



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 6



✓ 1. [4 балла] Решите уравнение

$$4 \operatorname{tg} 2x + 1 + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

✓ 2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240} \cdot 7^{240}$?

✓ 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + (\ln 4) \ln(x+2) \geq 0.$$

✓ 4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

~~Amif~~ 5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

* f 6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

- * 7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{10}$, $AD = DC = 2$, $AC = 2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МОФИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4 \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)} + 1 = 0$$

$$\frac{8 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} + 1 = 0$$

Пусть $\operatorname{tg} x = a$; $a \neq \pm 1$

$$\frac{8a}{1 - a^2} + \frac{1 - a}{1 + a} + 1 = 0$$

$$\frac{8a + (1 - a)^2 + 1 - a^2}{1 - a^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 8a + (1 - a)^2 + 1 - a^2 = 0 \\ a \neq \pm 1 \end{array} \right.$$

$$8a + 1 - 2a + a^2 + 1 - a^2 = 0$$

$$6a + 2 = 0$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3}\right) + \pi r, r \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3}\right) + \pi r, r \in \mathbb{Z}$$

$$1) 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) x + \frac{\pi}{4} \neq \pi n$$

$$x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = x$$

$$b = q^3 x \Rightarrow abc = q^3 x^3 = 3^{240} \cdot 7^{240} \Rightarrow q^3 x = 3^{80} \cdot 7^{80} = b.$$

$$c = q^2 x$$

$$\text{Тогда } ac = 3^{160} \cdot 7^{160} \text{ и } a \leq c$$

$$a = 3^{p_1} \cdot 7^{p_2}$$

$$c = 3^{n_1} \cdot 7^{n_2}$$

$$p_1 + n_1 = 160$$

$$p_2 + n_2 = 160$$

$$p_1 = \{0; 1; \dots; 160\}$$

Выбор p_1 есть 160 вариантов

$$p_2 = \{0; 1; \dots; 160\}$$

Выбор p_2 есть 160 вариантов

Значит выбрать a есть $(160)^2$ вариантов, a на так-

же a может быть c и поэтому вариантов $2 \cdot 25600 =$
 $= 51200$ при этом c определены однозначно.

Ответ: 51200

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln(4x+8) + (\ln 4)\ln(x+2) \geq 0 \quad 1) x+2 > 0$$

$$\ln^2(x+2) - (x+1)\ln 4 - \ln(x+2) \cdot (x+1) + (\ln 4)\ln(x+2) \geq 0 \quad x > -2$$

$$\text{Пусть } \ln(x+2) = t; (x+1) = a$$

$$t^2 - a \ln 4 - at + t \ln 4 \geq 0$$

$$t(t-a) + \ln 4(t-a) \geq 0$$

$$(t + \ln 4)(t - a) \geq 0$$

$$(\ln(x+2) + \ln 4)(\ln(x+2) - x - 1) \geq 0$$

$$(\ln(x+2) - \ln \frac{1}{4})(\ln(x+2) - x - 1) \geq 0$$

$f(x) = \ln(x+2)$ - монотонно возрастающая функция на ODZ

$g(x) = -x-1$ - монотонно убывающая ф-ия

Значит у них не более 1-ой точки пересечения.

Заметим, что при $x = -1$ они равны ($\ln 1 = 0 = -(-1) - 1$)

Тогда $g(x) = \ln(x+2) - x - 1$ при $x \in (-2; -1] : \leq 0$, при $x \in [-1; +\infty) : \geq 0$

Вспомогательный метод рационализации:

(

$$(x + \frac{7}{4})(x+1) \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & + & & - & & + & + & + & + \\ & & & & & & & & & x \\ -2 & & -\frac{7}{4} & & -1 & & & & & \end{array}$$

$$x \in (-2; -\frac{7}{4}] \cup [-1; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } (-2; -\frac{7}{4}] \cup [-1; +\infty)$$

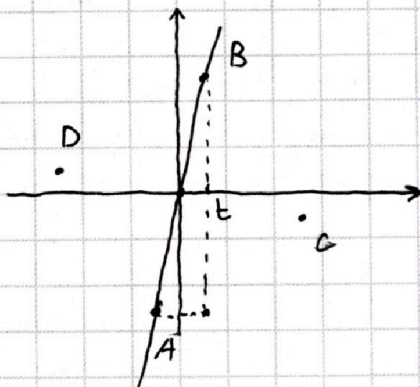
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$A(-t; -5t)$; $B(t; 5t)$; $C(5t; -t)$; $D(-5t; t)$ - вершины квадрата. (Т.к. диагонали квадрата \perp , то C и $D \in y = -\frac{1}{5}x$)

