



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

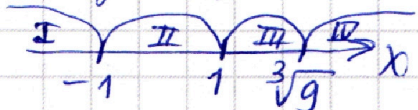
№1.

$$|x^3-9| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$$

$$\begin{cases} |x^3-9| + |x^2-1| \leq x^3-x^2-8 & \textcircled{1} \\ x^3-x^2-8 \geq 0 \\ |x^3-9| + |x^2-1| \leq -(x^3-x^2-8) & \textcircled{2} \\ x^3-x^2-8 < 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} |x^3-9| + |x^2-1| \leq x^3-x^2-8 \\ x^3-x^2-8 \geq 0 \text{ ОДЗ} \end{cases}$$

Найдем корни $x^3=9 \Rightarrow x=\sqrt[3]{9}$ $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$



I обл-ть $x \in (-\infty; -1]$

$$-x^3+9 + x^2-1 \leq x^3-x^2-8$$

$$2x^3-2x^2-16 \geq 0$$

$$x^3-x^2-8 \geq 0$$

ОДЗ упр. \Rightarrow решаем

сл. все область $x \in (-\infty; -1]$

II обл-ть $x \in (-1; 1)$

$$-x^3+9 = x^2+1 \leq x^3-x^2-8$$

$$2x^3-18 \geq 0$$

$$x^3 \geq 9 \Rightarrow x \geq \sqrt[3]{9}$$

-не удовл. промежутку
 $\Rightarrow \emptyset$

III обл-ть; $x \in [1; \sqrt[3]{9}]$

$$-x^3+9 + x^2-1 \leq x^3-x^2-8$$

$$2x^3-2x^2-16 \geq 0$$

$$x^3-x^2-8 \geq 0$$

удовл. ОДЗ \Rightarrow решаем

сл. все область $x \in [1; \sqrt[3]{9}]$

IV обл-ть; $x \in (\sqrt[3]{9}; +\infty)$

$$x^3-9 + x^2-1 \leq x^3-x^2-8$$

$$2x^2-2 \leq 0$$

$$x^2-1 \leq 0$$

$$x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1; 1]$$

это не упр. промежутку
 $\Rightarrow \emptyset$

Т.е. в $\textcircled{1}$ случае $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$

продолжите задание на
след. странице
 \rightarrow

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad |x^3-9| + |x^2-1| \leq -(x^3-x^2-8)$$

$$x^3-x^2-8 < 0 \quad (\text{ОЗЗ})$$

Найдем корни: $x^3=9 \Rightarrow x=\sqrt[3]{9}$, $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$$\begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ -1 & 1 & \sqrt[3]{9} & \rightarrow x \end{array}$$

I обл-ть: $x \in (-\infty; -1]$

$$-x^3+9+x^2-1 \leq -x^3+x^2+8$$
$$8 \leq 8$$

x -любое ОЗЗ ур.

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1]$$

II обл-ть: $x \in (-1; 1)$

$$-x^3+9-x^2+1 \leq -x^3+x^2+8$$
$$2x^2-2 \geq 0$$
$$x^2 \geq 1$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

не удовл. рассматриваемому промежутку $\Rightarrow \emptyset$

III обл-ть: $x \in [1; \sqrt[3]{9}]$

$$-x^3+9+x^2-1 \leq -x^3+x^2+8$$
$$8 \leq 8$$

x -любое ОЗЗ ур. \Rightarrow

$$x \in [1; \sqrt[3]{9}]$$

IV обл-ть: $x \in (\sqrt[3]{9}; +\infty)$

$$x^3+9+x^2-1 \leq -x^3+x^2+8$$
$$2x^3-18 \leq 0$$

$$x^3 \leq 9 \quad x \leq \sqrt[3]{9}$$

не ур. промежутку

$\Rightarrow \emptyset$

$$\text{Итого в } \textcircled{2} \text{ случае } x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

Тогда решим ~~то~~ пер-ва:

$$|x^3-9| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

$a, b, c \in \mathbb{N}$ т.к. a, b, c ариф. геом. последовательности, то

$$a, b = a \cdot q, c = a \cdot q^2 \Rightarrow a \cdot b \cdot c = a^3 \cdot q^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$$

$$(a \cdot q)^3 = (5^{120} \cdot 7^{30})^3 \rightarrow a \cdot q = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

Если "a" состоит только из "5", то "a" может быть равно:

$$5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 120 \rightarrow \text{120 вариантов}$$

только из "7":

$$7 \cdot 1, 7 \cdot 2, \dots, 7 \cdot 30 \rightarrow \text{30 вариантов}$$

из 7 и 5: это варианты выбрать один из 120 вар-ов и из 30 в-ов, т.е. $120 \cdot 30$ вар-ов

