



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $5^{360} \cdot 7^{90}$ ?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 25 раз больше площади треугольника  $DGF$ .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = -x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = 2x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 19$ ,  $XY = 36$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

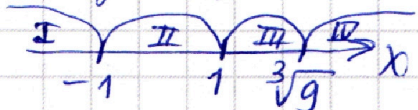
№1.

$$|x^3-9| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$$

$$\begin{cases} |x^3-9| + |x^2-1| \leq x^3-x^2-8 & \textcircled{1} \\ x^3-x^2-8 \geq 0 \\ |x^3-9| + |x^2-1| \leq -(x^3-x^2-8) & \textcircled{2} \\ x^3-x^2-8 < 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} |x^3-9| + |x^2-1| \leq x^3-x^2-8 \\ x^3-x^2-8 \geq 0 \text{ ОДЗ} \end{cases}$$

Найдем корни  $x^3=9 \Rightarrow x=\sqrt[3]{9}$   $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$



I обл-ть  $x \in (-\infty; -1]$

$$-x^3+9 + x^2-1 \leq x^3-x^2-8$$

$$2x^3-2x^2-16 \geq 0$$

$$x^3-x^2-8 \geq 0$$

ОДЗ упр.  $\Rightarrow$  решаем

сл. все область  $x \in (-\infty; -1]$

II обл-ть  $x \in (-1; 1)$

$$-x^3+9 = x^2+1 \leq x^3-x^2-8$$

$$2x^3-18 \geq 0$$

$$x^3 \geq 9 \Rightarrow x \geq \sqrt[3]{9}$$

-не удовл. промежутку  
 $\Rightarrow \emptyset$

III обл-ть;  $x \in [1; \sqrt[3]{9}]$

$$-x^3+9 + x^2-1 \leq x^3-x^2-8$$

$$2x^3-2x^2-16 \geq 0$$

$$x^3-x^2-8 \geq 0$$

удовл. ОДЗ  $\Rightarrow$  решаем

сл. все область  $x \in [1; \sqrt[3]{9}]$

IV обл-ть;  $x \in (\sqrt[3]{9}; +\infty)$

$$x^3-9 + x^2-1 \leq x^3-x^2-8$$

$$2x^2-2 \leq 0$$

$$x^2-1 \leq 0$$

$$x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1; 1]$$

это не упр. промежутку  
 $\Rightarrow \emptyset$

Т.е. в  $\textcircled{1}$  случае  $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$

продолжите задание на  
след. странице  
 $\rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad |x^3-9| + |x^2-1| \leq -(x^3-x^2-8)$$

$$x^3-x^2-8 < 0 \quad (\text{ОЗЗ})$$

Найдем корни:  $x^3=9 \Rightarrow x=\sqrt[3]{9}$ ,  $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$$\begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ -1 & 1 & \sqrt[3]{9} & \rightarrow x \end{array}$$

I обл-ть:  $x \in (-\infty; -1]$

$$-x^3+9+x^2-1 \leq -x^3+x^2+8$$
$$8 \leq 8$$

$x$ -любое ОЗЗ ур.

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1]$$

II обл-ть:  $x \in (-1; 1)$

$$-x^3+9-x^2+1 \leq -x^3+x^2+8$$
$$2x^2-2 \geq 0$$
$$x^2 \geq 1$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

не удовл. рассматриваемому промежутку  $\Rightarrow \emptyset$

III обл-ть:  $x \in [1; \sqrt[3]{9}]$

$$-x^3+9+x^2-1 \leq -x^3+x^2+8$$
$$8 \leq 8$$

$x$ -любое ОЗЗ ур.  $\Rightarrow$

$$x \in [1; \sqrt[3]{9}]$$

IV обл-ть:  $x \in (\sqrt[3]{9}; +\infty)$

$$x^3+9+x^2-1 \leq -x^3+x^2+8$$

$$2x^3-18 \leq 0$$

$$x^3 \leq 9 \quad x \leq \sqrt[3]{9}$$

не ур. промежутку

$\Rightarrow \emptyset$

$$\text{Итого в } \textcircled{2} \text{ случае } x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

Тогда решим ~~то~~ пер-ва:

$$|x^3-9| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

$a, b, c \in \mathbb{N}$  т.к.  $a, b, c$  ариф. геом. последовательности, то

$$a, b = a \cdot q, c = a \cdot q^2 \Rightarrow a \cdot b \cdot c = a^3 \cdot q^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$$

$$(a \cdot q)^3 = (5^{120} \cdot 7^{30})^3 \rightarrow a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

Если " $a$ " состоит только из " $5$ ", то " $a$ " может быть равно:

$$5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 120 \rightarrow \text{120 вариантов}$$