$$f(x) = -2x^3 - ax$$

$$1) f(t) = 5t$$

$$-2t^3 - at = 5t \quad | :t$$

$$-2t^2 - a = 5$$

$$t^2 = -\frac{a+5}{2}$$

$t \neq 0$ иначе квадрат вырождается в точку

$$2) f(-5t) = -t$$

$$250t^3 + 5at = -t \quad | :t$$

$$250t^2 = -1 - 5a$$

$$t^2 = -\frac{1+5a}{250}$$

$$3) -\frac{a+5}{2} = -\frac{1+5a}{250}$$

$$\frac{a+5}{2} = \frac{1+5a}{250} \quad | \cdot 250$$

$$125(a+5) = 1+5a$$

$$125a + 625 = 1 + 5a$$

$$120a = -624$$

$$a = -\frac{51}{5}$$

$$4) t^2 = -\frac{5 - \frac{51}{5}}{2} = \frac{13}{5}$$

$$t = \sqrt{\frac{13}{5}}$$

$$\text{диагональ}^2 = AB^2 = 4t^2 + 100t^2 =$$

$$= 2t\sqrt{26} \quad 104t^2$$

$$S_{ABCD} = \frac{d^2}{2} = \frac{AB^2}{2} = \frac{2t\sqrt{26}}{2} = t\sqrt{26} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{13} = 13\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Ответ: $-\frac{51}{5}; 13\sqrt{\frac{2}{5}}$

$$S_{ABCD} = \frac{d^2}{2} = \frac{AB^2}{2} = 52t^2 = 52 \cdot \frac{13}{5} = \frac{676}{5}$$

Ответ: $-\frac{51}{5}; \frac{676}{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

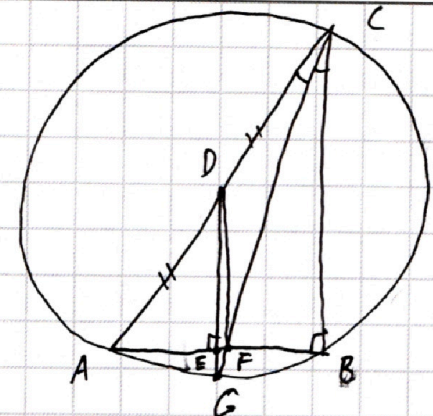
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



- 1) т.к. $DE \perp CF = G$ и $G \in \Omega$ докажем, что $\angle B = 90^\circ$.
- 2) Продолжим CF до пересечения с Ω в точке K . Как известно прямая пересекает окружность в ≤ 2 точках тогда $K = G$.
- 3) $G \in DE$ (ср. линии), но одновременно $G \in$ середину AB , что одновременно выполняется лишь в том случае,

если DE и есть середина $AB \Rightarrow DE \perp AB$ и т.к. $DE \parallel BC$, то и $BC \perp AB \rightarrow \angle B = 90^\circ$.

4) пусть $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$.

из свойства бис-сец. $\frac{AF}{FB} = \frac{b}{a}$. $AF = c - FB$

$$\frac{c - FB}{FB} = \frac{b}{a}; \quad ac - aFB = bFB \Rightarrow FB = \frac{ac}{a+b}$$

5) по т. Пифагора для $\triangle CFB$: $CF^2 = BF^2 + BC^2 = a^2 + \frac{a^2 c^2}{(a+b)^2}$
 $\frac{CF}{DF} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \frac{CF^2}{DF^2} = \frac{2}{11} \Rightarrow DF^2 = \frac{11CF^2}{2}$, тогда $CF^2 - DF^2 = -\frac{9}{2}CF^2$

6) пусть $\angle DCF = d$, тогда по т. косинусов для $\triangle DCF$ имеем

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 - 2CD \cdot CF \cdot \cos d$$

$$\cos d = \frac{CD^2 + CF^2 - DF^2}{2CD \cdot CF} = \frac{\frac{b^2}{4} + \frac{a}{2} \left(a^2 + \frac{a^2 c^2}{(a+b)^2} \right)}{b \sqrt{a^2 + \frac{a^2 c^2}{(a+b)^2}}} \quad \begin{matrix} a = b \cos 2d \\ c = b \sin 2d \end{matrix}$$

$$= \frac{b^2 - \frac{36 b^2 \cos^2 2d}{4 \cos 2d}}{8 b^2 \sqrt{\frac{2 \cos^2 2d}{1 + \cos 2d}}} = \frac{1 - \frac{36 \cos^2 2d}{4 \cos 2d}}{8 \cos 2d \sqrt{\frac{2}{1 + \cos 2d}}} = \frac{1 - \frac{36 \cos^2 2d}{4 \cos 2d}}{8(1 + \cos 2d) \cos 2d \sqrt{\frac{2}{1 + \cos 2d}}}$$

$$\cos 2d = 2 \cos^2 d - 1$$

$$\frac{2 \cos^2 d - 18(2 \cos^2 d - 1)^2}{16 \cos^2 d (2 \cos^2 d - 1) \cdot \frac{1}{\cos d}}$$

$$t = \frac{2t^2 - 18(2t^2 - 1)^2}{16t(2t^2 - 1)}$$

$$32t^3 - 16t^2 = 2t^2 - 18(4t^4 - 4t^2 + 1)$$

Положим $\cos d = t$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$32t^4 - 16t^2 = 2t^2 - 64t^4 + 64t^2 + 16$$

$$96t^4 - 82t^2 - 16 = 0$$

$$t^2 = a$$

$$96a^2 - 82a - 16 = 0 | :2$$

$$48a^2 - 41a - 8 = 0$$

$$D = 1681 + 768 = 2449$$

$$a = \frac{41 \pm \sqrt{2449}}{96} \Rightarrow a = \frac{41 + \sqrt{2449}}{96}$$

$$\cos 2d = 2t^2 - 1 = 2a - 1 = \frac{41 + \sqrt{2449}}{48} - 1 = \frac{\sqrt{2449} - 7}{48}$$

$$2d = \angle C = \arccos \frac{\sqrt{2449} - 7}{48}; \quad \angle A = \arcsin \frac{\sqrt{2449} - 7}{8}$$

