



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



- √ 1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

- √ 2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

- √ 3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

- √ 4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .

- √ 5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

- √ 6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1. |x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$$

$$x^3+4=a \quad x^2-1=b \quad 1-x^2=b$$

$$|a| + |b| \leq |a+b| \Rightarrow |a| + |b| \leq |a+b| \quad (|b|=|1-b|)$$

Рассмотрим ситуацию в общем случае:

$$|a| + |b| \leq |a+b|$$

1) $a, b \geq 0 \Rightarrow a+b \leq a+b$ - верно

2) $a, b < 0 \Rightarrow -a-b \leq -a-b$ - верно

3) Пусть $a > 0, b < 0$ (для $b < 0, a < 0$ рассуждения аналогичны)

$$b = -b_0; b_0 > 0 \Rightarrow |a| + |b| \leq |a-b|$$

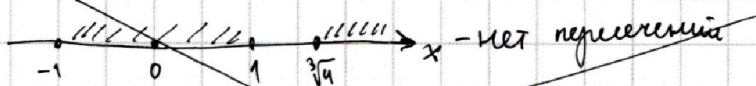
• $a \geq b_0 \Rightarrow a+b_0 \leq a-b_0 \Rightarrow b_0 \leq -b_0 \Rightarrow b_0 = 0$ - против.

• $b_0 > a \Rightarrow a+b_0 \leq b_0-a \Rightarrow a < -a \rightarrow$ против.

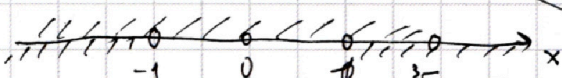
Итого 2 случая: 1) $a, b \geq 0$; 2) $a, b < 0$; ~~3) $a > 0, b < 0$~~

$$\begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 \geq -4 \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \begin{cases} x \geq -\sqrt[3]{4} \\ x \in [-1; 1] \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^3+4 < 0 \\ 1-x^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 < -4 \\ x^2 > 1 \end{cases} \begin{cases} x < -\sqrt[3]{4} \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

Решение 1ой системы:



Значит решение совокупности это решение 2ой системы:



Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \sqrt[3]{4})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

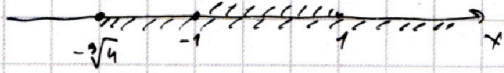
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

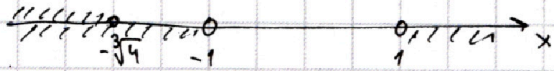


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение 1ой системы: $x \in [-1; 1]$



Решение 2ой системы $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4})$



Ответ: $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}) \cup [-1; 1]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

Пусть $a = 2^{\lambda} \cdot 3^{\beta}$; q - знаменатель прогрессии; $q = 2^x \cdot 3^y$.

Заметим, что других простых множителей в разложении чисел a и q нет, иначе они бы были в разложении числа $abc = a \cdot aq \cdot (q^2 a) = 2^{150} \cdot 3^{300}$.

$$\begin{aligned} b &= a \cdot q = 2^{\lambda+x} \cdot 3^{\beta+y} \\ c &= aq^2 = 2^{\lambda+2x} \cdot 3^{\beta+2y} \Rightarrow abc = 2^{3\lambda+3x} \cdot 3^{3\beta+3y} = 2^{150} \cdot 3^{300} \end{aligned}$$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} 3\lambda+3x=150 \\ 3\beta+3y=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+x=50 \\ \beta+y=100 \end{cases}$$

Количество пар таких целых λ и x , что $\lambda+x=50$ равно A

$$A = 51 (0-50; 1-49, \dots, 49-1; 50-0)$$

Количество пар таких целых β и y , что $\beta+y=100$ равно B

$$B = 101 (0-100; 1-99, \dots, 99-1; 100-0)$$

Тогда кол-во троек a, b, c : $T = A \cdot B$; Никакие

2 тройки a, b, c не совпадут, т.к. одному варианту

пары из множества A соответствует ровно одно значение степени двойки y или a, q , т.е. y или a, b, c

аналогично с множеством B . $T = A \cdot B = 51 \cdot 101 = 5151$

Осталось заметить, что если есть такие abc , то

$\lambda+x=50$, $\beta+y=100$, и наоборот.

Ответ: 5151

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обезопасим переменную $y=2 \rightarrow x=6$

Пусть $y \geq 3$

Тогда все выражение $S \geq x^2(3-2) - x(39-27) + 4y - 9u \neq 0$

$$0 \geq x^2 - 12x + 132 - 9u = x^2 - 12x + 40$$

$$x^2 - 12x + 40 \leq 0$$

но $D = 144 - 160 < 0$, ветви вверх $\Rightarrow x^2 - 12x + 40 > 0$ - не выполняется \Rightarrow
 $\Rightarrow y \leq 2$

Пусть $y \leq 1$

Тогда $S = 0 \leq x^2(1-2) - x(13-27) + 4y - 9u \neq 0$

$$0 \leq -x^2 + 14x - 50 \cdot (-1)$$

$$x^2 - 14x + 50 \leq 0$$

$D = 196 - 200 < 0$ - ветви вверх $\Rightarrow x^2 - 14x + 50 > 0$ при всех x

Тогда $y=2 \rightarrow x=6$

Ответ: $x=6; y=2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

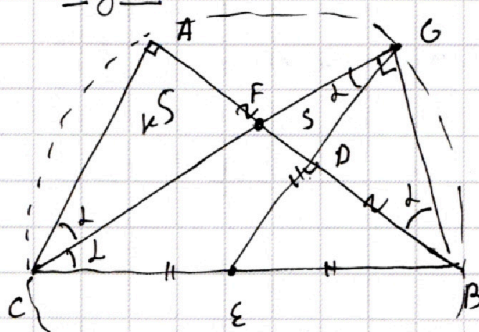
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4



Заметим, что E - центр ω ; $\angle CBE = \angle GCA = \angle GCE$ (как накрест лежащие) \Rightarrow
 $\Rightarrow CE = EB = EG \Rightarrow \angle CGB = 90^\circ \Rightarrow CB$ - диаметр окружности $\Rightarrow E$ - центр.

