} = 10H$; $\frac{1}{3} \leq \mu \leq 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

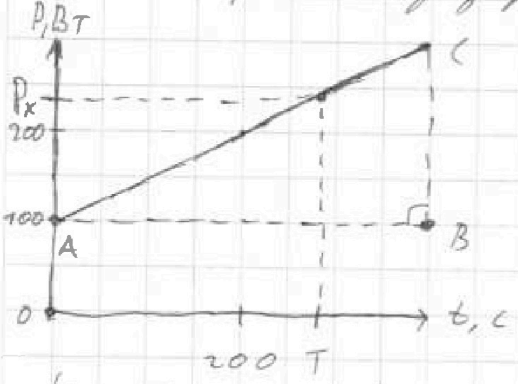
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Найдём $P_н$ – по закону Джоуля-Ленца получим:

$P_н = I^2R = 500\,Вт$

Заметим, что через время T мощность теплопотерь



станет равна

$P_x = P_0 + kT$, где $P_0 = 100\,Вт$, k – коэфф. наклона графика

$k = \frac{BC}{AB} = \frac{200\,Вт}{400\,с} = 0{,}5\,Вт/с$

(T изображено условно)

Тогда по закону сохранения энергии

$\left(P_н - \frac{P_0 + P_x}{2}\right)T = \rho V c(t_1 - t_0) \Big| \cdot 2$

Тогда получим

$2\rho Vc(t_1 - t_0) = 2P_нT - P_0T - (P_0 + kT)T$

$2\rho Vc(t_1 - t_0) = 2T(P_н - P_0) - kT^2$

$kT^2 - 2T(P_н - P_0) + 2\rho Vc(t_1 - t_0) = 0$

Тогда $D = 4(P_н - P_0)^2 - 8\rho Vck(t_1 - t_0)$ =

Откуда $\sqrt{D} = 520\,Вт$

Тогда $T_1 = 380\,с$, $T_2 = 1320\,с$ – такое значение свидетельствует о том, что через ~~Т~~ вода ~~нар~~ нагреется на

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$t_x > t_1 = 25\,^\circ C$, а потом т.к. $P_{теплопотерь}$ станет больше $P_н$, то вода снова остынет до t_1

Значит в первый раз вода нагреется ~~через~~ до $t_1 = 25\,^\circ C$ через $T = 380\,с$

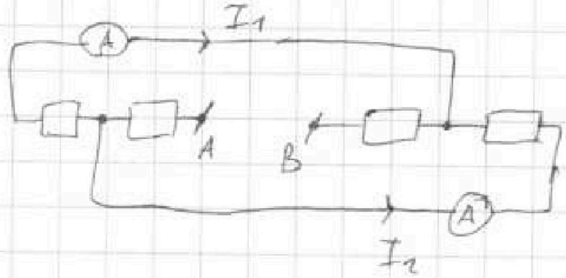
Ответ: $T = 380\,с$; $P_н = 500\,Вт$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

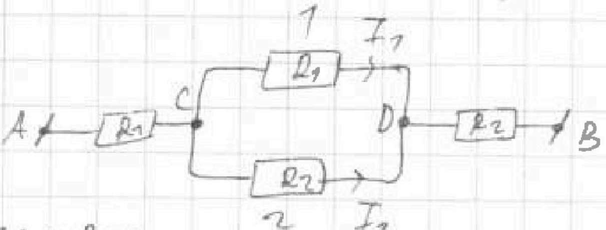
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Преобразуем схему:~~



Без ограничения общности обозначим токи I_1 и I_2:

Тогда т.к. $R_A \to 0$, то их можно считать за перемычки. Тогда получим:



Т.к. $I_1 < I_2$, а резисторы 1 и 2 подключены параллельно, то $R_1 I_1 = R_2 I_2$

$\Downarrow$

$R_1 > R_2$

R_{AC} и R_{DB} можно обозначить R_1 и R_2 без ограничения общности

Тогда $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 20$ Ом

Значит $I_2 = I_1 \dfrac{R_1}{R_2} = 2 I_1 = 2$ A

Тогда $U = U_{AC} + U_{CD} + U_{DB} = R_1(I_1 + I_2) + R_1 I_1 + R_2(I_1 + I_2)$

$U = 220$ В

Ответ: $I_2 = 2$ A; $U = 220$ В

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$D = 4(p_н - p_0)^2 - 8\rho V c k(t_1 - t_0) = 4\left((p_н - p_0)^2 - 2\rho V c k (t_1 - t_0)\right)$