~~Анализ~~

$$\text{Ответ: } 90^\circ; \arccos \frac{\sqrt{2449} - 7}{48}; \arcsin \frac{\sqrt{2449} - 7}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 - \frac{36b^2 \cos^2 2d}{1 + \cos 2d}}{4b^2 \sqrt{\frac{2\cos^2 2d}{2\cos^2 d}}} = \frac{\cos^2 d - 18(2\cos^2 d - 1)^2}{4\cos d(2\cos^2 d - 1)} = \cos d$$

$$\cos d = t$$

$$4t^2(2t^2 - 1) = t^2 - 72t^4 + 72t^2 - 18$$

$$80t^4 - 77t^2 + 18 = 0$$

$$D = 169$$

$$t^2 = \frac{77 \pm 13}{160} = \frac{9}{16}; \frac{64}{160}$$

$$\cos^2 d = \frac{9}{16}$$

$$\cos d = \frac{1}{8}$$

$$\cos^2 d = \frac{2}{5}$$

$$\cos d = -\frac{1}{5} \text{ - не подходит}$$

$$\cos 2d = 2\cos^2 d$$
$$\angle C = \arccos \frac{1}{8} \quad \angle A = \arcsin \frac{1}{8}$$

$$\text{Ответ: } 90^\circ; \arccos \frac{1}{8}; \arcsin \frac{1}{8}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$x^3 - y^3 = \frac{10(y^3 - z^3)}{y^3 z^3}$$

$$y^3 - z^3 = \frac{10(x^3 - z^3)}{x^3 z^3}$$

$$x^3 - z^3 = \frac{10(x^3 - y^3)}{x^3 y^3}$$

$$\Rightarrow (x^3 - y^3) = \frac{1000(x^3 - y^3)}{(xyz)^6}$$

1) $x = y$, но тогда $x^3 + \frac{10}{x^3} = x^3 + \frac{10}{z^3} \Rightarrow x = z$,
это неверно.

2) $x \neq y$ и тогда $\frac{1000}{(xyz)^6} = 1 \Rightarrow (xyz)^6 = 1000$
 $xyz = \pm \sqrt[6]{1000}$

Ответ: $\sqrt[6]{1000}$

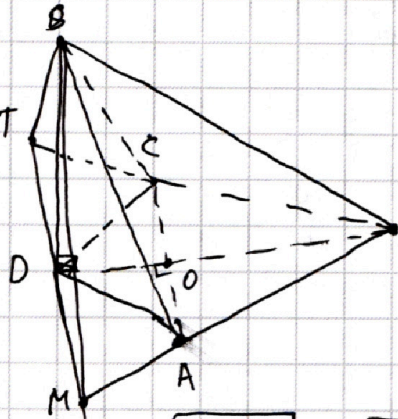
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Т.к. $AD=DC$ и $AB=BC$, $ABCD$ - ромб, и $AC \perp BD$

2) ~~$AB=2\sqrt{2}$, $AD=DC=2$ по обратн.~~

2) $OC = \frac{1}{2} AC = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{6} \Rightarrow$ по т. Пифагора
в $\triangle BOC$ $OB = 2\sqrt{2} \Rightarrow BD$.

3) Из $\triangle ACO$ по обратной т. Пифагора имеем,
что $\angle D = 90^\circ \Rightarrow \triangle ADC$ р/б и н/г.

тогда раз DO - высота, то $DO = \sqrt{2}$ и
тогда $BD = 3\sqrt{2}$

4) $SB = \sqrt{SD^2 + BD^2} = \sqrt{SD^2 + 18}$
 $SA = \sqrt{SD^2 + AD^2} = \sqrt{SD^2 + 4}$
Пусть $SD^2 = x$

по т. Пифагора в $\triangle SDA$ и $\triangle SDB$ ($SD \perp DB$ и $SD \perp AD$ из гел.)

$$SD = \sqrt{SB^2 - 18} = \sqrt{SA^2 - 4}$$

~~$$\sqrt{x+18} + \sqrt{x+4} = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$$~~

$$SB^2 - 18 = SA^2; SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{6} - SA$$

~~$$2x + 22 + 2\sqrt{(x+18)(x+4)} = 18 + 8\sqrt{5} \quad | :2$$~~

$$(2\sqrt{2} + \sqrt{6} - SA)^2 - 18 = SA^2$$

$$SA = x$$

~~$$x + 11 + \sqrt{(x+18)(x+4)} = 9 + 4\sqrt{5}$$~~

$$8 + 10 + x^2 - 4x\sqrt{2} - 2x\sqrt{6} + 8\sqrt{5} = x^2 + 14$$

~~$$\sqrt{(x+18)(x+4)} = 4\sqrt{5} - 2 - x \quad | \uparrow^2$$~~

$$4 + 8\sqrt{5} = 4x\sqrt{2} + 2x\sqrt{6} \quad | :2$$

~~$$x^2 + 22x + 72 = 20 + 4 + x^2 - 16\sqrt{5} - 8x\sqrt{5} + 4x$$~~

$$2 + 4\sqrt{5} = x(2\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

~~$$22x + 72 - 24 + 16\sqrt{5} + 8x\sqrt{5} - 4x = 0$$~~

$$x = \frac{2 + 4\sqrt{5}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}} = SA$$