только из " $7$ ":

$$7 \cdot 1, 7 \cdot 2, \dots, 7 \cdot 30 \rightarrow \text{30 вариантов}$$

из  $7$  и  $5$ : это варианты выбрать один из 120 вар-ов и из 30 в-ов, т.е.  $120 \cdot 30$  вар-ов

и еще остался случай, когда  $a = 1$

$$\Rightarrow \text{всего вар-ов: } 120 + 30 + 120 \cdot 30 + 1 = 3751$$

Ответ: 3751

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$(x; y) \in \mathbb{Z}$$

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 - 22 \cdot 34y + 34^2 -$$

$$-4(y-12)(32y-101) = 121y^2 - 748y + 1156 - (128y^2 - 404y - 384y +$$
$$+ 1212) = -7y^2 - 748y + 788y + 1156 - 1212 =$$
$$= -7y^2 + 40y - 56$$

$$x_1 = \frac{11y-34 + \sqrt{-7y^2+40y-56}}{2(y-3)}$$

$$x_2 = \frac{11y-34 - \sqrt{-7y^2+40y-56}}{2(y-3)}$$

---

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$$

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 + xy - 2x = 0$$

$$x^2(y-3) - 12x(y-3) + 32y - 3x + xy - 101 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

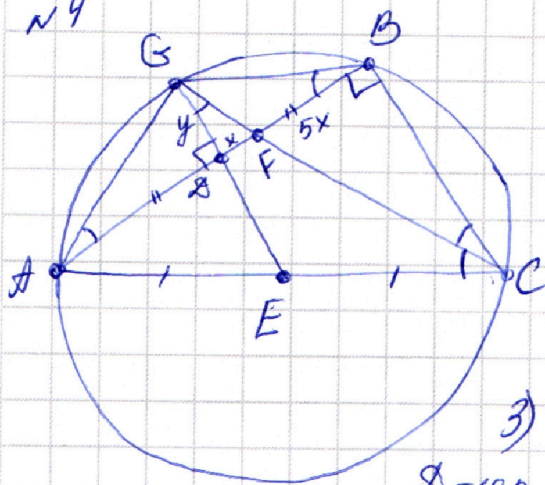
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4



1) Соединим  $AG$  - отрезок и  $GB$

2) Заметим, что  $\angle BVA = \angle BCA$ ,  
т.к. опир. на одну дугу  $AB$ ,  
аналогично  $\angle GAB = \angle GCB$  -  
опир. на  $BG$

т.к.  $\angle FDB \Rightarrow \angle GCB = \angle BCA \Rightarrow \angle GAB = \angle GBA$

3)  $\triangle AGB$  - р.б., т.к.  $\angle GAB = \angle GBA$

$D$  - сер  $AB \Rightarrow GD$  - шер и высота

(по св-ву р/б треуго.)

4)  $DE \parallel BC$ , т.к.  $D$  - сер  $AB$  и  $E$  - сер  $AC$   $DE$  - ср. линия

$\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$ , т.к.  $\angle ADB = \angle ABC$ , как НЛУ

т.е.  $\triangle ABC$  - прямоугол.

5) Пар-ли  $\triangle GFD$  и  $\triangle CFB$ ;  $\angle GFD = \angle CFB$  - вертик.

$\angle GDF = \angle CBF = 90^\circ$  (гол-ко-раше)  $\Rightarrow \triangle GFD \sim \triangle CFB$  по  
двум ост. равным углам

$\Rightarrow$  верно  $\frac{BF}{DF} = k$ , где  $k = \sqrt{25}$ , т.к.  $\frac{S_{CBF}}{S_{GDF}} = 25 = k^2$

$\Rightarrow BF = 5DF$ , пусть  $DF = x$ , тогда  $BF = 5x$

$\Rightarrow DB = AD = x + 5x = 6x$  т

6)  $ED \parallel BC \Rightarrow$  при секущей  $GC$   $\angle EGC = \angle GCB$ , как НЛУ

7) Пар-ли  $\triangle AGF$ :  $\angle GFA = 90 - \angle DGF$  (в  $\triangle GDF$ ), а  
 $\angle GAF + \angle GFA = 90^\circ$ , т.к.  $\angle GAF = \angle DGF$

$\Rightarrow \angle AGF = 90^\circ$  - прямоугол.  $\triangle AGF$

Тогда по св-ву высоты в пр. треуго.  $GD^2 = AD \cdot DF$

$GD^2 = x \cdot 6x = 6x^2$ , пусть  $GD = y \Rightarrow y = \sqrt{6}x$

8)  $\frac{DG}{BC} = \frac{1}{5}$  (из подобия)  $\Rightarrow BC = 5y$

9) Пар-ли  $\triangle ABC$ :