и еще остался случай, когда $a = 1$

$$\Rightarrow \text{всего вар-ов: } 120 + 30 + 120 \cdot 30 + 1 = 3751$$

Ответ: 3751

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$(x; y) \in \mathbb{Z}$$

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 - 22 \cdot 34y + 34^2 -$$

$$- (4y-12)(32y-101) = 121y^2 - 748y + 1156 - (128y^2 - 404y - 384y + 1212) = -7y^2 - 748y + 788y + 1156 - 1212 =$$
$$= -7y^2 + 40y - 56$$

$$x_1 = \frac{11y-34 + \sqrt{-7y^2+40y-56}}{2(y-3)}$$

$$x_2 = \frac{11y-34 - \sqrt{-7y^2+40y-56}}{2(y-3)}$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$$

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 + xy - 2x = 0$$

$$x^2(y-3) - 12x(y-3) + 32y - 3x + xy - 101 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

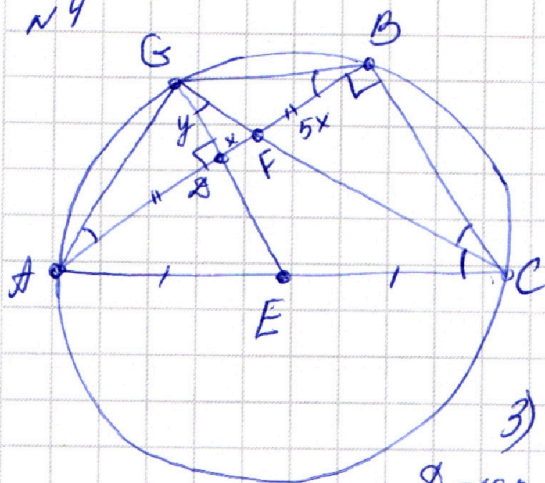
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4



1) Соединим AG - отрезок и GB

2) Заметим, что $\angle BVA = \angle BCA$, т.к. опир. на одну дугу AB , аналогично $\angle GAB = \angle GCB$ - опир. на GB

т.к. $\angle FDB \Rightarrow \angle GCB = \angle BCA \Rightarrow \angle GAB = \angle GBA$

3) $\triangle AGB$ - рб, т.к. $\angle GAB = \angle GBA$

D - сер $AB \Rightarrow GD$ - шер и высота

(по св-ву р/б треуго.)

4) $DE \parallel AC$, т.к. D - сер AB и E - сер AC DE - ср. линия

$\Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$, т.к. $\angle ADB = \angle ABC$, как НЛУ

т.е. $\triangle ABC$ - прямоугол.

5) Пар-ли $\triangle GFD$ и $\triangle CFB$; $\angle GFD = \angle CFB$ - вертик.

$\angle GDF = \angle CBF = 90^\circ$ (гол-ко-раше) $\Rightarrow \triangle GFD \sim \triangle CFB$ по двум ост. равным углам

\Rightarrow верно $\frac{BF}{DF} = k$, где $k = \sqrt{25}$, т.к. $\frac{S_{CBF}}{S_{GDF}} = 25 = k^2$

$\Rightarrow BF = 5DF$, пусть $DF = x$, тогда $BF = 5x$

$\Rightarrow DB = AD = x + 5x = 6x$ т

6) $ED \parallel BC \Rightarrow$ при секущей GC $\angle EGC = \angle GCB$, как НЛУ

7) Пар-ли $\triangle AGF$: $\angle GFA = 90 - \angle DGF$ (в $\triangle GDF$), а $\angle GAF + \angle GFA = 90^\circ$, т.к. $\angle GAF = \angle DGF$

$\Rightarrow \angle AGF = 90^\circ$ - прямоугол. $\triangle AGF$

Тогда по св-ву высоты в пр. треуго. $GD^2 = AD \cdot DF$

$GD^2 = x \cdot 6x = 6x^2$, пусть $GD = y \Rightarrow y = \sqrt{6}x$

8) $\frac{DG}{BC} = \frac{1}{5}$ (из подобия) $\Rightarrow BC = 5y$

9) Пар-ли $\triangle ABC$:

$\text{tg } \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{5y}{12x} = \frac{5 \cdot \sqrt{6}x}{12x} = \frac{5\sqrt{6}}{12} \Rightarrow A = \arctg \frac{5\sqrt{6}}{12}$

$\text{tg } \angle C = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{5\sqrt{6}} \Rightarrow C = \arctg \frac{12}{5\sqrt{6}}$