~~$$18x + 8x\sqrt{5} = -48 - 16\sqrt{5} \quad | :2$$~~

$$SD = \sqrt{\frac{84 + 16\sqrt{5}}{18 + 8\sqrt{5}}} - 4 =$$

~~$$9x + 4x\sqrt{5} = -24 - 8\sqrt{5}$$~~

~~$$x(9 + 4\sqrt{5}) = -24 - 8\sqrt{5}$$~~

$$= \sqrt{\frac{84 + 16\sqrt{5} - 72 - 32\sqrt{5}}{18 + 8\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{12 - 16\sqrt{5}}}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

~~$$x = -\frac{24 + 8\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}}$$~~

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$$

$$a) V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SD = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot SD = 2SD$$

б) В плоскости (ABC) проведем через D прямую $\ell \parallel AC$.

Тогда $\ell \cap BC = T$; $\ell \cap AB = M$ тогда радиусы меньшей сферической поверхности равен радиусу сферы, вписанной в $SMTR$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\triangle_{MTB} \sim \triangle_{MTB} \sim \triangle_{ACB}$$

$$k = \frac{BO}{BD} = \frac{2}{3}$$

$$S_{MTB} = \frac{9}{4} S_{ACB} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{9 \cdot 8}{8} = 9$$

$$V_{S_{MTB}} = \frac{1}{2} S_{\text{пов}} \cdot r$$

$$TM = \frac{3}{2} AC = 3\sqrt{2}$$

$$r = \frac{3V}{S_{\text{пов}}}$$

Далее, зная, что по ТТМ $SC \perp BT$ и $SA \perp MB$ найти
Найти S_{SBM} ; S_{SAC} и S_{SAT} .

~~из подобия треугольников~~

Зная SD и TM находим S_{STM}

$$S_{\text{пов}} = S_{BMT} + S_{STM} + S_{SMB} + S_{SBT}$$

$$r =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

1. $4 \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$

$\operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) =$

$4 \operatorname{ctg} 2x = \frac{8 \operatorname{ctg}^2 x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}$

$= \frac{1}{\operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4})}$

$\operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{ctg} x + 1}{1 - \operatorname{ctg} x}$

$\operatorname{ctg}(A+B) = \frac{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}{1 - \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B}$



1) $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

2) $x + \frac{\pi}{4} \neq \pi n$

$x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi n$

$32t^4 - 16t^2 - 18 = 2t^2 - 72t^4 + 72t^2 + 18$

$104t^4 - 80t^2 - 18 = 0$

$52t^2 - 40a - 9 = 0$

$D = 2025$

2. $(a; b; c)$

$a \leq b \leq c$

$\begin{array}{r} \cdot 52 \\ 36 \\ \hline + 312 \\ \hline 156 \\ \hline 1872 \end{array}$

$a = x$

$b = qx$

$c = q^2x$

$abc = (xq)^3 = 3^{240} \cdot 7^{240}$

$b = xq = 3^{80} \cdot 7^{80}$

$a = 3^{p_1} \cdot 7^{p_2}$

$c = 3^{q_1} \cdot 7^{q_2}$

$p_1 + q_1 = 160$

$p_2 + q_2 = 160$

$4\sqrt{20} = 8\sqrt{5}$

$SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} - SA$

$3^{81} \cdot 7^{79}; 3^{80} \cdot 7^{80}; 3^{89} \cdot 7^{81}$

$b = 3^{80} \cdot 7^{80}$

$(3^{40} \cdot 7^{40}); 3^{80} \cdot 7^{80}; (3^{120} \cdot 7^{120})$

$2^3 \cdot 3; 2^2 \cdot 3^2; 2^1 \cdot 3^3$

$ac = 3^{160} \cdot 7^{160}$

$3^{14} \cdot 7^{100}; 3^{80} \cdot 7^{80}; 3$

$SD = \sqrt{SD^2 - 18}$

$SD = \sqrt{SA^2 - 4}$

$a \leq c$

1) $a = 3^{p_1} \cdot 7^{p_2}$

$c = 3^{n_1} \cdot 7^{n_2}$

3^{p_1}

$3^{81} \cdot 7^{80}$

$n_1 + p_1 = 160$

$n_2 + p_2 = 160$

$SB^2 - SA^2$

$n_1 = p_1$

$SB^2 - 14 = SA^2$

$p_1 = 160$ ~~вариант~~

$q = \frac{3^{21}}{7^{22}}$ или $\frac{7^{81}}{3^{82}}$

$7^{p_1} > 3^{p_2}$

$3^{21} > 7^{22}$

$(2\sqrt{2} + \sqrt{10} - SA)^2 - 14 = SA^2$

$8 + 10 + SA^2 - 4 \cdot 2\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{10} + 8\sqrt{5} - 14 = SA^2$