$\angle CAB = \angle EDB = \angle CGB = 90^\circ$; Пусть $\angle ACF = \alpha$

$$k = \frac{AF}{FD} = \frac{AF}{FD} + 1 - 1 = \frac{AD}{FD} - 1 = \frac{BD}{FD} - 1 \quad (AD = BD)$$

(из подобия $\triangle ACF \sim \triangle DGF$)

$$-1 + \frac{BD}{FD} = -1 + \frac{BD \cdot BF}{BF \cdot FD} = \frac{BG^2}{FG^2} = 1 = \text{ctg}^2 \alpha - 1 = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha} - \text{знаем}$$

$$\frac{S_{GFD}}{S_{CFA}} = \left(\frac{FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2; \quad \frac{S_{CFB}}{S_{CFA}} = \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} \quad (\text{по св-ву биссектрисы}) = \frac{1}{\cos 2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CFB}}{S_{GFD}} = \frac{k^2}{\cos 2\alpha} = 16 \quad (\text{по усл.})$$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha} = 16 \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 16 \sin^4 \alpha$$

$$2 - \sin^2 \alpha = 16 \sin^4 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = t \Rightarrow 16t^2 + t - 2 = 0$$

$$D = 129 \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{129} - 1}{32} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}} \quad (t_2 < 0)$$

$$2\alpha = 2 \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}}$$

Ответ: 90° ; $2 \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}}$; $90 - 2 \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

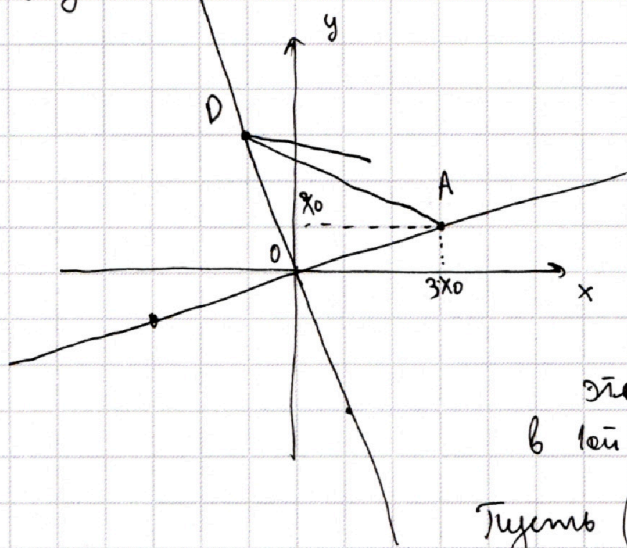
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5



Заметим, что вторая диагональ квадрата лежит на прямой $y = \frac{1}{3}x$, которая получается из прямой $y = -3x$ поворотом на 90° относительно начала координат.

Найдем координаты точки этого квадрата, расположенную в той четверти. Ее координаты

Точка $(3x_0; x_0)$;

Тогда верно равенство $x_0 = 3^5 x_0^4 + ax_0 \Rightarrow 1 = 3^5 x_0^4 + a$ (очев., что $x_0 \neq 0$)

Поворотом на 90° против часовой стрелки получим точку P с координатами $(-x_0; 3x_0) \Rightarrow$ верно равенство:

$$3x_0 = -x_0^5 + (-ax_0) \Rightarrow 3 = -x_0^4 - a$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 3^5 x_0^4 + a = 1 \\ 3 = -x_0^4 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 243 x_0^4 + a = 1 \\ x_0^4 = -a - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -243a - 3^6 + a = 1 \\ -242a = 3^6 + 1 \\ a = -\frac{3^6 + 1}{242} = -\frac{730}{242} \end{cases}$$

~~Ответ: $-\frac{730}{242}$~~ Тогда $x_0^4 = \frac{730}{242} - 3 = \frac{4}{242} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_0^2 = \frac{2}{11\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{11} \Rightarrow OA = \sqrt{9x_0^2 + x_0^2} = \sqrt{10x_0^2} = \sqrt{\frac{10\sqrt{2}}{11}}$$

$$AD = \sqrt{2} \cdot OA = \sqrt{\frac{20\sqrt{2}}{11}}$$

Ответ: $a = -\frac{730}{242}$; $AD = \sqrt{\frac{20\sqrt{2}}{11}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что никакие 2 не равны между собой

$$\begin{aligned} 1) a=b &\Rightarrow a+\frac{5}{a}=a+\frac{5}{c} \Rightarrow a=b=c \text{ - третье} \\ 2) a=c &\Rightarrow a+\frac{5}{a}=b+\frac{5}{a} \Rightarrow a=b=c \\ 3) b=c &\Rightarrow b+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{a} \Rightarrow a=b=c \end{aligned}$$

из условия получаем, что: $a-b = \frac{5(c-a)}{ab}$; $b-c = \frac{5(c-a)}{ac}$

$$a-b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{5b-5c}{bc} = \frac{5(b-c)}{bc} = \frac{25(c-a)}{abc^2} = \frac{125(a-b)}{a^2b^2c^2}$$

$$\cancel{a-b} = \frac{125\cancel{(a-b)}}{a^2b^2c^2} : (a-b) \quad a \neq b \neq 0$$