Обс.: $\angle B = 90^\circ$
 $A = \arctg \frac{5\sqrt{6}}{12}$, $C = \arctg \frac{12}{5\sqrt{6}}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

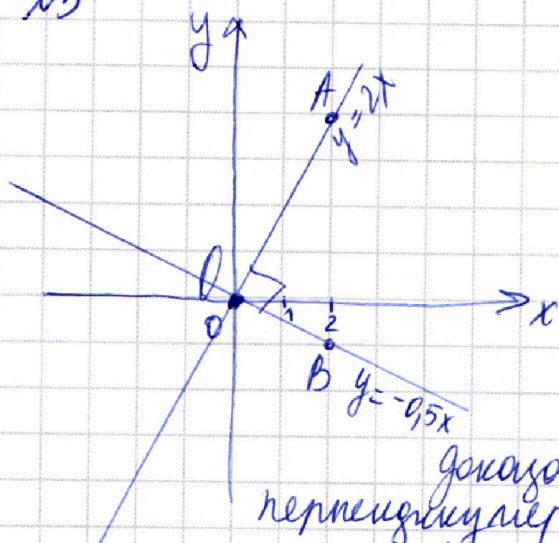
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5



Вдоль из диаг. квадрата по условию летит на прямой $y = 2x$, причем центр в нач. координат

Вдоль по св-ву квадрата вторая диаг. перпендикулярна первой и летит на прямой $y = -0,5x$, нетрудно доказать, что прямые $y = 2x$ и $y = -0,5x$ перпендикулярны.

$y = 2x$ проходит 2/3 точки $O(0;0)$ и $A(2;4)$
 $OA = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$y = -0,5x$ проходит 2/3 $O(0;0)$ и $B(2;-1)$

$OB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ AB ~~измер~~ $= 5$

$OA^2 + OB^2 = 4 \cdot 5 + 5 = 25$, $AB^2 = 25 \Rightarrow$ покр. т. Пиф.

$OA \perp OB \Rightarrow y = -0,5x \perp y = 2x$, т.е. вторая диаг. летит на прямую $y = -0,5x$

1) Рас-м точки пер-ии с $y = -x^5 + ax$ $y = 2x$
 $2x = -x^5 + ax$ $x^5 + (2-a)x = 0$ $x(x^4 + (2-a)) = 0$
 $x = 0$ и $x = \pm \sqrt[4]{-(2-a)}$ $= \pm \sqrt[4]{a-2}$, где коорд. двух противоположных вершин
 $x = 0$ - коорд. центра. $x_1 = \sqrt[4]{a-2}$ $x_2 = -\sqrt[4]{a-2}$

$y = -x^5 + ax$ имеет вид неч. функции, т.к. $f(-x) = -f(x)$
 $f(-x) = x^5 - ax$, $-f(x) = x^5 - ax$

2) Аналогично представим для $y = -x^5 + ax$ и $y = -0,5x$
 $-x^5 + ax = -0,5x$
 $x^5 - (a+0,5)x = 0 \Rightarrow x = 0$
 $x(x^4 - (a+0,5)) = 0$ $x = \pm \sqrt[4]{a+0,5}$, где $x = 0$ коорд. центра

$\Rightarrow x_3 = \sqrt[4]{a+0,5}$, $x_4 = -\sqrt[4]{a+0,5}$

3) Диагонали квадрата точкой пересечения делятся

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



попытаем \Rightarrow лучше доказать, что средние диаг.
равны (мет. на разных углах)

$$x_1 = \sqrt[4]{a-2} \quad x_2 = -\sqrt[4]{a-2}$$

$$x_3 = \sqrt[4]{a+0,5} \quad x_4 = -\sqrt[4]{a+0,5}$$

$$y_1 = 2 \cdot \sqrt[4]{a-2} \quad (\text{прямая } y=2x)$$

$$y_3 = -0,5 \sqrt[4]{a+0,5} \quad (\text{прямая } y=-0,5x)$$

$$y_2 = -2 \sqrt[4]{a-2}$$

$$y_4 = 0,5 \sqrt[4]{a+0,5}$$

$$(x_0; y_0) = (0; 0)$$

Найдем длины отрезков: $\frac{1}{2} \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}$, где T_1 - точка $(x_1; y_1)$

$$\textcircled{1} \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} = \sqrt{a-2 + 4a-2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{a-2}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{0,25 \cdot \sqrt{a+0,5} + \sqrt{a+0,5}} = \sqrt{1,25} \cdot \sqrt[4]{a+0,5}$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{a-2} = \sqrt{1,25} \cdot \sqrt[4]{a+0,5} \quad \text{возведем обе части в квадрат}$$

$$4 \cdot \sqrt[4]{a-2} = 1,25 \cdot \sqrt[4]{a+0,5} \quad \text{возв. обе части в квадрат:}$$