3. $\ln^2(x+2) - (x+1) \ln(4x+8) + (\ln 4) \ln(x+2) \geq 0$

$x+2 > 0$

$x > -2$

$\ln^2(x+2) - (x+1) \ln 4 - (x+1) \ln(x+2) + \ln 4 (\ln(x+2)) \geq 0$

$\ln(x+2) = t$

$x+1 = a$

$t^2 - a \ln 4 - at + t \ln 4 \geq 0$

$t(t-a) + \ln 4(t-a) \geq 0$

$(t + \ln 4)(t - a) \geq 0$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

$$(\ln(x+2) + \ln 4) (\ln(x+2) - x - 1) \geq 0$$

⇓

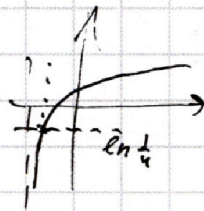
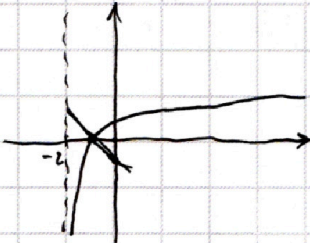
$$(1-e)(x+2+4) \geq 0$$

~~(1-e)~~

$$(x-2) \leq 0$$

$$x \leq 2$$

ln



$$\ln(x+2) - \ln(1/4) \geq 0$$

$$\ln(x+2)$$

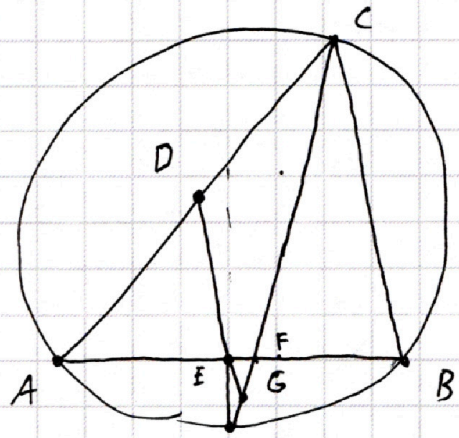
~~x+2~~

$$(x+2 - 1/4) = x + 7/4$$

$$\ln(x+2) \geq \ln 1/4$$

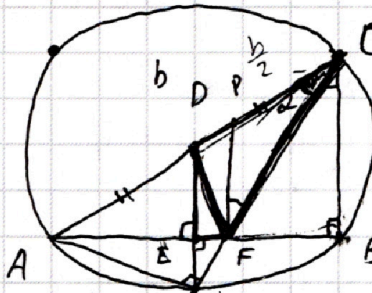
$$\frac{-2}{3} + \frac{4}{3} + 1 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

5.



$$a = b \cos 2\alpha$$

$$c = b \sin 2\alpha$$



$$\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$$

$$\frac{a}{b} = ?$$

$$\frac{c}{b} = ?$$

$$\frac{a}{c} = ?$$

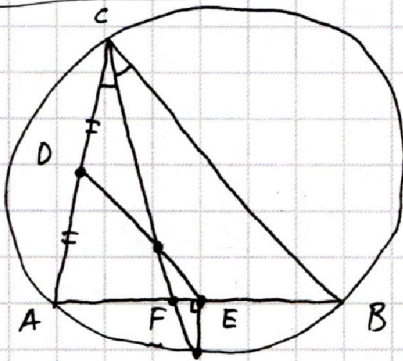
$$AC = b; BC = a; AB = c$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{b}{a}$$

$$AE = EB = \frac{c}{2}$$

$$AD = DC = \frac{b}{2}$$

5.



$$\frac{c - FB}{FB} = \frac{b}{a}$$

$$ac - aFB = bFB$$

$$FB(a+b) = ac$$

$$FB = \frac{ac}{a+b}$$

$$AF = \frac{bc}{a+b}$$

$$AF + FB = c$$

$$AF = c - FB$$

$$CF^2 = \sqrt{a^2 + \frac{a^2 c^2}{(a+b)^2}}$$

$$CF^2 = a^2 + \frac{a^2 c^2}{a+b}$$

$$\frac{CF^2}{DF^2} = \frac{2}{11}$$

$$DF^2 = \frac{11 CF^2}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{CD^2 + CF^2 - DF^2}{2 CD \cdot CF}$$

$$\sin \alpha = \frac{11}{2} n = -\frac{9}{2} n$$



$$DF^2 = CD^2 + CF^2 - 2 CD \cdot CF \cdot \cos \alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик:

$$\frac{b^2}{4} - g \cdot \frac{(a^2(a+b)^2 + a^2c^2)^{14}}{(a+b)^2} = \frac{b^2(a+b)^2 - 36a^2(a+b)^2 + 36a^2c^2}{4(a+b)^2}$$

$$\frac{ab\sqrt{(a+b)^2+c^2}}{a+b} = \frac{b^2(a+b)^2 + (a+b)^2(b^2-36a^2) - 36a^2c^2}{4ab(a+b)\sqrt{(a+b)^2+c^2}}$$

$$= \frac{(a+b)(b^2-36a^2)}{4ab\sqrt{(a+b)^2+c^2}} - \frac{36a^2c^2}{4ab(a+b)\sqrt{(a+b)^2+c^2}}$$

$$b = \sqrt{a^2+c^2} \quad b^2 - a^2 = c^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + c^2 =$$