$$a^2b^2c^2 = 125$$

$$1) abc = 5\sqrt{5} \quad 2) abc = -5\sqrt{5}$$

Ответ: $-5\sqrt{5}$



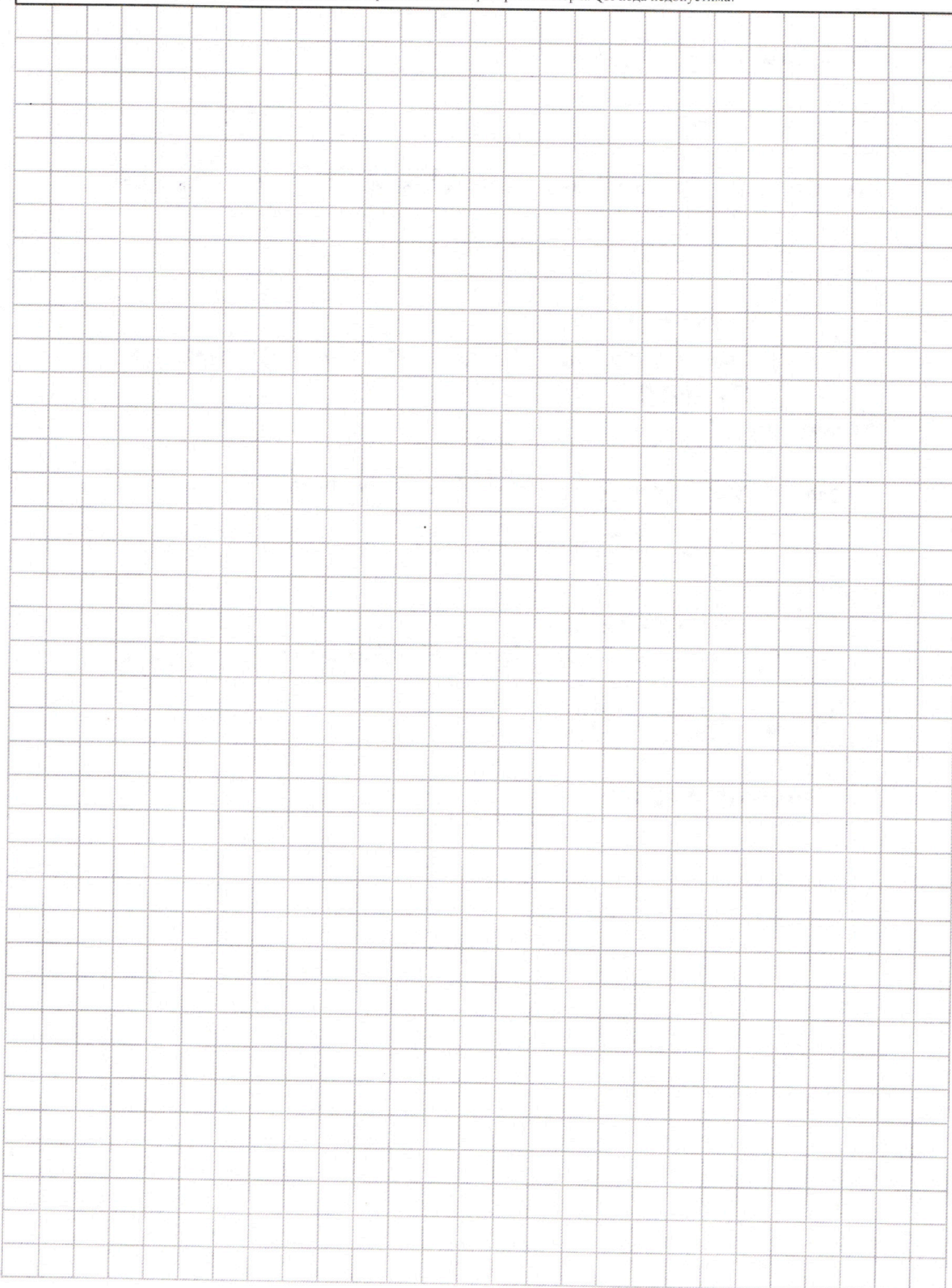
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$\frac{88}{132}$$

$$x^2(y-2) - 13xy + 27x + 44y - 94$$

$$\cancel{26y} - \cancel{72} - \cancel{78y}$$

Пусть $y \geq 3$

Пусть $y \leq 2$

$$\geq x^2 - x(\cancel{12}) + 132 - 94 \neq 0$$

$$0 \leq x^2(-1) - x(-14) + 44y - 94 \neq 0$$

$$x^2 - 12x + 40 \leq 0$$

$$0 \leq -x^2 + 14x - 50$$

$$D = 144 - 160 < 0 \text{ - корней нет}$$

$$x^2 - 14x + 50 \leq 0$$

$$D = 196$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$D = 2 - 7y^2 + 26y - 23 =$$

$$a = b$$

$$a + \frac{5}{8} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad | \cdot abc$$

$$a + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \Rightarrow a = c$$

$$a^2 + b^2 = b^2 + \frac{5b}{c} =$$

$$a = c$$

$$a + \frac{5}{8} = b + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{a} = a = b$$

$$a^2 + 5ac =$$

$$b = c$$

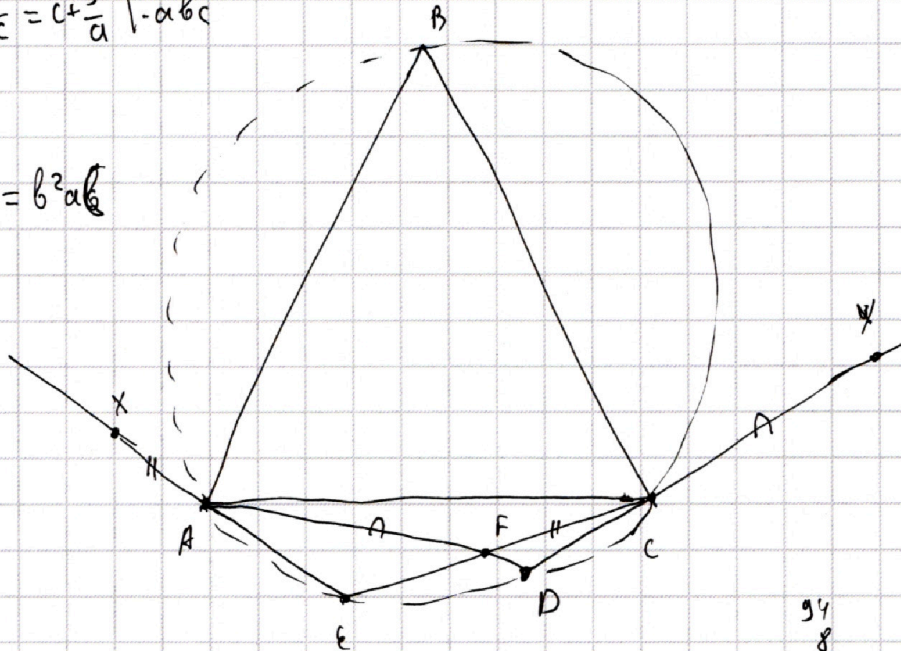
$$a + \frac{5}{8} = b + \frac{5}{8} \Rightarrow a = b$$