$\text{tg } \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{5y}{12x} = \frac{5 \cdot \sqrt{6}x}{12x} = \frac{5\sqrt{6}}{12} \Rightarrow A = \arctg \frac{5\sqrt{6}}{12}$

$\text{tg } C = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{5\sqrt{6}} \Rightarrow C = \arctg \frac{12}{5\sqrt{6}}$

Ответ:  $\angle B = 90^\circ$   
 $A = \arctg \frac{5\sqrt{6}}{12}$ ,  $C = \arctg \frac{12}{5\sqrt{6}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

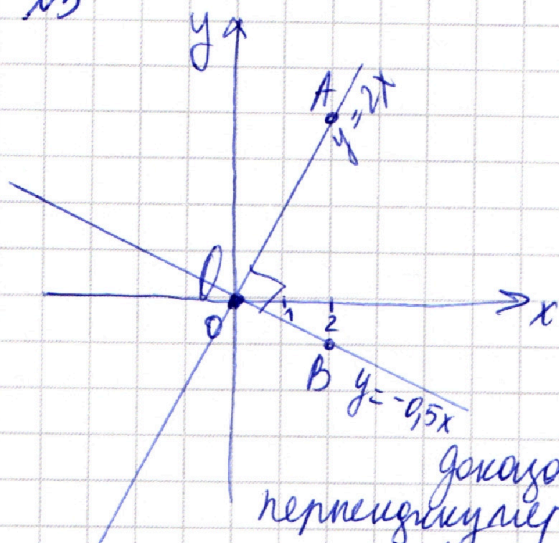
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5



Вдоль из диаг. квадрата по условию летит на прямой  $y = 2x$ , причем центр в нач. координат

Вдоль по св-ву квадрата вторая диаг. перпендикулярна первой и летит на прямой  $y = -0,5x$ , нетрудно доказать, что прямые  $y = 2x$  и  $y = -0,5x$  перпендикулярны.

$y = 2x$  проходит 2/3 точки  $O(0;0)$  и  $A(2;4)$   
 $OA = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$y = -0,5x$  проходит 2/3  $O(0;0)$  и  $B(2;-1)$

$OB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$   $AB$  ~~измер~~  $= 5$

$OA^2 + OB^2 = 4 \cdot 5 + 5 = 25$ ,  $AB^2 = 25 \Rightarrow$  покр. т. Пиф.

$OA \perp OB \Rightarrow y = -0,5x \perp y = 2x$ , т.е. вторая диаг. летит на прямую  $y = -0,5x$

1) Рас-м точки пер-ии с  $y = -x^5 + ax$   $y = 2x$   
 $2x = -x^5 + ax$   $x^5 + (2-a)x = 0$   $x(x^4 + (2-a)) = 0$   
 $x = 0$  и  $x = \pm \sqrt[4]{-(2-a)}$   $= \pm \sqrt[4]{a-2}$ , где коорд. двух противоположных вершин  
 $x = 0$  - коорд. центра.  
 $x_1 = \sqrt[4]{a-2}$   $x_2 = -\sqrt[4]{a-2}$

$y = -x^5 + ax$  имеет вид нех. функции, т.к.  $f(-x) = -f(x)$   
 $f(-x) = x^5 - ax$ ,  $-f(x) = x^5 - ax$

2) Аналогично предположим для  $y = -x^5 + ax$  и  $y = -0,5x$   
 $-x^5 + ax = -0,5x$   
 $x^5 - (a+0,5)x = 0 \Rightarrow x = 0$   
 $x(x^4 - (a+0,5)) = 0$   $x = \pm \sqrt[4]{a+0,5}$ , где  $x = 0$  коорд. центра

$\Rightarrow x_3 = \sqrt[4]{a+0,5}$ ,  $x_4 = -\sqrt[4]{a+0,5}$

3) Диагонали квадрата точкой пересечения делятся

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



попытаем  $\Rightarrow$  лучше доказать, что средние диаг.  
равны (мет. на разных углах)

$$x_1 = \sqrt[4]{a-2} \quad x_2 = -\sqrt[4]{a-2}$$

$$x_3 = \sqrt[4]{a+0,5} \quad x_4 = -\sqrt[4]{a+0,5}$$

$$y_1 = 2 \cdot \sqrt[4]{a-2} \quad (\text{прямая } y=2x)$$

$$y_3 = -0,5 \sqrt[4]{a+0,5} \quad (\text{прямая } y=-0,5x)$$

$$y_2 = -2 \sqrt[4]{a-2}$$

$$y_4 = 0,5 \sqrt[4]{a+0,5}$$

$$(x_0; y_0) = (0; 0)$$

Найдем длины отрезков:  $\frac{1}{2} \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}$ , где  $T_1$  - точка  $(x_1; y_1)$

$$\textcircled{1} \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} = \sqrt{a-2 + 4a-2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{a-2}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{0,25 \cdot \sqrt[4]{a+0,5} + \sqrt[4]{a+0,5}} = \sqrt{1,25} \cdot \sqrt[4]{a+0,5}$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{a-2} = \sqrt{1,25} \cdot \sqrt[4]{a+0,5} \quad \text{возведем обе части в квадрат}$$

$$4 \cdot \sqrt[4]{a-2} = 1,25 \cdot \sqrt[4]{a+0,5} \quad \text{возв. обе части в квадрат:}$$