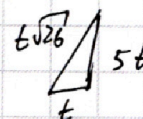
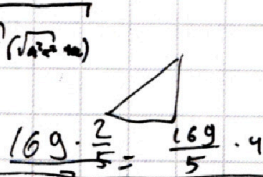
$$= 2b^2 + 2ab =$$

$$= 2b(b+a)$$

$$\sqrt{2b(b+a)} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{b+a}$$

$$\frac{(a + \sqrt{a^2+c^2})(c^2 - 36a^2)}{4a\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{2\sqrt{a^2+c^2}(\sqrt{a^2+c^2}+a)}} - \frac{36a^2c^2}{4ab(a+b)\sqrt{(a+b)^2+c^2}}$$

$$\sqrt{a^2+c^2} =$$



$$\frac{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} =$$

$$= \frac{13 \cdot \sqrt{2}}{5}$$

$$a = 2R \sin \alpha$$

$$b = 2R \sin \beta$$

$$c = 2R \sin \gamma$$

x, y, z - не все равны

max(x, y, z)

x, y, z ≠ 0

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}$$

$$x^3 = a$$

$$y^3 = b$$

$$z^3 = c$$

$$x^2 y \geq z$$

$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3}$$

$$\frac{624}{120} = \frac{104}{20} =$$

$$= \frac{51}{5}$$

$$\begin{cases} a + \frac{10}{b} = b + \frac{10}{c} \quad | \cdot bc \\ b + \frac{10}{c} = c + \frac{10}{a} \quad | \cdot ac \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ - 13 \\ \hline 156 \\ + 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$- \frac{26}{5} = 13$$

$$abc = b^2c + 10(b-c)$$

$$abc = ac^2 + 10(c-a)$$

$$ac^2 + 10(c-a) = b^2c + 10(b-c)$$

$$\begin{cases} abc + 10c = b^2c + 10b \\ abc + 10a = ac^2 + 10c \end{cases}$$



$$\frac{2a^2}{2}$$

$$\frac{d^2}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3}$$

$$x^3 - y^3 = \frac{10}{z^3} - \frac{10}{y^3}$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = \frac{10(y^3-z^3)}{y^3z^3}$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = \frac{10(y-z)(y^2+yz+z^2)}{y^3z^3} = \frac{100(z-x)(z^2+xz+x^2)}{x^3y^3z^6}$$

$$(y-z)(y^2+yz+z^2) = \frac{100(z-x)(z^2+xz+x^2)}{x^3z^3}$$

$$(z-x)(z^2+xz+x^2) = \frac{100(x-y)(x^2+yx+y^2)}{x^3y^3}$$

$$(x-y)(x^2+yx+y^2) = \frac{1000(x-y) \dots}{x^6y^6z^6}$$

$$\frac{1000}{(xyz)^6} = 1$$

$$(xyz)^6 = 1000$$

$$xyz = \sqrt[6]{1000} = 10^{\frac{5}{6}}$$

$$xyz = \sqrt[6]{10^3} = 10^{\frac{3}{6}} = \sqrt{10}$$

$$x=y$$

$$x^2z = \sqrt{10}$$

$$z = \frac{\sqrt{10}}{x^2}$$

$$x^3 + \frac{10}{x^3} = x^3 + \frac{10}{x^3} = \sqrt{\dots}$$

$$\frac{10}{x^3} = \frac{10}{10\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{x^6}$$

$$\frac{10}{x^3} = \frac{10x^2}{\sqrt{10}}$$

$$10x^3 = 10 \cdot \frac{10\sqrt{10}}{x^6}$$

$$10\sqrt{10} = 10x^5$$

$$x^3 = \frac{10\sqrt{10}}{x^6}$$

$$x^5 = \sqrt{10}$$

$$x^9 = 10\sqrt{10} = (\sqrt{10})^3 \cdot 10^{\frac{5}{6}}$$

$$x = \sqrt[5]{10}$$

$$x = 10^{\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{3} = \sqrt[3]{10}$$

$$z = \frac{10^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{3}}}$$

$$(x^3 - y^3) = 6(x^3 - y^3)$$

$$x^2 = 10^{\frac{1}{6}} \cdot 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{10}$$

$$xyz = \sqrt{10}$$

$$y = \frac{\sqrt{10}}{x^2}$$

$$x^3 + \frac{10}{x^3} =$$

$$= x^3 + \frac{10}{x^3} = x^3 \left(1 + \frac{2^3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\frac{10\sqrt{10}}{x^3z^3} + \frac{10}{z^3} = \frac{10(x^3 + \sqrt{10})}{x^3z^3}$$

8

$$a+b+c = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{3} \quad b = \frac{1}{4} \quad c = \frac{1}{8}$$

$$10^{a+b+c} = 10^{\frac{1}{2}}$$

$$x \cdot 10^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{\frac{1}{4}} = 10^{\frac{1}{2}}$$

$$b = \frac{1}{6}$$

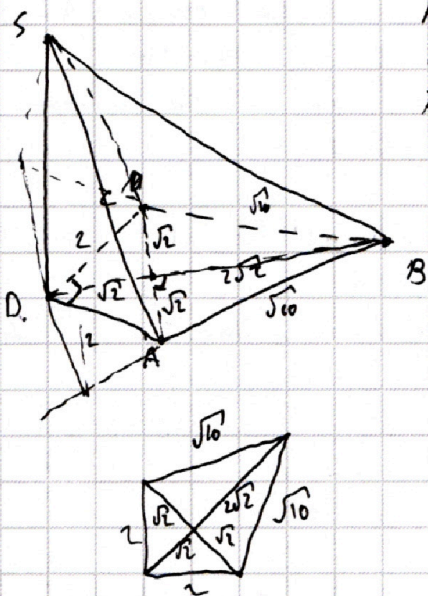
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD = DC = 2 \quad SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$$

