



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 (1)

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

$$|x^3 + 4| + |1 - x^2| \leq |x^3 - x^2 + 5| \quad *$$

Мы знаем, что $|a| + |b| \geq |a + b|$

(знак равенства если a и b одного знака) тогда

$$|x^3 + 4| + |1 - x^2| \geq |x^3 - x^2 + 5|$$

Но ~~по условию~~ из * $|x^3 + 4| + |1 - x^2| \leq |x^3 - x^2 + 5|$,

тогда тогда наше нерав-во име-
ло решение нам тогда тогда

$$|x^3 + 4| + |1 - x^2| = |x^3 - x^2 + 5|, \text{ а это}$$

верно, как говорилось ранее, если

$$\begin{cases} x^3 + 4 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \geq -4 \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt[3]{-4} \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^3 + 4 \leq 0 \\ 1 - x^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \leq -4 \\ (1-x)(1+x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \sqrt[3]{-4} \\ (1-x)(1+x) \leq 0 \end{cases}$$

($x^3 \geq -4 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{-4}$) (и.к. $\sqrt[3]{x}$ определен при всех x)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $\sqrt{1-x^2}$

$\begin{cases} x \geq -\sqrt[3]{4} \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$

$-\sqrt[3]{4} < -1 \quad (\sqrt[3]{4} > 1, 4 > 1)$

$\begin{cases} x \leq -\sqrt[3]{4} \\ (1-x)(1+x) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup \emptyset$

и.е. $\begin{cases} x \geq -\sqrt[3]{4} \\ (1-x)(1+x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$

Ответ: $\emptyset \quad (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2 (1)

Мы знаем, что если a, b, c образуют в указанном порядке арифм. прогрессию, то $ac = b^2$ т.е.

$$abc = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$b^3 \text{ т.е. } b = 2^{50} \cdot 3^{100} \text{ тогда}$$

$$bc = 2^{100} \cdot 3^{200} \text{ и мы знаем}$$

$$\text{что } c = d^2 a \text{ т.е. } d^2 a^2 = 2^{100} \cdot 3^{200} \text{ или}$$

$$da = 2^{50} \cdot 3^{100} \text{ т.е. } c = d \cdot 2^{50} \cdot 3^{100} \text{ и}$$

$$a = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{d} \Rightarrow 1. \text{ тогда } c \text{ было}$$

натуральным d должно быть

натуральным или $d = k^2 \cdot 2^x \cdot 3^y$ где $(k, 2) = 1, (k, 3) = 1$ ($x \geq -50, y \geq -100$)

2. тогда a было натуральным

$$2^{50} \cdot 3^{100} : d \text{ или } d = k^2 \cdot 2^x \cdot 3^y \text{ где } x \leq 50$$

$$y \leq 100, \quad (k, 2) = 1, (k, 3) = 1$$

мы выяснили, что

$$(a, b, c) = (2^{50-x} \cdot 3^{100-y}, 2^{50} \cdot 3^{100}, 2^{50+x} \cdot 3^{400+y})$$

~~и знаем максимум $54 \cdot 10^4$~~
(если $k \neq \pm 1$, то или a или $c \notin \mathbb{N}$)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2(2)

т. к. $x \in \{0, 1, \dots, 50\}$ $y \in \{0, \dots, 100\}$

51 вариант выбора x , 101 вариант

y

Заметим, что среди

наших троек будут и тройки -

(если $k = -1$, то ~~это~~ хотя бы

одно число из тройки не $\in \mathbb{N}$.)

значит $d = 2^x \cdot 3^y$, где $x \in \{-50, \dots, 50\}$

$y \in \{-100, -99, \dots, 99, 100\}$ т. е.