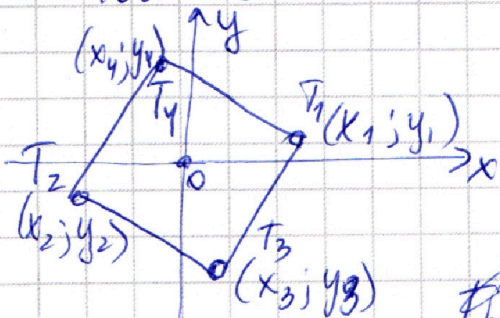
$$16(a-2) = (a+0,5)$$

$$16a - 32 = a + 0,5$$

$$\Rightarrow 15a = 32,5$$

$$a = \frac{32,5}{15} = \frac{65}{30} = \frac{13}{6}$$

ОДЗ:  $a \geq 2$



Найдем длину стороны;

это длина отрезка  $T_1T_3$  (т.к. это соседние верш.)

$$T_1T_3 = \sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2} =$$

Найдем длину стороны по г. Пифагора  
это сумма квадратов половин диаг. и взет из этой суммы  
корень  $\Rightarrow$  длина стороны:  $\sqrt{2(\sqrt[4]{a-2} \cdot \sqrt{5})^2} =$

$$= \sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{a-2} \cdot 5} = \sqrt{10 \cdot \sqrt[4]{a-2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}} \quad \text{Ответ: } a = \frac{13}{6}$$

сторона  $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6,  $a, b, c$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} \quad | \cdot bc \Rightarrow abc + 7c = b^2c + 7b \quad (1)$$

$$a + \frac{7}{b} = c + \frac{7}{a} \quad | \cdot ab \Rightarrow a^2b + 7a = abc + 7b \quad (2)$$

$$b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \quad | \cdot ac \Rightarrow abc + 7a = a^2c + 7c \quad (3)$$

$$\begin{cases} abc = b^2c + 7b - 7c \\ abc = a^2b + 7a - 7b \\ abc = a^2c + 7c - 7a \end{cases} \quad 3abc = b^2c + a^2b + ac^2$$

$$abc = \frac{b^2c + a^2b + ac^2}{3} \Rightarrow \max(abc) = \max\left(\frac{b^2c + a^2b + ac^2}{3}\right)$$

~~Докажем, что  $(a, b, c)$  либо все положительные, либо все отрицательные. Вспомогательные  
Будет пусть  $a < 0, b < 0, c > 0$ , тогда  $a + \frac{7}{b} < 0$   
 $b + \frac{7}{c} > 0$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

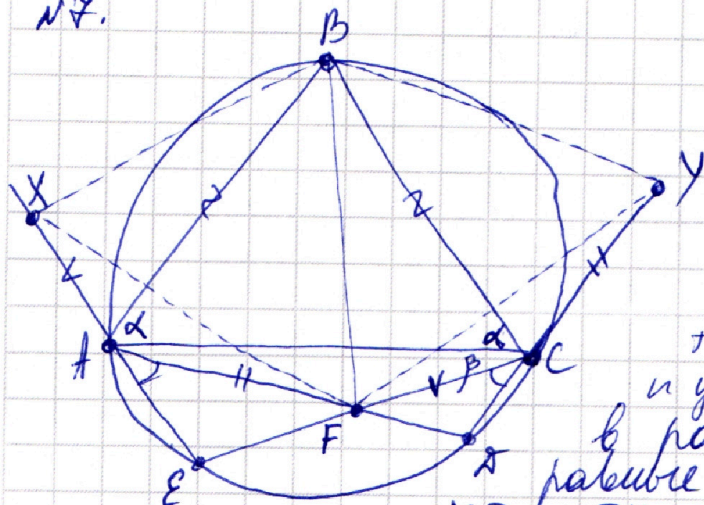
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7.



1)  $AX$  и  $CY$  - в  $\triangle AXF$  и  $\triangle CYF$ :  
 $AX = CY$  по усл.;  $AF = CY$ ,  
 $\angle XAF = \angle YCF$ , т.к. опир.  
 на одну дугу  $\overset{\frown}{AE}$   
 $\Rightarrow$  стороны с ними равны,  
 т.е.  $\angle XAF = \angle YCF$   
 т.е.  $\triangle AXF = \triangle CYF$  по двум стор.