$$AC = 2\sqrt{2}$$

$$AB = BC = \sqrt{10} \quad SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{10} - SA$$

$$a = b \cos \alpha$$

$$b = b \sin \alpha$$

$$SB = \sqrt{5D^2 + 16}$$

$$SA = \sqrt{5D^2 + 4}$$

$$SD = D^2 = x$$

$$\sqrt{x+16} + \sqrt{x+4}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \cdot 256 \\ \hline 12288 \\ + 1768 \\ \hline 14056 \\ \hline 2449 \end{array}$$

$$\frac{\frac{b^2}{4} - \frac{9}{2} \left(a^2 + \frac{a^2 c^2}{(a+b)^2} \right)}{b \sqrt{a^2 + \frac{a^2 c^2}{(a+b)^2}}} = \frac{\frac{b^2}{4} - \frac{9}{2} t^2}{bt} = \frac{b^2 - 18t^2}{8bt} = \frac{b^2 - 18t^2}{8bt}$$

$$a^2 = b^2 \cos^2 \alpha$$

$$a + b = b(\cos \alpha + 1)$$

$$b^2 = b^2 \sin^2 \alpha$$

$$\frac{a^2 (a+b)^2 + a^2 c^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2 (a+b)^2 + c^2}{(a+b)^2} = \frac{\cos^2 \alpha (b^2 (\cos \alpha + 1)^2 + b^2 \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 + \cos \alpha)^2} =$$

$$= \frac{b^2 \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha + 1 + \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha + 1} =$$

$$= \frac{2b^2 \cos^2 \alpha (1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)^2} = \frac{2b^2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = t^2$$

$$b^2 = \frac{36b^2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \frac{1 + \cos \alpha - 36 \cos^2 \alpha}{8(1 + \cos \alpha) \sqrt{\frac{2 \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}} = 2 \cos^2 \alpha - 16$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\frac{2}{1 + \cos \alpha} = \frac{2}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

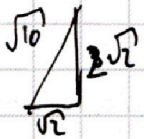
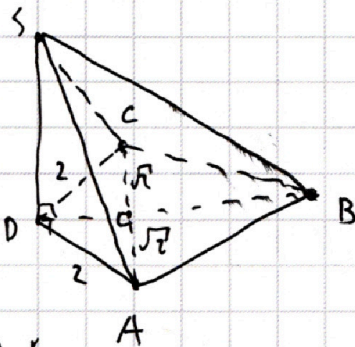


$$SA + SB = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$$

$$BD = 3\sqrt{2}$$

$$AD = 2$$

$$BS = \sqrt{SD^2 + 18} \quad AS = \sqrt{SD^2 + 4}$$



$$\sqrt{x+18} + \sqrt{x+4} = 2\sqrt{2}(2+\sqrt{5}) \quad (\uparrow^2)$$

$$2x+22 + 2\sqrt{x^2+22x+72} = 2(9+4\sqrt{5})$$

$$x+11 + \sqrt{x^2+22x+72} = 9+4\sqrt{5}$$

$$\sqrt{x^2+22x+72} = (4\sqrt{5}-2) - x \quad (\uparrow^2)$$

$$\cancel{11} + 22x + 72 = \cancel{11} - 2x(4\sqrt{5}-2) + 84 - 8\sqrt{5}$$

$$22x = 12 - 8\sqrt{5} - 8x\sqrt{5} + 4x$$

$$18x + 8x\sqrt{5} = 12 - 8\sqrt{5} \quad |:2$$

$$9(9+4\sqrt{5}) = 6 - 4\sqrt{5}$$

$$x^2 + 22x + 72 = 60 + 4 + x$$

$$x = \frac{6-4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}} = \frac{6-4\sqrt{5}-3-8\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}$$

$$= \frac{3-8\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}$$

$$3+20$$

$$9+10$$

$$\cancel{11} + 22x + 72 = 80 + 4 - \cancel{11} - 8x\sqrt{5} - 16\sqrt{5} + 4x \quad |:2$$

$$11x + 36 = 42 - 4x\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 2x$$

$$9x + 4x\sqrt{5} = 6 - 8\sqrt{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\frac{b^2}{4} - \frac{18}{4} \left(\frac{a^2(a+b)^2 + c^2 a^2}{(a+b)^2} \right)}{b \sqrt{\dots}} = \frac{b^2 - 18t^2}{4bt} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{b^2} = b^2 \cos^2 2\alpha + b^2 + 2b^2 \cos 2\alpha =$$

$$t^2 = \frac{a^2 (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab)}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{b^2 \cos^2 2\alpha (b^2 \cos^2 2\alpha + 2b^2 + 2b^2 \cos 2\alpha)}{b^2 (\cos 2\alpha + 1)^2}$$

$$= \frac{2b^2 \cos^2 2\alpha (1 + \cos 2\alpha)}{1 + \cos 2\alpha} = \boxed{\frac{2b^2 \cos^2 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}$$

$$\frac{36 \cos^2 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 + \cos 2\alpha - 36 \cos^2 2\alpha}{2 \cos^2 2\alpha \cos \alpha} =$$