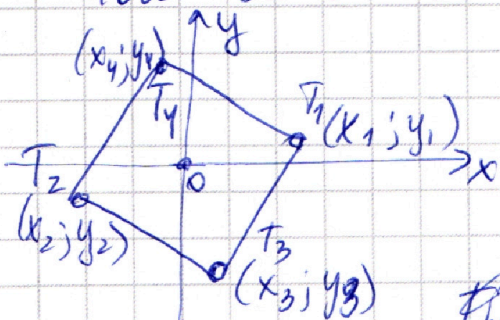
$$16(a-2) = (a+0,5)$$

$$16a - 32 = a + 0,5$$

$$\Rightarrow 15a = 32,5$$

$$a = \frac{32,5}{15} = \frac{65}{30} = \frac{13}{6}$$

ОДЗ: $a \geq 2$



Найдем длину стороны;

это длина отрезка T_1T_3 (т.к. это соседние вершины.)

$$T_1T_3 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2} =$$

Найдем длину стороны по г. Пифагора:
это сумма квадратов половин диаг. и взет из этой суммы
корень \Rightarrow длина стороны: $\sqrt{2(\sqrt[4]{a-2} \cdot \sqrt{5})^2} =$

$$= \sqrt{2 \cdot \sqrt{a-2} \cdot 5} = \sqrt{10 \cdot \sqrt{2 \frac{1}{6} - 2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}} \quad \text{Ответ: } a = \frac{13}{6}$$

сторона $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[4]{6}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6, a, b, c

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} \quad | \cdot bc \Rightarrow abc + 7c = b^2c + 7b \quad (1)$$

$$a + \frac{7}{b} = c + \frac{7}{a} \quad | \cdot ab \Rightarrow a^2b + 7a = abc + 7b \quad (2)$$

$$b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \quad | \cdot ac \Rightarrow abc + 7a = a^2c + 7c \quad (3)$$

$$\begin{cases} abc = b^2c + 7b - 7c \\ abc = a^2b + 7a - 7b \\ abc = a^2c + 7c - 7a \end{cases} \quad 3abc = b^2c + a^2b + ac^2$$

$$abc = \frac{b^2c + a^2b + ac^2}{3} \Rightarrow \max(abc) = \max\left(\frac{b^2c + a^2b + ac^2}{3}\right)$$

~~Докажем, что (a, b, c) — это все положительные, либо все отрицательные. Пусть $a < 0, b < 0, c > 0$, тогда $a + \frac{7}{b} < 0$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 1

 2

 3

 4

 5

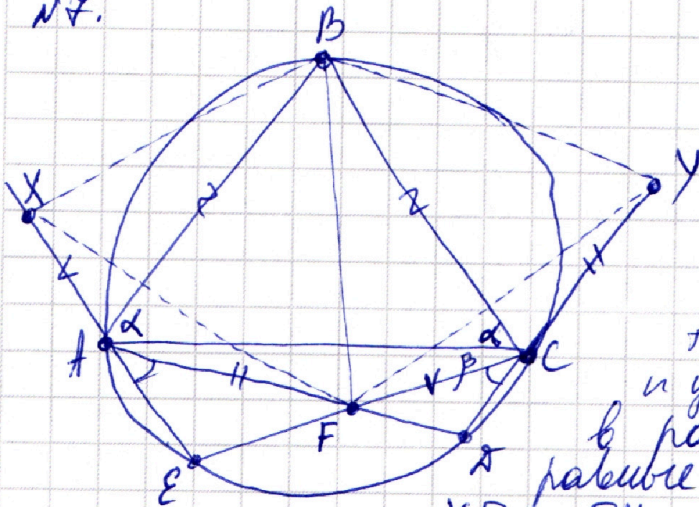
 6

 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7.



1) Рассмотрим $\triangle AXF$ и $\triangle CYF$:

$AX = CY$ по усл.; $AF = CF$,

$\angle XAF = \angle YCF$, т.к. опир.

на одну дугу $\overset{\frown}{AE}$

\Rightarrow стороны с ними равны,

т.е. $\angle XAF = \angle YCF$

т.е. $\triangle AXF = \triangle CYF$ по двум стор.

и углу между ними.