и углу между ними.  
 в равных треугольниках  
 равные элементы равны  $\Rightarrow$   
 $XF = FY$

2) Пусть  $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ ,  $\angle ACE = \beta$   
 Тогда соотв. дуги:  $\overset{\frown}{AB} = 2\alpha$ ,  $\overset{\frown}{BC} = 2\alpha$ ,  $\overset{\frown}{AE} = 2\beta$

$\Rightarrow \overset{\frown}{EC} = 360^\circ - \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AE} = 360^\circ - 4\alpha - 2\beta \Rightarrow$   
 $\angle EAC = 180^\circ - 2\alpha - \beta$  т.к. впис. угол равен половине  
 дуги, на к-р. опирается

Тогда  $\angle XAB = 180^\circ - \angle BAC - \angle CAE = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha - \beta) =$   
 $= 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 2\alpha + \beta = \alpha + \beta$

3)  $AX$  и  $CY$  - в  $\triangle XBA$  и  $\triangle FBC$ :  $XA = FC$  по усл.,  $AB = BC$ , т.к.  
 по усл.  $\triangle ABC$  - р-го  
 $\angle XAB = \alpha + \beta = \angle BCF$  (доказано ранее)

$\Rightarrow \triangle XBA = \triangle FBC$  по двум соотв. равным сторонам и углу  
 между ними.  $\Rightarrow \underline{XB = BF}$  т.к. в равн. треуг. соотв. равн.  
 элем. равны.

4) аналогичными симметричными рассуждениями  
 можно доказать, что  $\triangle BAF = \triangle BCY$  откуда следует,  
 что  $BF = BY$

Из (3) и (4) пунктов следует, что  $XB = BF = BY$

$XB = BY$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5)  $XB = BY$  и  $XF = FY \Rightarrow$   $BXYF$  - deltoida  
диаг. deltoida перпендикулярна

6)  $S_{BXYF} = \frac{BF \cdot XY \cdot \sin(\widehat{BF; XY})}{2}$ , где  $\sin(\widehat{BF; XY}) = 1$   
т.к. угол между диаг.  $90^\circ$

$$\Rightarrow S_{BXYF} = \frac{19,36}{2} = 19,18 = 342$$

Ответ:  $S_{BXYF} = 342$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 3yx + 32y - 101 = 0$$
~~$$-y - 2(2x - 3y) + 32 \cdot 2 - 101$$

$$-y - (4x - 6y) + 64 - 101$$

$$-y - 4x + 6y + 64 - 101$$

$$5y - 4x - 37 = 0$$~~

$$xy(x - 11) - 3x^2 + 3yx$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 3yx + 32y - 101 = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) + x - 5 = 0$$

$$x^2(y-3) - 11x(y-3) + x + 32(y-3) - 5 = 0$$

$a < 0, b < 0, c > 0$

$32$	$34$	$34$	$34$	$56$
$12$	$22$	$68$	$1212$	$1156$
$12$	$34$	$102$	$1212$	$1156$
$101$	$34$	$102$	$1212$	$56$
$101$	$34$	$102$	$1212$	
$101$	$34$	$102$	$1212$	
$101$	$34$	$102$	$1212$	

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$$

$$x^2y - 11xy + 32y - 3x^2 + 34x - 101 = 0$$

$$y(x^2 - 11x + 32) + x(-3x + 34) - 101 = 0$$

$$(x-6)^2 \cdot y + y(x-4)$$

$$11y - 34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 - 22 \cdot 34y + 34^2 -$$

$$- (4y - 12)(32y - 101) = 121y^2 - 748y + 34^2 + 788y -$$

$$- 128y^2 + 12 \cdot 101 =$$

$$= -7y^2 + 40y + 156 - 212 - 56 = -7y^2 + 40y - 56 = \frac{1600 - 1568}{32}$$

$$= -7y^2 + 5.8y - 7.8y =$$

$$7y^2 + 40y + 56 = 0 \quad \Delta = 1600 - 28 \cdot 56 = 32$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

$$a + \frac{7}{b} = c + \frac{7}{a} \quad | \cdot ab$$

$$a^2b + 7a = abc + 7b$$

$$b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \quad | \cdot ac \quad abc + 7a = ac^2 + 7c$$

$$abc = a^2b + 7a - 7b \quad 3abc = a^2b + b^2c + c^2a$$

$$abc = b^2c + 7b - 7c \quad 3abc = a \cdot a \cdot b + b \cdot b \cdot c + c \cdot c \cdot a$$

$$abc = ac^2 + 7c - 7a \quad 3abc = a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot a$$

$$a > b > c \quad (a^2, b^2, c^2) \quad (a, b, c)$$

$$3abc = a^2b + b^2c + c^2a \leq a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c$$

$$\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} + \frac{c^2}{c} \geq a + b + c$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{1}, |x^3-9| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$