всего чисел $101 \cdot 201 = 20301$

Заметим, что среди наших

прогрессий будут, как и

возрастающие так и убыва-

ющие, так и равные числа,

когда $d = 1$

Ответ: $101 \cdot 201 = 20301$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3(1)

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2(y-2) - x(13y-26) + 44(y-2) + x - 6 = 0$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) + 44(y-2) = 6 - x$$

$$(y-2)(x^2 - 13x + 44) = 6 - x \quad (*) \quad (\text{По алгоритму Евклида})$$

Прогоняем ~~РД~~ $x^2 - 13x + 44$ и $6 - x$

$$(x^2 - 13x + 44; 6 - x) = (-7x + 44; 6 - x) =$$

$$= (-7x + 44; x - 6) = (2; x - 6), \text{ но}$$

мы знаем, что из $(*)$ $6 - x \mid x^2 - 13x + 44$,

но мы выясним, что $2 \mid$

одна из делителей это $\pm 1, \pm 2$,

$$\text{тогда } x^2 - 13x + 44 = \pm 1, \pm 2$$

$$1) x^2 - 13x + 44 = 1$$

$$x^2 - 13x + 43 = 0 \quad \text{т.к. квадратный трёхчлен унитарный,}$$

$$43 \equiv \pm 1 \pm 43$$

из этих чисел или одна корня $\in \mathbb{Z}$,
нельзя получить значение в этом и во
всех остальных случаях $(2, 3, 4)$ мы

не найдем корни среди делителей свободного члена

нет решений в \mathbb{Z}

всех следующих

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3621
2) $x^2 - 13x + 44 = -1$

$$x^2 - 13x + 45 = 0$$

$$45 \div: \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 9, \pm 15, \pm 45$$

но никакие 2 числа не дают

в сумме 13 (все они нечетные \Rightarrow

сумма четная) \Rightarrow нет решений в \mathbb{Z}

3) $x^2 - 13x + 44 = 2$

$$x^2 - 13x + 42 = 0$$

$$x = 6, \quad x = 7 \Rightarrow \begin{cases} 6 - x = 0 \\ 6 - x = -1 \end{cases}$$

$$y - 2 = 0 \quad \downarrow \quad (y - 2) - 2 = -1$$

$$x = 6, \quad y = 2, \quad \emptyset$$

4) $x^2 - 13x + 44 = -2$

$$x^2 - 13x + 46 = 0$$

$$46 \div: \pm 1, \pm 2, \pm 23, \pm 46$$

никакие 2 числа не равны 13 \Rightarrow

в \mathbb{Z} нет решений

ответ (6; 2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

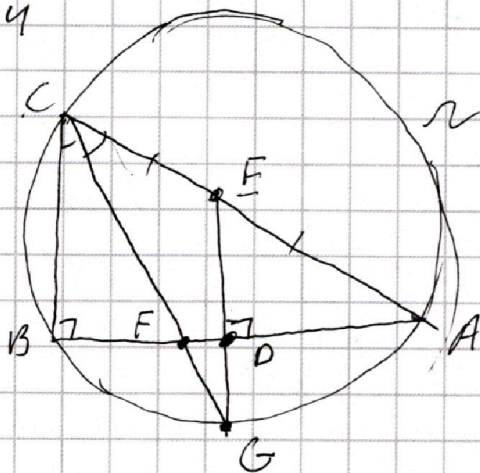
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

24



1. т.к. $BE \perp AC$ и $GE \perp CF$
то G — середина BC
т.к. AB не содержит
центр $\angle \Rightarrow (ABG \text{ п.д. } \Delta)$

2. т.к. D — с.р. AB , то
 $DG \perp AB$ (ABG — п.д. Δ)

3 т.к. E, D, G — одна линия,
то $ED \perp AB$

и т.к. $ED \parallel BC$, то
 $AB \perp BC$ т.е.

$\angle B = 90^\circ$

4. т.к. $S_{BCF} = 16$ S_{DGF}

то т.к. $DG \parallel BC$ ($ED \parallel BC$),

то $\Delta BCF \sim \Delta FGD \Rightarrow$

из к подобия $= 4$ (т.к. S
больше в 4^2 раз)