В равных треугольниках

равные элементы равны \Rightarrow

$$\underline{XF = FY}$$

2) Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$, $\angle ACE = \beta$

Тогда соотв. дуги: $\overset{\frown}{AB} = 2\alpha$, $\overset{\frown}{BC} = 2\alpha$, $\overset{\frown}{AE} = 2\beta$

$\Rightarrow \overset{\frown}{EC} = 360^\circ - \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AE} = 360^\circ - 4\alpha - 2\beta \Rightarrow$

$\angle EAC = 180^\circ - 2\alpha - \beta$ т.к. впис. угол равен половине дуги, на к-ю опирается.

Тогда $\angle XAB = 180^\circ - \angle BAC - \angle CAE = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha - \beta) =$
 $= 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 2\alpha + \beta = \alpha + \beta$

3) Рассмотрим $\triangle XBA$ и $\triangle FBC$: $XA = FC$ по усл., $AB = BC$, т.к.

по усл. $\triangle ABC$ - р/б

$\angle XAB = \alpha + \beta = \angle BCF$ (доказано ранее)

$\Rightarrow \triangle XBA = \triangle FBC$ по двум соотв. равным сторонам и углу между ними. $\Rightarrow \underline{XB = BF}$ т.к. в равн. треуг. соотв. равн. элем. равны.

4) аналогичными симметричными рассуждениями можно доказать, что $\triangle BAF = \triangle BCY$ откуда следует, что $\underline{BF = BY}$

Из (3) и (4) пунктов следует, что $XB = BF = BY$

$$\underline{XB = BY}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) $XB = BY$ и $XF = FY \Rightarrow$ $BXYF$ - deltoida
диаг. deltoida перпендикулярны

6) $S_{BXYF} = \frac{BF \cdot XY \cdot \sin(\widehat{BF; XY})}{2}$, где $\sin(\widehat{BF; XY}) = 1$
т.к. угол между диаг. 90°

$$\Rightarrow S_{BXYF} = \frac{19,36}{2} = 19,18 = 342$$

Ответ: $S_{BXYF} = 342$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 3yx + 32y - 101 = 0$$

$$x^2(y-3) - 11x(y-3) + 32(y-3) - 101 = 0$$

$$(x^2 - 11x + 32)(y-3) - 101 = 0$$

$$(x-8)(x-3)(y-3) - 101 = 0$$

$$(x-8)(y-3) = \frac{101}{x-3}$$

$$y-3 = \frac{101}{(x-3)(x-8)}$$

$$y = 3 + \frac{101}{(x-3)(x-8)}$$

$a < 0, b < 0, c > 0$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 12 \\ \hline 202 \\ 101 \\ \hline 1212 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 64 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 34 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 22 \\ \hline 68 \\ 68 \\ \hline 448 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 1212 \\ \hline 1156 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$$

$$x^2y - 11xy + 32y - 3x^2 + 34x - 101 = 0$$

$$x^2y - 12xy + 36y + xy - 4y - 3x^2 + 34x - 101 = 0$$

$$(x-6)^2y + y(x-4)$$

$$(11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 - 22 \cdot 34y + 34^2 -$$

$$- (4y-12)(32y-101) = 121y^2 - 748y + 34^2 + 788y -$$

$$- 128y^2 + 12 \cdot 101 =$$

$$= -7y^2 + 40y + 156 - 212 - 56 = -7y^2 + 40y - 56 = \frac{1600 - 1568}{32}$$

$$= -7y^2 + 5.8y - 7.8y =$$

$$7y^2 + 40y + 56 = 0 \quad \Delta = 1600 - 28 \cdot 56 = 32$$

$$x^2y - 3x^2 - 11xy + 34x + 32y - 101 = 0$$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

$$a + \frac{7}{b} = c + \frac{7}{a} \quad | \cdot ab$$

$$a^2b + 7a = abc + 7b$$

$$b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \quad | \cdot ac \quad abc + 7a = ac^2 + 7c$$

$$abc = a^2b + 7a - 7b \quad 3abc = a^2b + b^2c + c^2a$$

$$abc = b^2c + 7b - 7c \quad 3abc = a \cdot a \cdot b + b \cdot b \cdot c + c \cdot c \cdot a$$

$$abc = ac^2 + 7c - 7a \quad 3abc = a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot a$$

$$a > b > c \quad (a^2, b^2, c^2) \quad (a, b, c)$$

$$3abc = a^2b + b^2c + c^2a \leq a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c$$

$$\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} + \frac{c^2}{c} \geq a + b + c$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{} \perp$, $|x^3-9| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$