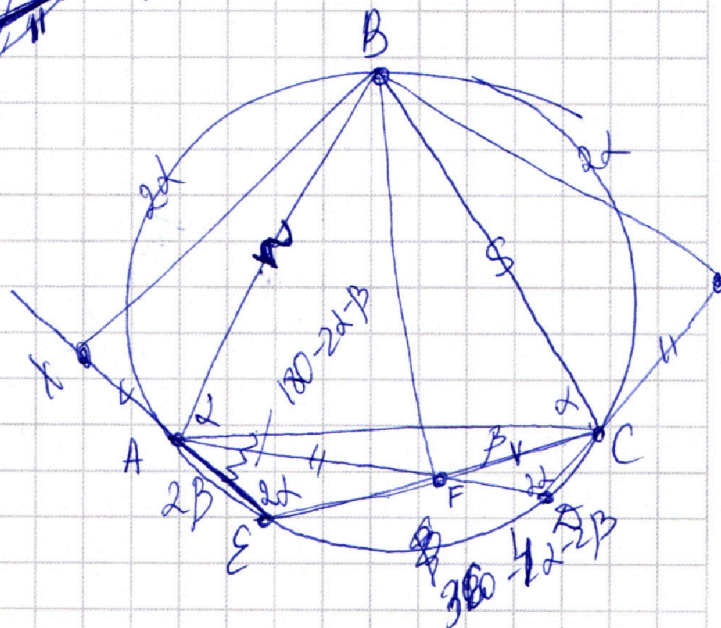
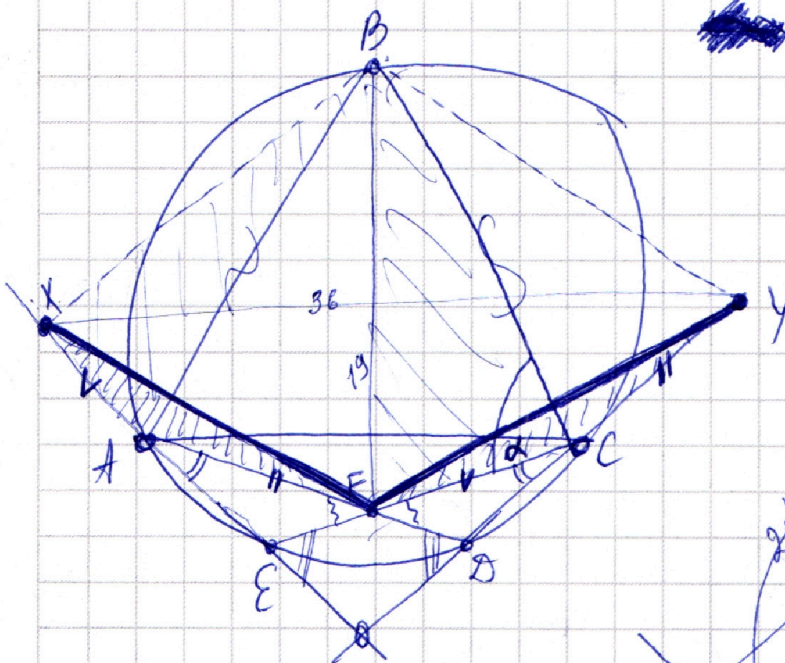
①  $\begin{cases} |x^3-9| + |x^2-1| \leq x^3-x^2-8 \\ x^3-x^2-8 \geq 0 \end{cases}$

②  $\begin{cases} |x^3-9| + |x^2-1| \leq -(x^3-x^2-8) \\ x^3-x^2-8 < 0 \end{cases}$

Расс-м ① случай:

$|x^3-9| + |x^2-1| \leq x^3-x^2-8 \quad x^3-x^2-8 \geq 0$

Найдем корни:  $\begin{matrix} x^2-1=0 & x=\pm 1 \\ x^3-9=0 & x=\pm \sqrt[3]{9} \end{matrix}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} = x$$

Пусть эти равные суммы равны некоторому  $x$

$$c + \frac{7}{a} = x \Rightarrow c = x - \frac{7}{a}$$

$$b + \frac{7}{c} = x \quad b = x - \frac{7}{c} = x - \frac{7}{x - \frac{7}{a}} = x - \frac{7}{\frac{xa - 7}{a}} = x - \frac{7a}{xa - 7}$$

$$a + \frac{7}{b} = x \Rightarrow a = x - \frac{7}{b} = x - \frac{7}{x - \frac{7a}{xa - 7}} =$$