$$a + b + c = a$$

$$a + \frac{5}{8} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad | \cdot abc$$

$$a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{8}$$

$$a^2bc + 5ac = b^2ab$$



$\frac{94}{8}$

$$x^2(y-2) + 4x$$

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 4xy - 94 = 0$$

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 4xy - 94 = 0$$

$$y - 2 - 13y + 27 + 4xy - 94 = 0$$

$$y(x^2 - 13x + 44) - 2x^2 - 27x - 94 = 0$$

$$y(x^2 - 13x + 44)$$

$$1) x=0 - \text{нет реш.}$$

$$2) y=0:$$

$$-2x^2 - 27x - 94 = 0$$

$$D = 729 - 729 < 0 - \text{нет решений}$$

$$x^2 - 13x + 44 = 0$$

$$169 - 169 < 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & a \leq \left(\frac{2}{5} + g\right) \left(\frac{2}{5} + a\right) \\
 & a \leq \frac{2g}{5} + \frac{2}{5} + 5 + ga \qquad \frac{2}{5} + g = \frac{2}{5} + a \\
 & \frac{2}{5} < \frac{2}{5} \text{ (no)} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{2}{5} \\
 & a > g \qquad \left. \begin{array}{l} g = a < \frac{2}{5} + a = \frac{2}{5} + g \Leftrightarrow g = a \\ g = a \Rightarrow \frac{2}{5} + a = \frac{2}{5} + a \Leftrightarrow \text{true} \\ a > g \Rightarrow \frac{2}{5} + a > \frac{2}{5} + g \Leftrightarrow a > g \end{array} \right\} \\
 \hline
 & g < a \qquad a - g > 0 \\
 & a < \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = a - a < 0 \qquad a - g > 0 \qquad a - c > 0 \\
 & g < c \qquad c > g \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{2}{5} \\
 & 0 < \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \qquad 0 < a - g \qquad c > g > 0 \qquad a > g > c \\
 & a \geq \frac{2}{5} < \frac{2}{5} = c - a \qquad a \geq \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = g - a \qquad a \geq \frac{2}{5} \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{2}{5} + g = \frac{2}{5} + a \text{ (no)} \\
 & 0 = 6 - 13y - 8x + (x^2 - 2x)(y - 13) - x \\
 & 0 = 6 - 13y - 8x + (x^2 - 2x)(x - 13) - 13y - 3 = 0 \\
 & 0 = 6 - 13y - 8x + 26x^2 - 26x^2 - 13x^2 - 3 = 0 \\
 & 0 = 6 - 13y - 8x + 26x^2 - 13x^2 - 3 = 0 \\
 & 0 = 3 - 13y - 8x + 13x^2 - 3 = 0 \\
 & 0 = 13x^2 - 8x - 13y - 3 = 0 \\
 & 0 = 13x^2 - 2x^2 + 22x^2 - 3 - 13y - 3 = 0 \\
 & 0 = 13x^2 - 8x + 22x^2 - 6 - 13y = 0 \\
 & 0 = 13x^2 - 8x + 22x^2 - 6 - 13y = 0 \\
 & 13x^2 - 8x - 13y - 6 = 0 \\
 & 13x^2 - 8x - 13y - 6 = 0
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$t = \frac{a^2 b^2 c^2}{125}$$