5. $BF = 4FD$ и т.к. $BD = DA$,

то $BF = 4x$, $DA = 5x$

$BF = 4x$, $DA = 5x$

6. т.к. $\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{CA}$

(сб. ссс.), то

$$\frac{BC}{CA} = \frac{4x}{x+5x} = \frac{2}{3}$$

если $BC = 24$, то

$$AC = 36, \text{ а}$$

$$AB = \sqrt{96^2 - 48^2} =$$

$$= \sqrt{576} \text{ значит}$$

$$\angle B = 90^\circ$$

$$\angle A = \arcsin \frac{2}{3}$$

$$\angle C = \arccos \frac{2}{3}$$

ответ $\angle B = 90^\circ$

$$\angle A = \arcsin \frac{2}{3}$$

$$\angle C = \arccos \frac{2}{3}$$

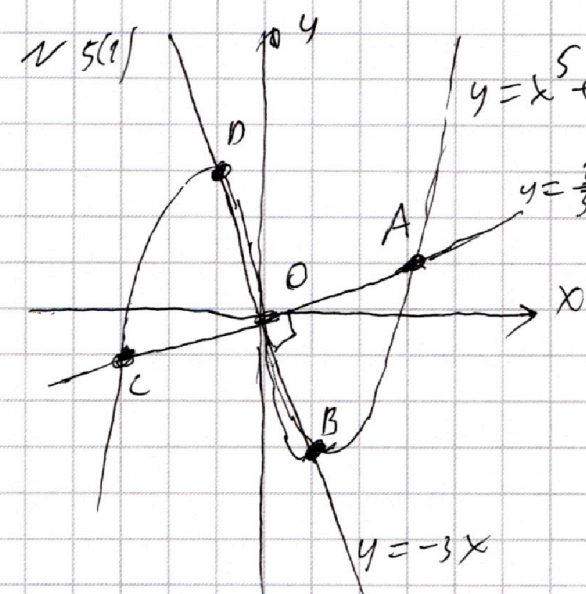
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Проведём
прямую $y = \frac{1}{3}x$

1. она $\perp y = 3x$

2. т.к. мы по-
нимаем, что

$y = 3x$ является касат.
касательная $y = x^5 + ax$

вызв в 2 точках

(т.к. по усл. эта прямая соде-
ржит диагональ, а точка
O центр, то точки B и D

(пересечение $y = -3x$ и $y = x^5 + ax$)

являются расположенными так, как
показано на рис.) из симметрии

относительно O ($y = x^5 + ax$ — нечёт-

ная ($-(x^5 + ax) = (-x^5) + a(-x)$) Мы
(о центр и квадрат)

понимаем, что $OB = OD$ и значит

$y = \frac{1}{3}x$ содержит диагональ

квадрата (проходит через O, BD + AC)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

25(2)

(A, C точки пересечения $y = \frac{1}{3}x$
и $y = x^5 + ax$)

Заметим, что ^{точек пересечения} ~~линии~~ ^(а не больше) ~~линии~~ $y = \frac{1}{3}x$, $y = x^5 + ax$ и $y = -3x$, $y = x^5 + ax$

$$\text{т.е. } x^5 + ax = kx \Leftrightarrow x(x^4 + a - k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x^2 + \sqrt{k-a})(x^2 - \sqrt{k-a}) = 0$$

$$x^2 + \sqrt{k-a} > 0 \quad (\sqrt{k-a} > 0)$$

$$x(x - \sqrt{k-a})(x + \sqrt{k-a}) = 0$$

$$x = 0, \quad x = \sqrt{k-a}, \quad x = -\sqrt{k-a}$$

(Мы знаем, что ~~граф~~ ~~прямых~~
пересекаемых $x^5 + ax$ есть
еще 2 точки пересечения
(кроме 0) это вершины
квадрата (они содержат
уголками) а больше,
как мы выяснили ранее
точек пересечения не будет.

Будем обозначать A_0 координату
точки A по x

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5(3)

$$\text{но } A_y = \frac{1}{3} x_0 \quad (A \in y = \frac{1}{3}x)$$

$$\text{Если } A_x = x_0, \text{ то } B_y = -x_0.$$

(т.к. ABCD квадрат $AO = BO$, и

по ранее доказанному $AO \perp BO$, так

что при повороте на $+90^\circ B \rightarrow A$

$$\text{т.е. } B_y = -A_x) \quad B_x = \frac{1}{3} x_0 \quad (B \in y = -3x)$$

т.к. A и B $\in x^5 + ax$, то

$$\begin{cases} x_0^5 + ax_0 = A_y & (x_0 \neq 0) \\ (\frac{1}{3}x_0)^5 + a \frac{1}{3}x_0 = B_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^4 = -a + \frac{1}{3} \\ x_0^4 = -81a + 3^5 \cdot (-1) \end{cases}$$

$$-a + \frac{1}{3} = -81a + 3^5$$

$$80a = -3^5 - \frac{1}{3} = -\frac{3^6 + 1}{3} = -\frac{730}{3}$$

$$a = -\frac{73}{24}$$

$$x_0^4 = \frac{73}{24} + \frac{1}{3} = \frac{73 + 8}{24} = \frac{81}{24} = \frac{27}{8}$$

$$x_0^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$OA^2 = A_x^2 + A_y^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{9} \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{30\sqrt{3}}{18\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

$$AB^2 = 2OA^2 = \frac{10\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{сторона квадрата} = \sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{73}{24},$$

$$\sqrt{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (1)