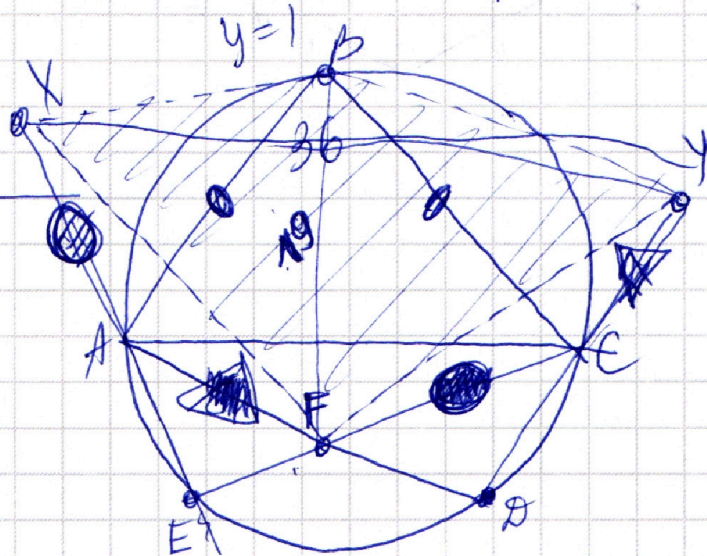
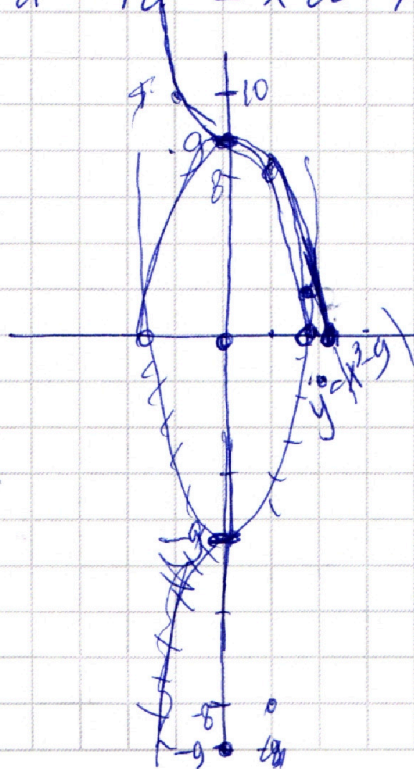
$$= x - \frac{7}{\frac{x^2a - 7x - 7a}{xa - 7}} = x - \frac{7xa - 7 \cdot 7}{x^2a - 7x - 7a}$$

$$a = \frac{x^3a - 7x^2 - 7ax - 7ax + 49}{x^2a - 7x - 7a}$$

$$x^2a^2 - 7ax - 7a^2 = x^3a - 7x^2 - 14ax + 49$$

$$x^2a^2 - 7a^2 = x^3a - 7x^2 - 7ax + 49$$

$$y = |x^3g| \quad \begin{array}{r|l|l|l} x & 0 & 1 & 2 \\ y & 0 & -8 & -1 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

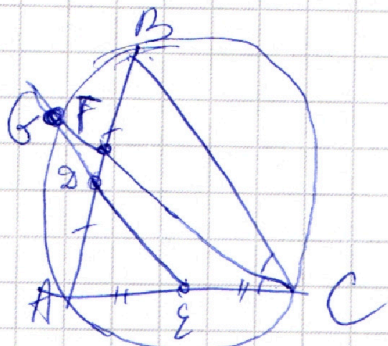
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

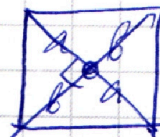
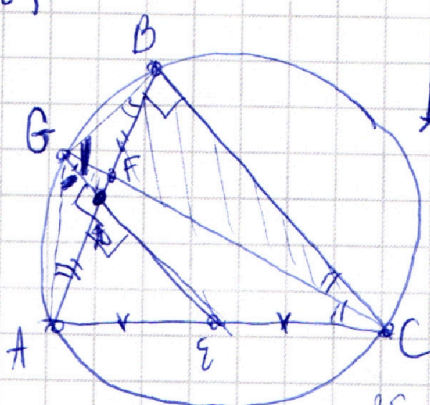