$D = 4\left(\overset{160000}{400^2} - \overset{2}{2000} \cdot 4200 \cdot 11\right) = 4(160000 - 84000 - 8400)$

$D = 4 \cdot (\overset{0000}{76000} - \overset{2400}{8400}) = 4 \cdot 67600 = 400 \cdot 26^2$

$\sqrt{D} = 20 \cdot 26$

$\dfrac{-520 + 2 \cdot 400}{2 \cdot 0{,}5} = 380\,c$

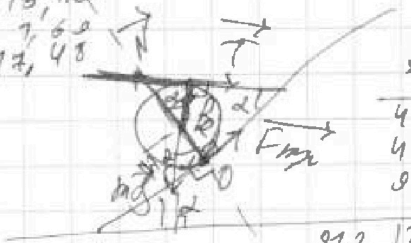
$\dfrac{520 + 800}{1} = 1320\,c$

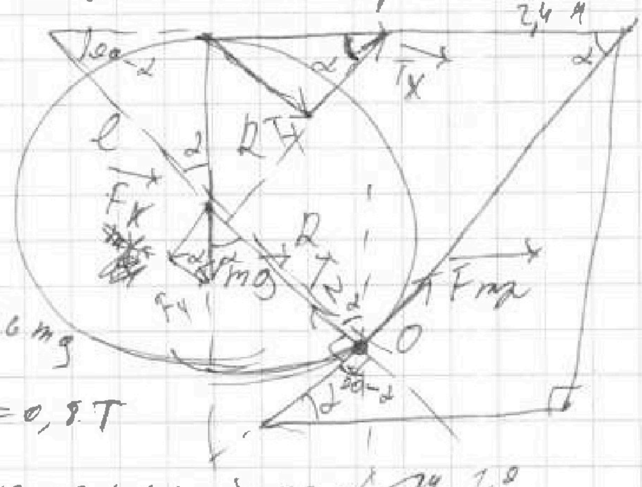
$l = 1{,}25R$

$\dfrac{R}{l} = \cos\alpha = 0{,}8$

$l = \dfrac{R}{\cos\alpha}$

$\dfrac{48 \cdot 1{,}9}{25}$





$F_x = mg\sin\alpha = 0{,}6\,mg$

$T_x = T\cos\alpha = 0{,}8\,T$

$T_x(R + l) = F_x R$

$13{,}32 + 1{,}69 - 2 \cdot 1{,}3 \cdot 3{,}65 \cdot \dfrac{24}{25} \cdot \dfrac{1{,}9}{2}$

$13{,}32 + 1{,}69 - 12{,}47$

$17{,}48$

$TR\cos\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right) = mgR\sin\alpha$

$T(\cos\alpha + 1) = mg\sin\alpha$

$T_y + F_y = N = \dfrac{mg\sin\alpha}{3} + mg\cos\alpha$

$T = mg\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 1} = \dfrac{0{,}6}{1{,}8} = \dfrac{mg}{3} = 10\,Н$

~~$T_x + F_x = F_{тр} = \mu N$~~

$N = mg = 30\,Н$

$\mu = \dfrac{F_{тр}}{N} = \dfrac{26}{30} = \dfrac{13}{15}$

μ_{min}

$T_x + F_x = F_{тр} = \mu N$

$F_{тр} = \dfrac{mg\cos\alpha}{3} + mg\sin\alpha = mg\left(\sin\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{3}\right) = \dfrac{2{,}6}{3}mg = 26\,Н$

3,53 · 3,53 = 124609; 26 · 26 = 676; 250 : 192 = 1,3020; 2500 : 417 = 0,59; 4,2 · 4,2 = 17,64; 3,65 · 3,65 = 13,3225; 4,18 · 4,18 = 17,4724; 1,3 · 1,9 = 2,47; 48 · 19 = 912; 91,2 : 25 = 3,648; 13,32 + 1,69 = 15,01; 15,01 − 2,47; 13 − 0,46; 12,54; 3,52 · 3,52 = 123904; 4,1 · 4,1 = 16,81

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} u^2 = v^2 + v_1^2 - 2vv_1\cos\alpha \\ u^2 = v^2 + v_2^2 - 2vv_2\cos\alpha \end{cases}$$