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \Rightarrow abc + 5c = b^2c + 5b \Rightarrow$$

$$a = \frac{5b - 5c}{bc} + b \quad (*)$$

Аналогично с формул группировки
получим?

$$b = \frac{5c - 5a}{ca} + c \quad (**) \quad c = \frac{5a - 5b}{ab} + a \quad (***)$$

Подставим (***) в (*)

$$a = \frac{5\left(\frac{5c - 5a}{ca} + c\right) + 5c}{\left(\frac{5c - 5a}{ca} + c\right)c} + \frac{5c - 5a}{ca} + c =$$

$$= \frac{25c - 25a}{ca} + \frac{5c - 5a}{ca} + c = \frac{25c - 25a}{5c^2 - 5ac + c^3a} +$$

$$+ \frac{5c - 5a}{ca} + c = \frac{25c - 25a}{c(c^2a - 5a + 5c)} + \frac{5c - 5a + c^3a}{ca}$$

Заметим, что $b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \Rightarrow$

$$abc = c^2a + 5c - 5a \quad (X) \text{ значит}$$

$$a = \frac{25c - 25a}{c \cdot abc} + \frac{abc}{ca} = \frac{25c - 25a}{abc^2} + b =$$

$$= \frac{5}{bc} \left(\frac{5c - 5a}{ac} \right) + b = \frac{5}{bc} (b -$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6(2)

$$a = \frac{25c - 25a}{abc^2} + b = \frac{25\left(\frac{5a-5b}{ab} + a\right) - 25a}{ab\left(\frac{5a-5b}{ab} + a\right)^2} + b$$

$$= \frac{25(5a-5b)}{(5a-5b+a^2b)} + b$$

$$из (*) \quad \frac{5b-5c}{bc} = \frac{25(5a-5b)}{5a-5b+a^2b}$$

$a^2b + 5a - 5b = abc$ выводится из

$$c + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{b} \text{ так } c (*)$$

$$\frac{5b-5c}{bc} = \frac{25(5a-5b)}{abc} \Rightarrow (b-c)a = 25a - 25b$$

$$ba - ca = 25a - 25b \text{ аналогично}$$

~~можно получить $cb - ab = 25b - 25c$~~

~~выразим ab и подставим~~

$$~~cb - 25b + 25c = ca + 25a - 25b~~$$

$$5a - 5b = ab(c-a) \text{ (выводится из)}$$

$$c + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{b})$$

$$5ab(c-a) = ba - ca \Rightarrow 5cb - 5ab = b - c \Rightarrow$$

$$a = \frac{5cb + b + c}{5b}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

2

3

4

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~№ 7(2)~~ № 7(2) у четырех-угольника + диагональ

$$\text{Значит } S_{EKBV} = \frac{1}{2} BF \cdot XY = \frac{17 \cdot 13}{2} =$$
$$= \frac{221}{2} = 110,5$$