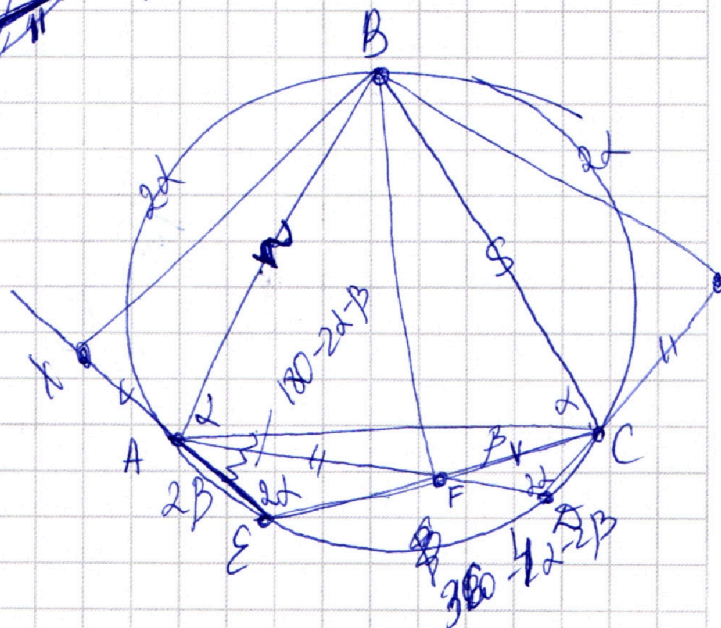
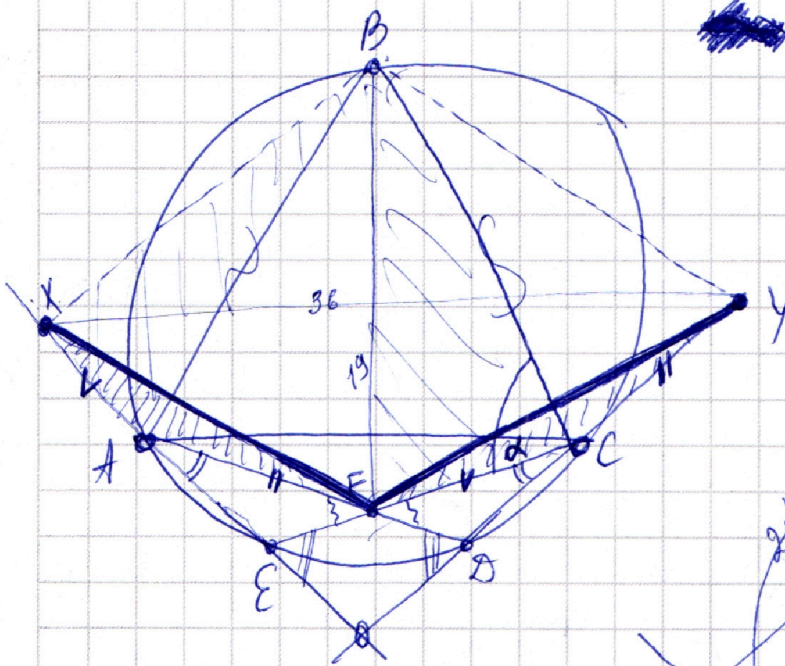
① $\begin{cases} |x^3-9| + |x^2-1| \leq x^3-x^2-8 \\ x^3-x^2-8 \geq 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} |x^3-9| + |x^2-1| \leq -(x^3-x^2-8) \\ x^3-x^2-8 < 0 \end{cases}$

Расс-м ① случай:

$|x^3-9| + |x^2-1| \leq x^3-x^2-8 \quad x^3-x^2-8 \geq 0$

Найдем корни: $x^2-1=0 \quad x=\pm 1$
 $x^3-9=0 \quad x=\pm \sqrt[3]{9}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} = x$$

Пусть эти равные суммы равны некоторому x

$$c + \frac{7}{a} = x \Rightarrow c = x - \frac{7}{a}$$

$$b + \frac{7}{c} = x \quad b = x - \frac{7}{c} = x - \frac{7}{x - \frac{7}{a}} = x - \frac{7}{\frac{xa - 7}{a}} = x - \frac{7a}{xa - 7}$$

$$a + \frac{7}{b} = x \Rightarrow a = x - \frac{7}{b} = x - \frac{7}{x - \frac{7a}{xa - 7}} =$$