$$c - a = \frac{2}{5} - \frac{a}{5} = \frac{2 - a}{5} = \frac{a - b}{5}$$

$$b - c = \frac{a}{5} - \frac{c}{5} = \frac{a - c}{5} = \frac{a - c}{5}$$

$$a - b = \frac{c}{5} - \frac{b}{5} = \frac{c - b}{5} = \frac{b - c}{5}$$

$$abc \geq 100$$

$$y(x-3) - (y-3)(x-3) = 3$$

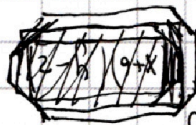
$$y(x-3) - x + 3 = 3$$

$$(xy - 3y - 3x + 9) - (xy - 3y - 3x + 9) = 0$$

$$2 - 2 - 2 - 2 - 6 = 0$$



$$y = 2 \rightarrow x = 6$$



$$1 \quad y = 6$$

$$xy + 6y - 2x - 12$$

$$0 = \dots (2 - y)(y + x)$$

$$y = x$$

$$x + 8 - 9x = 0$$

$$0 = 46 - 88 + \dots + (2 - 2) \dots$$

$$\frac{a}{5} \rightarrow 0$$

$$\frac{b}{5} + 0 < 0$$



$$(x+6)(y-2) + x^2 - 2x - 2y - 12 = 0$$

$$x^2 - 2x^2 + xy - 14xy - 2x + 6y + 38y - 12 - 8 = 0$$

$$x^2 - 2x^2 - 13xy + 2x + 44y - 94 = 0$$

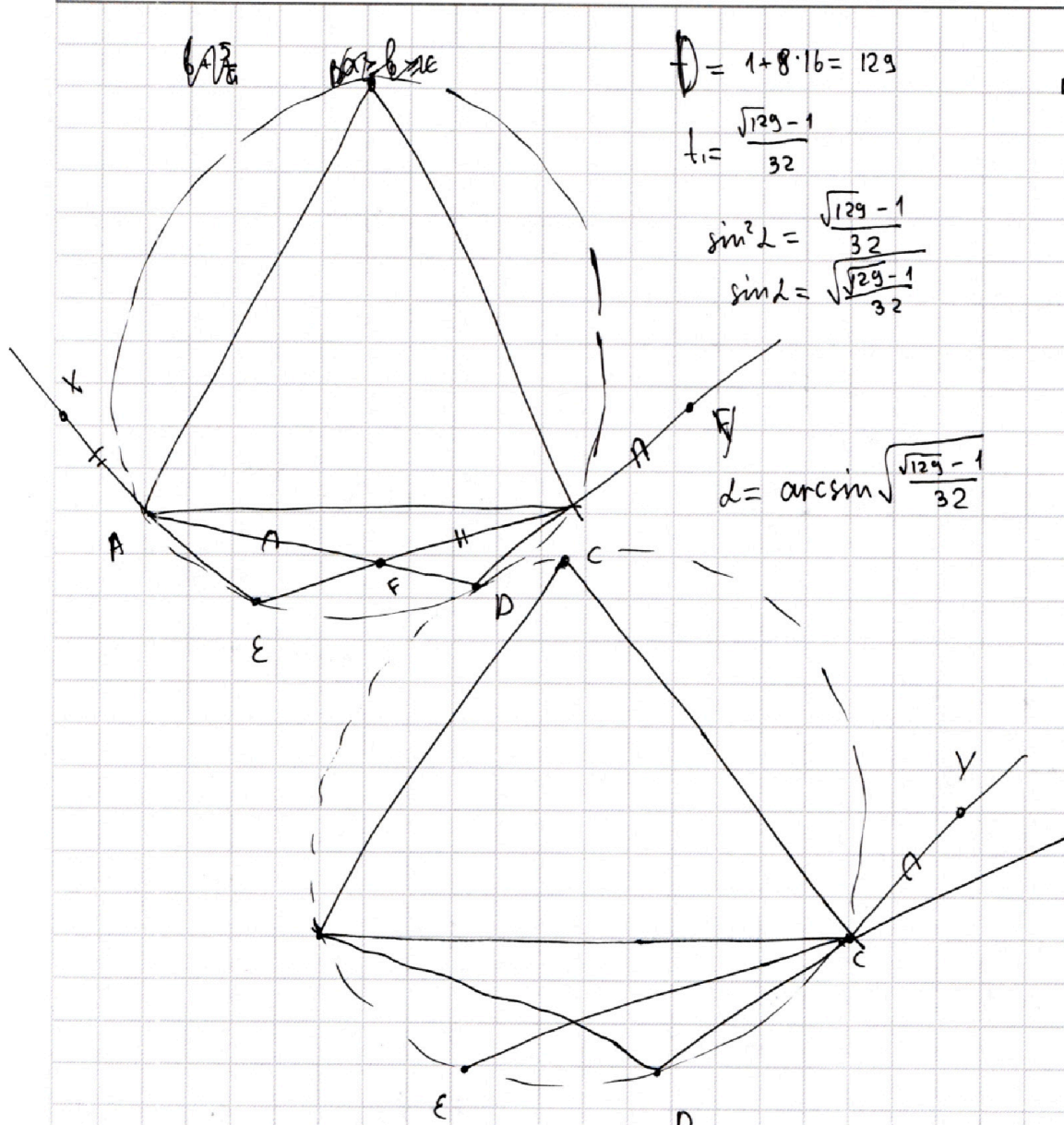
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$D = 1 + 8 \cdot 16 = 129$$

$$\frac{16}{8} = 2$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{129} - 1}{32}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{129} - 1}{32}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}}$$

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{129} - 1}{32}}$$

$$x^2 y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$xy \mid x^2 y + 27x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

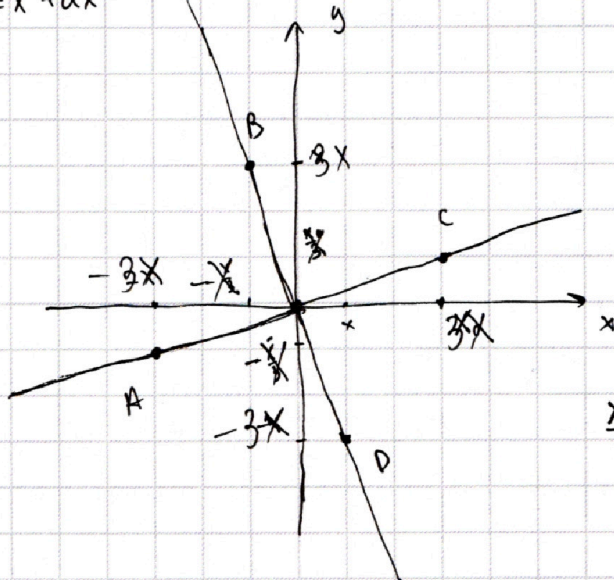


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = x^5 + ax$$

$$y = -3x$$



$$x^5 + ax = -3x \text{ - имеет}$$

$$A\left(-\frac{x_0}{3}; \frac{x_0}{3}\right) \quad \begin{array}{r} 188 \\ 4 \\ \hline 752 \end{array}$$

$$x^4 + a = -3$$

$$\frac{x_0}{3} = x_0^5 + ax_0; \quad x_0 = \left(-\frac{x_0}{3}\right)^5 + a\left(\frac{x_0}{3}\right)$$

$$x_0^4 + a = \frac{1}{3} \quad x_0 = -\frac{x_0^5}{3^5} + \frac{a}{3}\left(-\frac{x_0}{3}\right)$$

$$1 = -\frac{x_0^5}{3^5} + \frac{a}{3}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 9 \\ 27 \\ 81 \\ 243 \\ \hline 24 \\ -3 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$x = (3x)^5 + a \cdot 3x$$

$$1 = 3^5 \cdot x^4 + 3a$$

$$x^4 + a = -3$$

$$3^5 t + 3a = 1$$

$$\begin{array}{l} t + a = -3 \\ a = -3 - t \end{array}$$

$$243t - 9 - 3t = 1$$

$$240t = 10$$

$$24t = 1$$

$$t = \frac{1}{24}$$

$$a = -3 - \frac{1}{24} = -\frac{73}{24}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ 3 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 242 \\ 3 \\ \hline 726 \end{array}$$