Ответ : 110,5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

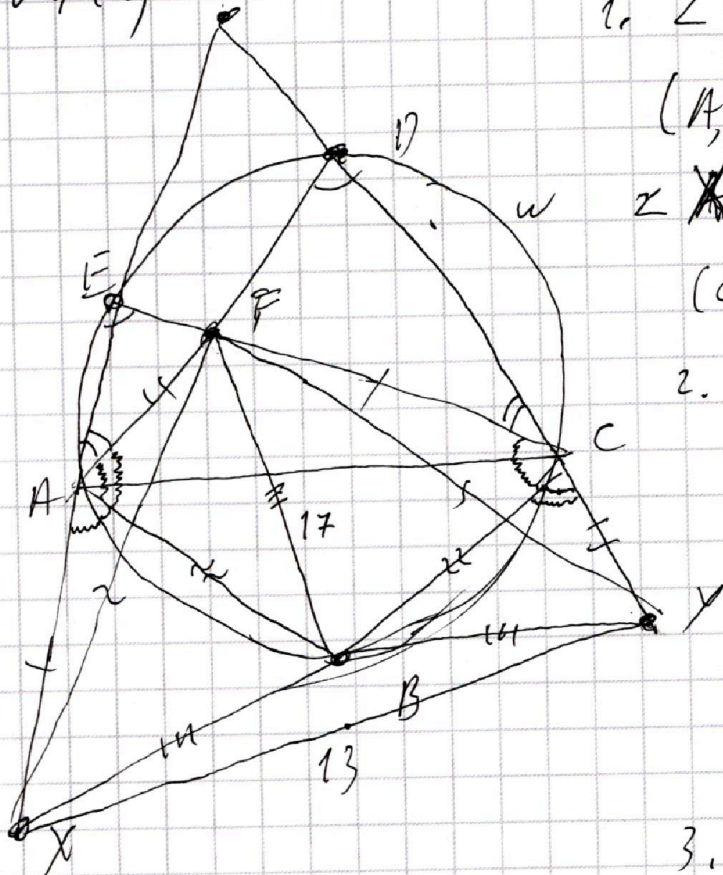


- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7 (2)



1. $\angle EAD = \angle ECD$

$(A, E, D, C \in \omega) \Rightarrow$

$\angle XAF = \angle FCY$

(смежные)

2. т.к. $FC = AX$ и

$AF = CY$, то

по I крив.

$\Delta XAF = \Delta FCY$

$FX = FY$

3. $\angle ECB = \angle BAX$

$(E, B, A, C \in \omega)$

и т.к. $BC = AB$ и

$FC = AX$, то

$\Delta AXB = \Delta FCB$

(по I крив.)

$XB = BF$

Мы получили, что эти равны, то есть

из этого следует добавить, что $BF = BY$.

4. Если сделать симметрию относительно перпендикуляра к XY, то $X \rightarrow Y, B \rightarrow B, F \rightarrow F$

$(BX = BY, FX = FY) \Rightarrow$

BF останется на месте \Rightarrow параллельно

\Rightarrow BF содержит перпендикуляр к XY т.е. $BF \perp XY$ ΔFAB и ΔYCB

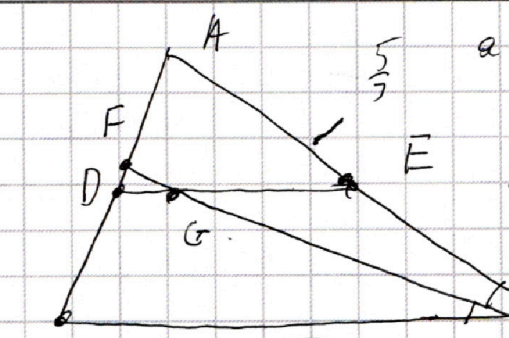
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