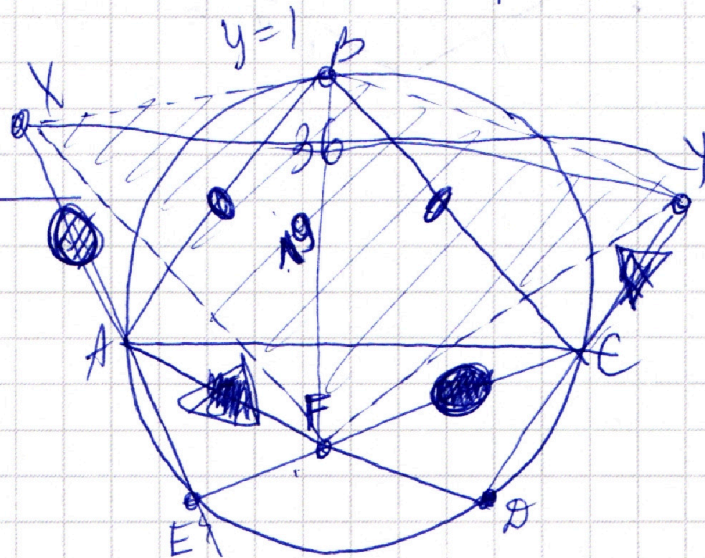
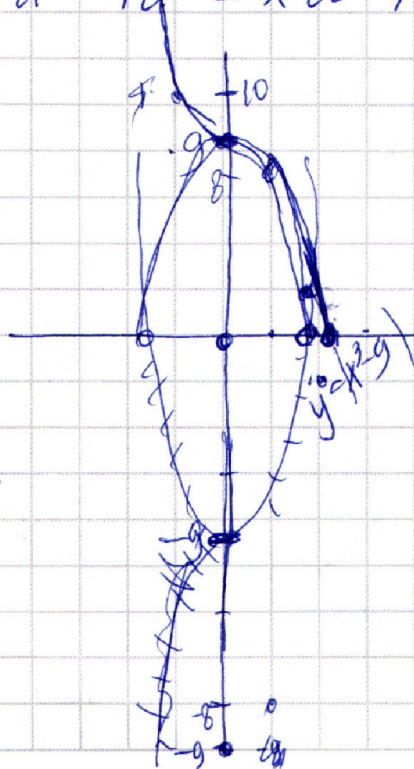
$$= x - \frac{7}{\frac{x^2a - 7x - 7a}{xa - 7}} = x - \frac{7xa - 7 \cdot 7}{x^2a - 7x - 7a}$$

$$a = \frac{x^3a - 7x^2 - 7ax - 7ax + 49}{x^2a - 7x - 7a}$$

$$x^2a^2 - 7ax - 7a^2 = x^3a - 7x^2 - 14ax + 49$$

$$x^2a^2 - 7a^2 = x^3a - 7x^2 - 7ax + 49$$

$$y = |x^3g| \quad \begin{array}{r|l|l|l} x & 0 & 1 & 2 \\ y & 0 & -8 & -1 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

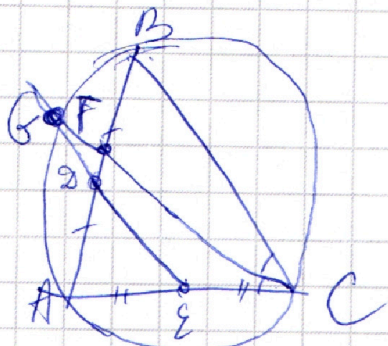
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

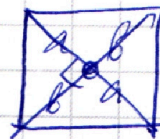
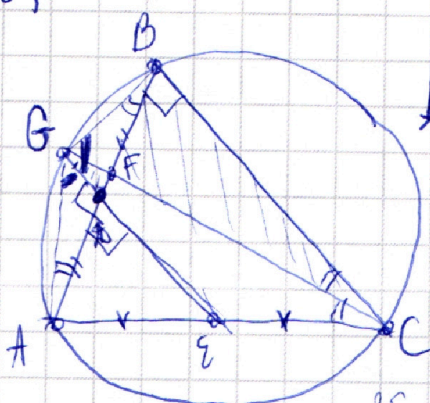


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$



$$S_{EGC} = \frac{1}{2} S_{AGC}$$

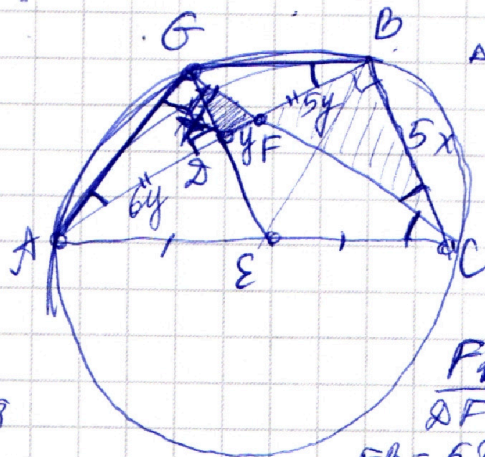
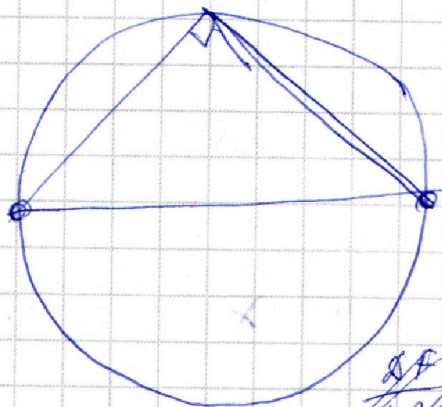