2

$$\begin{array}{r} 730 \mid 2 \\ 365 \mid 5 \\ 73 \mid 73 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 365 \mid 5 \\ 35 \mid 73 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$242 \mid 2 \\ \hline 121$$

$$243t + a = 1 \Rightarrow 243(-a - 3) + a = 1$$

$$-t - a = 3 \Rightarrow t = -a - 3$$

$$-242a - 729 = 1$$

$$x^4 = -a - 3 = \frac{730 - 3 \cdot 242}{242} = \left(\frac{2}{11}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{730}{242} = -\frac{365}{121} = -\frac{5 \cdot 73}{11^2}$$

$$x^2 = \frac{2}{11\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{11}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|x^3 + u| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

$$b \geq 0, d \geq 0$$

2. $a = 2^L \cdot 3^B$ $q = 2^x \cdot 3^y$

$$b = 2^{L+x} \cdot 3^{B+y}$$

$$3L + 3x = 150 \Rightarrow L + x = 50$$

$$3B + 3y = 300 \Rightarrow B + y = 100$$

$$c = 2^{L+2x} \cdot 3^{B+2y}$$

$L+x \Rightarrow$ 49 пар (0+50, 1+49, ...

$L+x=50 \rightarrow$ таких пар 26

$$B+y=100$$

... 24+26, 25+25, ... 49+1, 50+0

0-50
1-49
...
24-26
25-25

↓
таких пар

51	0-100
	1-99
	...
	49-51

$$a = 2^L \cdot 3^B \quad q = 2^{50-L} \cdot 3^{100-B}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100-B}$$

$$c = 2^{100-L} \cdot 3^{200-B}$$

Пусть $a = 2^L \cdot 3^B$. Заметим, что никаких других простых множителей в разложении a не присутствует.

Пусть q — знаменатель дроби $q = 2^x \cdot 3^y$

Тогда $b = 2^{L+x} \cdot 3^{B+y}$; $c = 2^{L+2x} \cdot 3^{B+2y} \Rightarrow abc = 2^{3L+3x} \cdot 3^{3B+3y} = 2^{150} \cdot 3^{300}$

$$\begin{cases} 3L + 3x = 150 \\ 3B + 3y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L + x = 50 \\ B + y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 - L \\ y = 100 - B \end{cases}$$

пар неотрицательных целых чисел L, x, B, y , таких что

$$\begin{cases} L+x=50 \\ B+y=100 \end{cases} = 51 \cdot 101 = \text{Ответ: } 51 \cdot 101$$

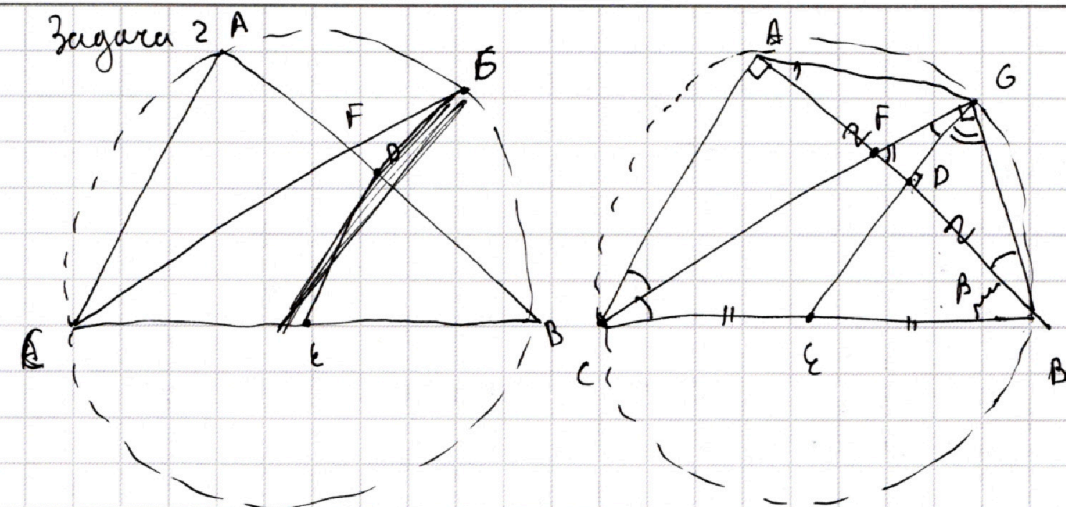
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что G - середина дуги AB не содержащей C .

Упрямда, биссектриса угла вписанного треугольника имеет 2 общие точки с окружностью Ω . Это точка C и

центр дуги AB без точки C . Тогда $GD \perp AB$; медиана в равнобедренном треугольнике ($AG = GB$). Т.к. $ED \parallel AC \Rightarrow \angle CAB = \angle DB = 90^\circ$

Заметим, что $\angle GCE = \angle CBE$ т.к. тогда BC - диаметр, E - его центр $\Rightarrow E$ - центр $\Omega \Rightarrow EC = EG \Rightarrow \angle GCE = \angle CBE$.

Пусть $BC = a \Rightarrow AC = a \cdot \sin B$ ($\angle C = B$)

$$\frac{S_{CFB}}{S_{CFA}} = \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sin B} \Rightarrow S_{CFB} = \frac{S_{CFA}}{\sin B}$$

$$\frac{S_{GDF}}{S_{AEF}} = \left(\frac{FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{AD - AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BD - AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BD + FD - AF - FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BF - AD}{AF}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\sin B} - \frac{AD}{AF}\right)^2 \cdot S_{AEF}$$

$$\frac{AF}{FD} = x$$

$$BG^2 = BD \cdot BF \\ FG^2 = FD \cdot BF$$

$$\frac{S_{CFB}}{S_{GDF}} = \frac{AF^2}{FD^2 \cdot \sin B} = \left(\frac{AF}{FD}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin B}$$

$$\frac{AD}{FD} = x + 1$$

$$\frac{AD}{FD} - 1 = \frac{BD}{FD} - 1 =$$

$$= \left(\frac{BG}{FG}\right)^2 - 1 = \cot^2 \alpha - 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$(13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94) = 169y^2 + 729 - 702y - 4(44y^2 - 88y - 94y + 188) =$$