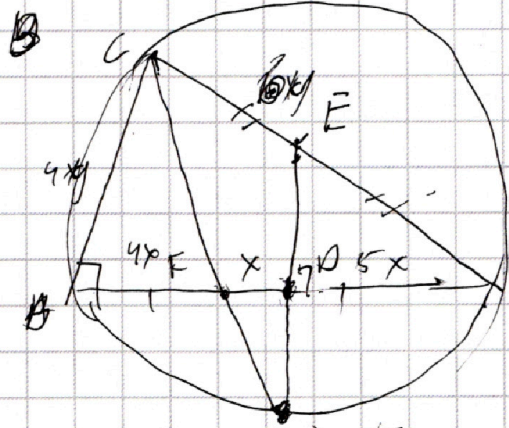
$$abc + 5c = b^2 + 5b$$

$$b^2 + 5b + 5c$$

$$c^2 + 5c - 5a$$

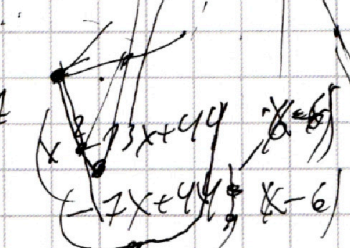
$$a^2 = 5a - 5b$$

$$3abc = 2a^2 + b^2 + c^2$$



$$x = 3x$$

$$(x^2 - 3x + 44)(y - 2)$$



$$6 + x$$

$$81 \cdot 9$$

$$729$$

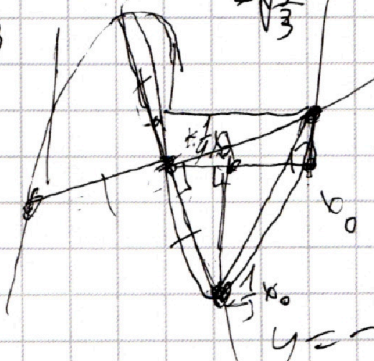
$$730$$

$$b + -6 = 0$$

$$\frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$17 \cdot 13$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 13 \\ \hline 51 \\ 170 \\ \hline 221 \end{array}$$



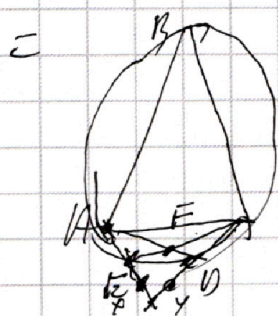
$$4 = \frac{1}{3}x$$

$$4 = -3x$$

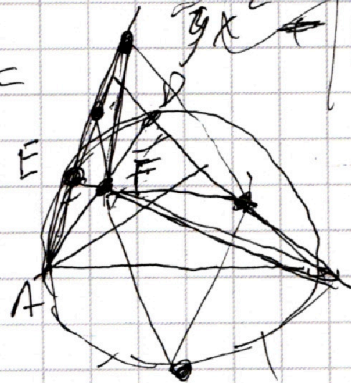
$$\frac{229 \cdot 13}{91} x^2 + \left(\frac{1}{3}x\right)^5 + a - \frac{1}{3}x$$

$$3^3 x^4 + x^4 + a \cdot 3^4 =$$

$$9x^2 + (3x)^5 + 3ax$$



W



$$\frac{17 \cdot 13}{2}$$

$$\frac{201 \cdot 101}{201} = 101$$

$$c^4 = a^2 b^2 = b^3 c$$

$$c^3 = 201 \cdot 101$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{№6(а)} \\ a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} &\Rightarrow abc + 5c = b^2c + 5b \\ abc &= b^2c + 5b - 5c \end{aligned}$$

Если приравнять оставшиеся 2
выражения получим

$$abc = c^2a + 5c - 5a$$

$$abc = a^2b + 5a - 5b$$

Сложим 3 выражения

$$3abc = c^2a + a^2b + b^2c \quad (*)$$

по неравенству Коши о средних

$$\begin{aligned} \frac{c^2a + a^2b + b^2c}{3} &\geq \sqrt[3]{c^2a \cdot a^2b \cdot b^2c} = \\ &= \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc, \end{aligned}$$

$$\text{Но из } (*) \quad abc = \frac{c^2a + a^2b + b^2c}{3}$$

$$\text{тогда } \frac{c^2a + a^2b + b^2c}{3} = \sqrt[3]{c^2a \cdot a^2b \cdot b^2c}$$

т.е. как мы знаем все 3 числа

целыми друг равны между

собой

$$c^2a = a^2b = b^2c \quad \text{т.е.}$$

$$c^2 = ab, \quad a^2 = bc, \quad b^2 = ac$$

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО** одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \quad -1 \quad -1 \quad a \quad b \quad c$$

$$a^2 + 5a = b^2 + 5b$$

$$a^2 - b^2 + 5a - 5b = 0$$

$$(a-b)(a+b+5) = 0$$

$$a+b = -5$$

$$a+b+c = 5 \quad a \quad b \quad c$$

$$-1 \quad -\frac{5}{2} = -2 \quad -$$

$$a + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$a+c = -5$$

$$a=c$$

$$a=b=c = -\frac{5}{2}$$

$$c(a+b-b^2+5) = 5b$$

$$c = \frac{5b}{ab-b^2+5}$$

$$a = \frac{5b-5c}{bc} + b$$

$$bc = 5$$

$$b = \frac{5c-5a}{ca} + c$$

$$a = \frac{5 \left(\frac{5c-5a}{ca} + c \right) - 5c}{b}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