$$\frac{ab}{2} \cdot y = 2ab$$

$$\frac{2a \cdot 2b}{2} = \frac{4ab}{2}$$

$$2S_{AGF} = S_{BCF}$$

$$\Delta AGF \sim \Delta BCF$$



$$\frac{FB}{BF} = 5$$

$$FB = 5BF$$

$$\Rightarrow AB = AD = FD + FB = 6BF$$

$$x^2 = 6y^2$$

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{6y}$$

$$x^2 = 6y^2$$

$$\frac{6y}{5x} = \tan \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \sqrt{6} \cdot y$$

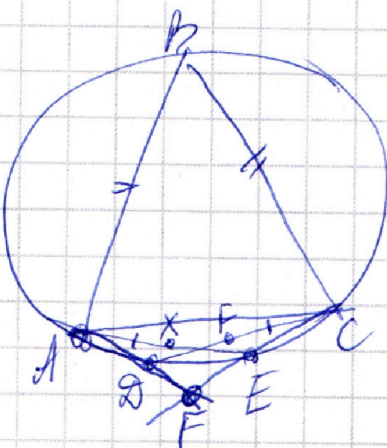
$$6y \cdot A = \frac{5x}{12y} = \frac{5 \cdot \sqrt{6} \cdot y}{12y} = \frac{294}{12y}$$

$$5 \cdot \sqrt{6} \cdot y \cdot 12y = 294$$

$$144 + 25 \cdot 6 = 294$$

$$\frac{150}{294}$$

$$\frac{194}{294}$$



$$\sin \alpha = \frac{5 \cdot \sqrt{6} \cdot y}{7 \cdot \sqrt{6} \cdot y} \quad \cos \alpha = \frac{12}{7\sqrt{6}}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{6}-x}{x-x} - x = 0}{\frac{\sqrt{6}-x}{x-x} - x = 9}$$

$$\frac{\sqrt{6}-x}{x-x} - x = 0 \quad \frac{\sqrt{6}-x}{x-x} - x = 9 \quad \frac{9}{x-x} - x = 0$$

$$a + \frac{9}{x} = b + \frac{9}{x} = c + \frac{9}{x} = x \quad a, b, c$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c $a, a \cdot q, a \cdot q^2$
 $\Rightarrow (aq)^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$

$abc = a^3 \cdot q^3 = (aq)^3$

$\frac{49}{bc} + ab +$

$(a + \frac{7}{b})(b + \frac{7}{c}) = 7 + \frac{49}{bc}$

$(x^2 - 7)a^2 + 9ax$

$-y/x = +x^5 \Rightarrow ax$

$$\begin{array}{r} 3600 \\ 150 \\ 1 \\ \hline 3751 \end{array}$$

$2a + 2^5$

$$\begin{array}{r} 79 \\ 18 \\ \hline 152 \\ 19 \\ \hline 342 \end{array}$$

$y = -x^5 + 2x^5$

т.к. гранич. перпенд.

$y = 2x$

$y = kx$

$0 = 0 + b = b = 0$

$-1 = 2k \quad k = -0,5$

$\Rightarrow y = -0,5x$

$18 - x - x^5 = 11 - x^2 + 10 - x^5$

$y(x) = x^5 - ax$

$(ab + \frac{7a}{c} + 7 + \frac{49}{bc})(c + \frac{7}{a}) = abc + 7a + 7c + \frac{49}{b} + 7b + \frac{49}{c} + 7c + \frac{49}{b}$

$$\begin{aligned} & (101 - 3x)(324 - 101) - 4(114 - 34)^2 - 4(114 - 34)(324 - 101) \\ & = (114 - 34)^2 - 4(114 - 34)(324 - 101) \\ & = 12144 - 22 \cdot 344 + 34^2 - (114 - 12)(324 - 101) \\ & = 12144 - 22 \cdot 344 + 34^2 - 32 \cdot 344 + 32 \cdot 101 \\ & = 12144 - 32 \cdot 344 + 34^2 + 32 \cdot 101 - 101 = 0 \end{aligned}$$