$$= 169y^2 + 729 - 702y - 176y^2 + 352 + 382y - 752 =$$

$$= -7y^2 + 26y - 23$$

$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$$

I ~~$x^3 > 0$~~

$$(x^3+4) - (x^2+1)$$

$$|a| + |b| \leq |a+b|$$

~~$a, b > 0$
 $a, b < 0$
 $a, b > 0, a, b < 0$
 $a, b < 0$~~

1) $a > 0, b > 0$
 $a+b \leq a+b$

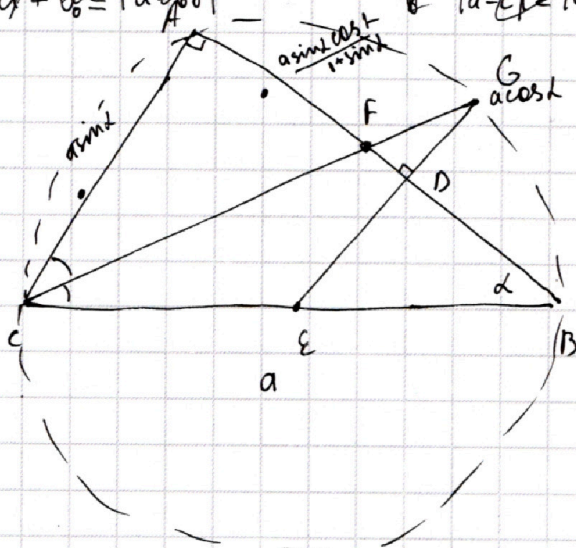
2) ~~$a > 0, b < 0$
 $a < 0, b > 0$
 $a > 0, b < 0$
 $a < 0, b > 0$~~
 $a-b \leq$

2) ~~$a > 0, b < 0$
 $a < 0, b > 0$
 $a > 0, b < 0, b = -b_0$
 $a < 0, b > 0, b = -b_0$~~
 $a+b_0 \leq |a-b_0|$

~~$a > 0, b < 0 \Rightarrow b = -b_0$~~

~~$a+b_0 \leq |a-b_0|$ - не выполняется~~

~~$|a-b_0| \leq |a+b_0|$~~



$$\frac{S_{ACF}}{S_{CFB}} = \sin \alpha$$

$$\frac{S_{ACF}}{S_{CFB}} = \left(\frac{AF}{FD}\right)^2$$

$$\frac{x}{a \cos \alpha - x} = \sin \alpha$$

$$x = a \sin \alpha \cdot \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$x(1 + \sin \alpha) = a \sin \alpha \cos \alpha$$

$$x = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $a > 0, b > 0$ ✓
 $a + b \leq a + b$

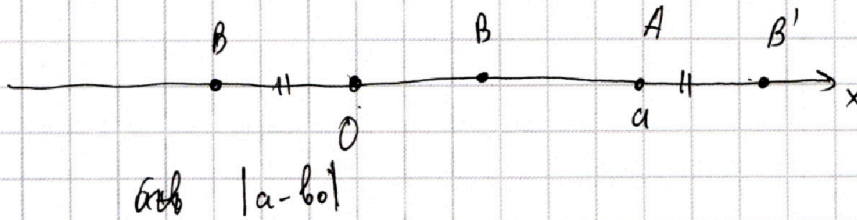
2) $a < 0, b < 0$ $a = -a_0, b = -b_0$ ✓

$a_0 + b_0 \leq a_0 + b_0$

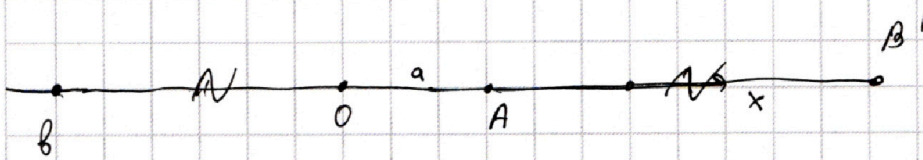
3) $a > 0, b < 0$ $b = -b_0$

$a + b_0 \leq |a - b_0|$

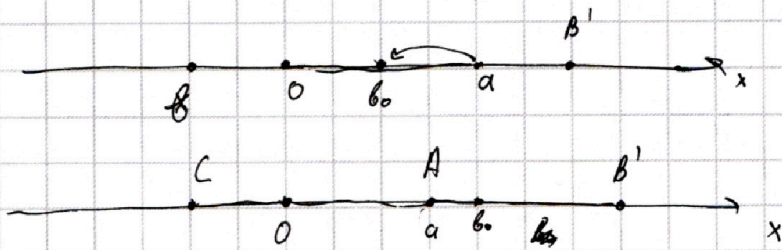
OB' или



$a > 0, b < 0; b = -b_0, b_0 > 0$



$|a - b_0| = a + b_0$, при $a, b_0 > 0$



$OC =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

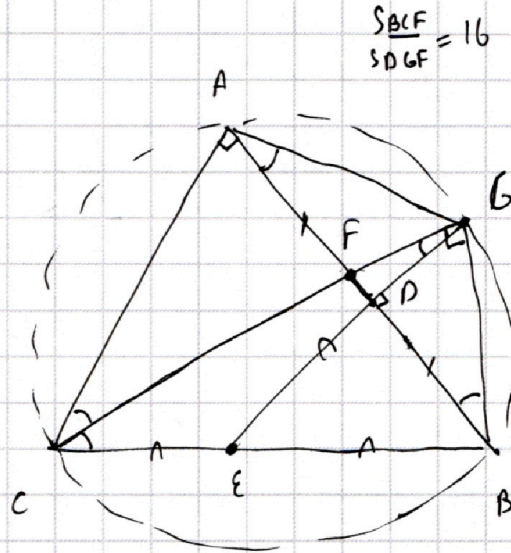
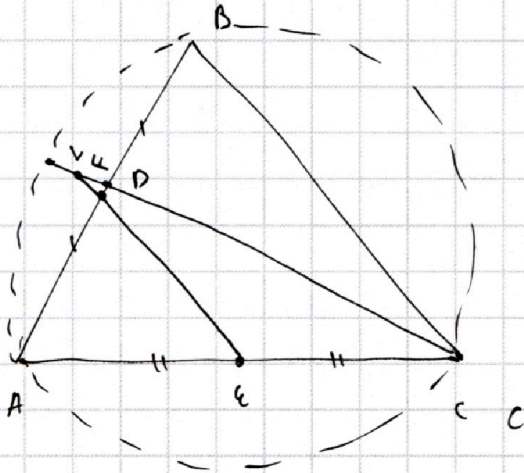