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$



$$S_{EGC} = \frac{1}{2} S_{AGC}$$

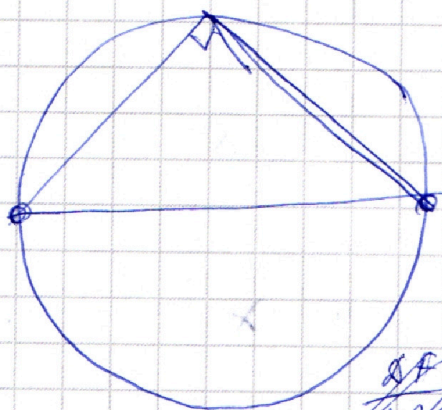


$$\frac{ab}{2} \cdot y = 2ab$$

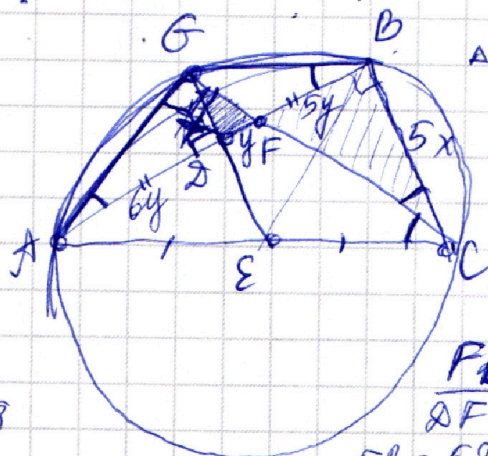
$$\frac{2a \cdot 2b}{2} = \frac{4ab}{2}$$

$$2S_{AGF} = S_{BCF}$$

$$\Delta AGF \sim \Delta BCF$$



$$\frac{AF}{FB} = \frac{1}{3}$$



$$\frac{FB}{BF} = 5$$

$$FB = 5BF$$

$$\Rightarrow AB = AD = FD + FB = 6BF$$

$$x^2 = 6y^2$$

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{6y}$$

$$x^2 = 6y^2$$

$$\frac{6y}{5x} = \tan \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \sqrt{6} \cdot y$$

$$6y \cdot A = \frac{5x}{12y} = \frac{5 \cdot \sqrt{6} \cdot y}{12y} = \frac{294}{12y} = \frac{294}{12} = 24.5$$

$$5 \cdot \sqrt{6} \cdot y \cdot 12y = 294$$

$$144 + 25 \cdot 6 = 294$$

$$\frac{150}{194} = \frac{294}{294}$$

$$\begin{array}{r} 294 \div 2 \\ 147 \div 3 \\ 49 \div 7 \\ 7 \div 7 \\ 1 \end{array}$$

$$\sin \alpha = \frac{5 \cdot \sqrt{6} \cdot y}{7 \cdot \sqrt{6} \cdot y}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{7\sqrt{6}}$$

$$\frac{\frac{2}{x} - x}{\frac{1}{x} - x} - x = 9$$

$$\frac{2}{x} - x = 9$$

$$\frac{2}{x} - x = 9$$

$$\frac{2}{x} - x = 9$$

$$\frac{2}{x} - x = 9$$

$$x = \frac{2}{9} + 7 = \frac{62}{9} = 6\frac{8}{9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c$      $a, a \cdot q, a \cdot q^2$   
 $\Rightarrow (aq)^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$

$abc = a^3 \cdot q^3 = (aq)^3$

$\frac{49}{bc} + ab +$

$(a + \frac{7}{b})(b + \frac{7}{c}) = 7 + \frac{49}{bc}$

$(x^2 - 7)a^2 + 9ax$

$-y/x = +x^5 \Rightarrow ax$

$$\begin{array}{r} 3600 \\ 150 \\ 1 \\ \hline 3751 \end{array}$$

$2a + 2^5$

$$\begin{array}{r} 79 \\ 18 \\ \hline 152 \\ 19 \\ \hline 342 \end{array}$$

$y = -x^5 + 2x^5$

т.к. гранич. перпенд.

$y = 2x$

$y = kx$

$0 = 0 + b = b = 0$

$-1 = 2k \quad k = -0,5$

$\Rightarrow y = -0,5x$

$18 - x - x^2 = 11 - x^2 + 10 - x^2$

$y(x) = x^5 - ax$

$(ab + \frac{7a}{c} + 7 + \frac{49}{bc})(c + \frac{7}{a}) = abc + 7a + 7c + \frac{49}{b} + 7b + \frac{49}{c} + 7c + \frac{49}{b}$

$$\begin{aligned} & (101 - 3x)(324 - 101) = 0 \\ & (114 - 34)^2 - 4(14 - 3)(324 - 101) = 0 \\ & 1214^2 - 22 \cdot 344 + 34^2 - (14 - 3)(324 - 101) = 0 \\ & 1214^2 - 22 \cdot 344 + 34^2 - 11(14 - 3)(324 - 101) = 0 \\ & 1214^2 - 22 \cdot 344 + 34^2 - 11(14 - 3)(324 - 101) = 0 \end{aligned}$$