$$= \frac{2 \cos^2 2\alpha - 36 (\cos^2 2\alpha + 1)^2}{2 \cos \alpha (2 \cos^2 2\alpha + 1)} \quad \cos^2 \alpha = t$$

$$t^2 (2t^2 + 1) = t^2 - 36(4t^4 - 4t^2 + 1)$$

$$2t^4 - 144t^4 + 144t^2 - 36 = 0$$

$$146t^4 - 144t^2 + 36 = 0 \quad | :2$$

$$2t^4 - t^2 = t^2 - 144t^4 + 144t^2 - 36$$

$$73a^2 - 72a + 18 = 0$$

$$146t^4 - 146t^2 + 36 = 0$$

$$D = 72^2 - 72 \cdot 73$$

$$D = 73^2 - 7^2$$

$$8t^4 - 4t^2 = 144t^4 - 144t^2 + 144t^2 - 36$$

$$152t^4 - 144$$

$$\frac{18}{16} - 1 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

2.

$$2 \frac{1}{5} - 1 =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{b^2 - 18t^2}{4bt} \quad t^2 = \frac{2b^2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$\frac{b^2 - \frac{36b^2 \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha}}{4b^2 \sqrt{\frac{2 \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha}}} = \frac{\cos^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{4 \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{4 \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - 18(2 \cos^2 \alpha - 1)^2}{\cos^4 \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{4 \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - 18(2 \cos^2 \alpha - 1)^2}{4 \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1)} > \cos \alpha = t$$

$$t = \frac{t^2 - 18(4t^4 - 4t^2 + 1)}{4t(2t^2 - 1)}$$

$$4t^2(2t^2 - 1) = t^2 - 72t^4 + 72t^2 - 18$$

$$8t^4 - 4t^2 = t^2 - 72t^4 - 72t^2 + 18 = 0$$

$$80t^4 - 77t^2 + 18 = 0$$

$$D = 5929 - 5760$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 77 \\ \cdot 77 \\ \hline 177 \\ + 539 \\ \hline 339 \\ \hline 5929 \\ \hline 5929 \\ \hline 180 \\ \hline 180 \\ \hline 256 \\ \hline 32 \\ \hline 5760 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



черновик

$$y = -2x^3 - ax = -x(2x^2 - a)$$

$$y = 5x$$

$$2x^2 = a$$

$$x^2 = \frac{a}{2}$$

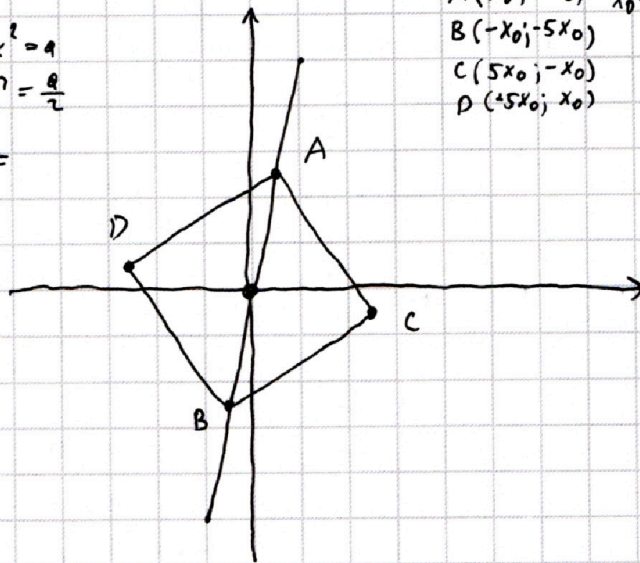
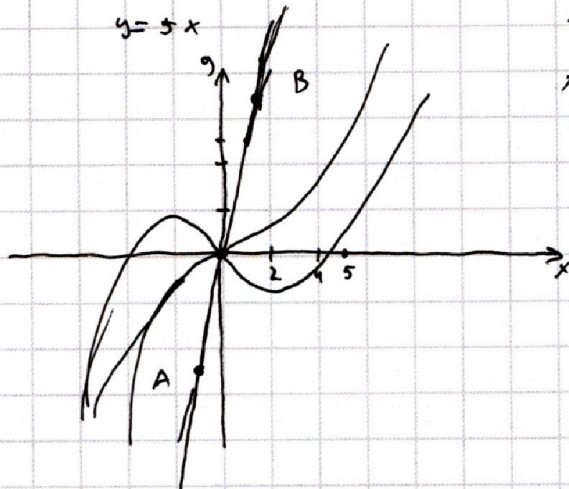
$$x =$$

$$A(x_0; 5x_0) \quad x_0 = t$$

$$B(-x_0; -5x_0)$$

$$C(5x_0; -x_0)$$

$$D(-5x_0; x_0)$$



$$A(t; 5t)$$

$$B(-t; -5t)$$

$$C(5t; -t)$$

$$D(-5t; t)$$

$$f(x) = -2x^3 - ax$$

$$f(t) = -2t^3 - at = 5t \quad | :t$$

$$2t^2 + a = -5$$

$$2t^2 = -(a+5)$$

$$t^2 = \frac{-(a+5)}{2}$$

$$f(-t) = 2t^3 + at = -5t$$

$$f(5t) = -250t^3 + 5at = -t \quad | :t$$

$$250t^2 + 5a = -1$$

$$250t^2 = \frac{-5a-1}{250}$$