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$D = (13y-27)^2$$



$$\frac{S_{BCF}}{S_{ABF}} = \frac{BF}{EA}$$

$$\frac{S_{BCF}}{S_{ABF}} = \frac{BF}{AF}$$

$$\frac{S_{DGF}}{S_{ACF}} = \left(\frac{FD}{AF}\right)^2$$

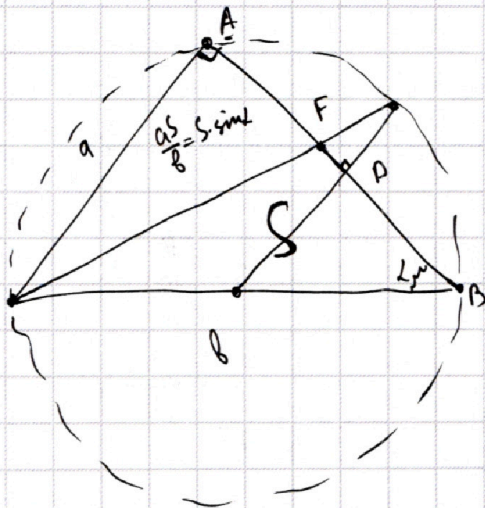
$$\frac{S_{BCF}}{S_{DGF}} = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AF^2}{FD^2} = \frac{BF \cdot AF}{FD^2} = 16$$

$$16 \cdot FD \cdot DG =$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 51 \\ \hline 101 \\ 505 \\ \hline 5151 \end{array}$$

$$\frac{CF \cdot FG}{FD^2} = 16$$

$$CF \cdot FG = 16 FD^2 = (4FD)^2$$



$$\frac{S_1}{S} = \frac{a}{b}$$

$$S_1 = \frac{a^2}{b} = S \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{FD}{AF}\right)^2 = \left(\frac{AD-AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BD-AF}{AF}\right)^2 = \left(\frac{BF-2AF}{AF}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{BF}{AF} - 2\right)^2 = \left(\frac{b}{a} - 2\right)^2 = 16$$

$$\frac{b}{a} - 2 = 4$$

$$\frac{b}{a} = 6 \quad a \sin \alpha = \frac{1}{6}$$

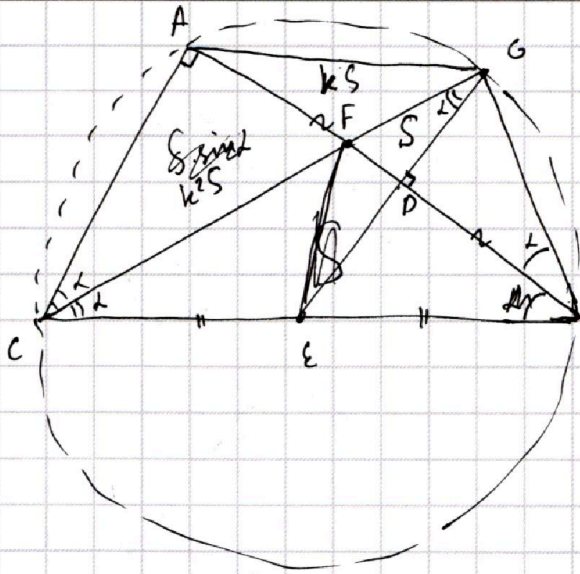
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~РД~~
 $\frac{AF}{FD} = k$

$$\frac{S_{CFB}}{S_{ACF}} = \frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sin(90-2\alpha)}$$

$$\frac{S_{CFB}}{S} = \frac{k^2 S}{\cos^2 2\alpha} = 16$$

$$\frac{k^2}{\cos^2 2\alpha} = 16$$

$$k = \frac{AF}{FD} = \frac{CF}{BF}$$

$$k = \frac{AF}{FD} + 1 - 1 = \frac{AD}{FD} = \frac{BD}{FD} - 1 = \frac{BG \cdot \cos 2\alpha}{FG \cdot \sin 2\alpha} - 1 = \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} - 1 = \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = \frac{\cos 4\alpha}{\sin^2 2\alpha}$$

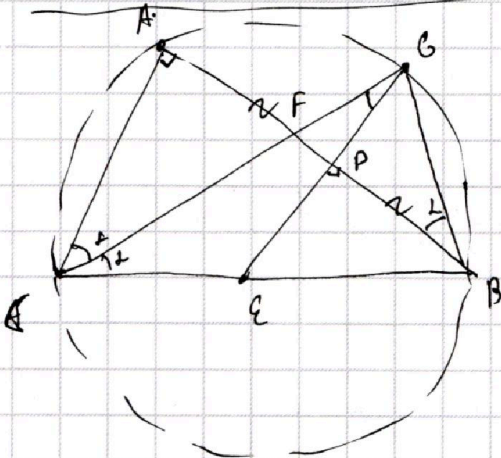
$$\frac{\cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha \cdot \sin^2 2\alpha} = 16$$

$$\cos 2\alpha = 16 \sin^2 2\alpha$$

$$2 \cos^2 2\alpha - 1 = 16 - 16 \cos^2 2\alpha$$

$$18 \cos^2 2\alpha - 17 = 0$$

$$\cos^2 2\alpha =$$



- 1) E-центр окруж.
 2) найдем k

$$\frac{16}{8}$$

$$\frac{AF}{FD} = k = \frac{AF}{FD} + 1 - 1 = \frac{AD}{FD} - 1 = \frac{BD}{FD} - 1 = \cot^2 2\alpha - 1 = \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}$$

3)

$$1 + 4 \cdot 16 \cdot 2 =$$

~~$$\cos$$~~
$$2\alpha = 45$$

cos