$I_1 \neq I_2 \Rightarrow R_1 \neq R_2$

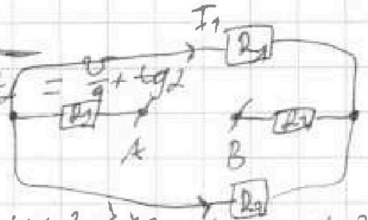
$\frac{2k}{k^2-1} =$

$v_1^2 - 2vv_1\cos\alpha = v_2^2 - 2vv_2\cos\alpha$

2,06 | 0,061

206 | 6,7
201,3 | 33,07
4,7

180 + 3,3
183
24,4



$\frac{v}{u}\sqrt{1+tg^2\alpha} = \frac{v}{g} + tg\alpha$

$\delta\left(\frac{v}{u}\sqrt{1+tg^2\alpha} - tg\alpha\right)$

$\delta tg\alpha\left(\frac{v}{u}\sqrt{1+\frac{1}{tg^2\alpha}} - 1\right)$

$I_1R_1 = I_2R_2$

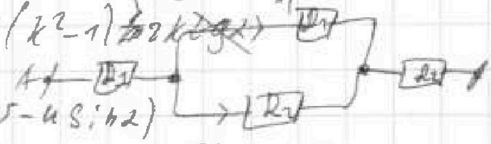
$k^2 + k^2tg^2\alpha = k^2 + 2k\,tg\alpha + tg^2\alpha$

$tg^2\alpha(k^2-1) = 2k\,tg\alpha$

$I_1 < I_2$

$\frac{2,06}{183+18,3}$

193 + 8,3
201,3



$R_1 > R_2$

$k\sqrt{1+x^2} - x$

$\frac{\delta}{u\cos\alpha}(v - u\sin\alpha)$

$k^2(1+x^2) + x^2 - 2k\sqrt{x^2+x^4}$

$tg\alpha = \frac{2k}{k^2-1}$

$R_1 = 40\,Ом,\ R_2 = 20\,Ом$

$\frac{\delta v}{u\cos\alpha} - \delta\, tg\alpha$

$k^2(1+x^2) - 2\sqrt{x^2(1+x^2)} + x^2$

$R_Э = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$

$I_2 = \frac{I_1R_1}{R_2} = 2A$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$

$(k\sqrt{1+x^2} - x)^2$

$1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

$\cancel{R_Э = \frac{R_1^2 + 3R_1R_2 + R_2^2}{R_1+R_2}}$

$k\sqrt{1+x^2} = x$

$k^2 + k^2x^2 = x^2$

$\frac{3,65}{3,54}$

$U = (I_1+I_2)(R_1+R_2) + I_1R_1 = 3\cdot 60 + 1\cdot 40 = 220\,B$

3,65 | 3,54
3,54 | 1,03

$k^2 = x^2(1-k^2)$

$H = v\sin\alpha\cdot T - \frac{gT^2}{2}$

$x^2 = \frac{k^2}{1-k^2}$

$H = \frac{v^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$

$T = \frac{v\sin\alpha}{g}$

1,03
1,03
309
1030
10609

$18\cdot 0,6 - \frac{10\cdot 0,36}{2} = 0,6(18-3) = 0,6\cdot 15 = 9$

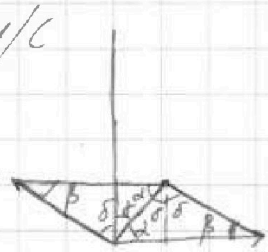
$H = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$

$v\sin\alpha = \sqrt{2gH} = 18\,м/с$

1,061
1,06
0,061

$\sqrt{324} = 18$

$$\begin{cases} l_1 = 3l_2 \\ l_1 = v\cos\alpha\cdot t_1 \\ l_2 = v\cos\cdot t_2 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 3t_2$$



$h = v\sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$

$h = v\sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2}$

$3v\sin\alpha\, t_2 - \frac{9gt_2^2}{2} = v\sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2}$

$2v\sin\alpha = 4gt_2$

$h = 18\cdot 3 - \frac{10\cdot 9}{2} = 9\,м$

$t_2 = \frac{v\sin\alpha}{2g} = 0,6\,c \Rightarrow t_1 = 3t_2 = 3c$