



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $2^{150} \cdot 3^{300}$ ?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 16 раз больше площади треугольника  $DGF$ .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = -3x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 17$ ,  $XY = 31$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 8 случаев раскрытия  
модуля.

1)  ~~$x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$~~

1)  $-x^3 - 4 - x^2 + 1 \leq -x^3 + x^2 - 5$

2)  $-x^3 - 4 - x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 + 5$

3)  $-x^3 - 4 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 - 5$

4)  $-x^3 - 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$

5)  $x^3 + 4 - x^2 + 1 \leq -x^3 + x^2 - 5$

6)  $x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq -x^3 - x^2 + 5$

7)  $x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 - 5$

8)  $x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$

Преобразуем и получим

1)  $x^2 - 1 \geq 0$

2)  $x^3 - 4 \geq 0$

3)  $0 = 0$

4)  $x^3 - x^2 + 5 \geq 0$

5)  $x^3 - x^2 + 5 \leq 0$

6)  $0 = 0$

7)  $x^3 - 4 \leq 0$

8)  $x^2 - 1 \leq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Так как  $a \cdot b \cdot c = 2^{150} \cdot 3^{300}$ , то можно  
представить  $a, b, c$  в виде

$$a = 2^{i_a} \cdot 3^{j_a}$$

$$b = 2^{i_b} \cdot 3^{j_b}$$

$$c = 2^{i_c} \cdot 3^{j_c}, \text{ чтобы была возможна}$$

геометрическая прогрессия должно  
выполняться условие.

$$\begin{cases} i_b - i_a = i_c - i_b \\ j_b - j_a = j_c - j_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_c = 2i_b - i_a \\ j_c = 2j_b - j_a \end{cases}, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} i_a + i_b + i_c = 150 \\ j_a + j_b + j_c = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3i_b = 150 \\ 3j_b = 300 \end{cases}, \text{ тогда}$$

$i_b = 50, j_b = 100$  при любых вариантах, тогда

запишем  $a, b, c$  в следующем виде.

$$a = 2^{50-d_1} \cdot 3^{100-d_2}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

$$c = 2^{50+d_1} \cdot 3^{100+d_2}, \text{ где } 0 \leq d_1 \leq 50, 0 \leq d_2 \leq 50,$$

где при  $d_1 = 0$  и  $d_2 = 0$ , прогрессия

будет стационарной, т.е. с частными  
равными 1.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда кол-во существующих последовательностей  $a, b, c$  определяется кол-вом выборов  $d_1$  и  $d_2$ , тогда всего

последовательностей  $51 \cdot 101 = 5151$ ,

где 51 способ выбрать  $d_1$ , и 101 способ выбрать  $d_2$ .

Ответ: 5151.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



300 Рассмотрим данное выражение  
Выразим  $x$  через  $y$ . Как квадратное уравнение.

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

Тогда, по теореме Виета

$$-\frac{(13y-27)}{y-2} = x_1 + x_2, \text{ где } x_1, x_2 - \text{целые.}$$

$$\frac{44y-94}{y-2} = x_1 x_2, \text{ где } x_1, x_2 - \text{целые}$$

Следовательно  $\frac{13y-27}{y-2}$  - целое и

$\frac{44y-94}{y-2}$  - целое, тогда,

$$\frac{13y-27}{y-2} = 13 - \frac{1}{y-2}, \text{ где } \frac{1}{y-2} - \text{целое,}$$

значит  $y = 3$  или  $1$ , далее рассмотрим

$$\frac{44y-94}{y-2} = 44 - \frac{6}{y-2}, \text{ где } y = 3 \text{ и } y = 1 \text{ подходят,}$$

теперь по  $y = 3$  и  $y = 1$  найдем  $x$ .

1)  $y = 3$

$$x^2 - x(39-27) + 132 - 94 = 0$$

$$x^2 - 12x + 38 = 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 38 = 144 - 152 < 0, \text{ значит целых } x \text{ при}$$

данном  $y = 3$  нет.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим  $y = 1$

$$-x^2 - x(13 - 27) + 44 - 94 = 0$$

$$-x^2 + 14x - 50 = 0$$

$$x^2 - 14x + 50 = 0$$

$$D = 196 - 4 \cdot 50 = 196 - 200 < 0$$

Значит и при  $y = 1$  нет целых  
 $x$ , заметим, что других  
 $y$  не существует иначе  
возникнет противоречие с  
выше написанным рассуждением.

Ответ: корней нет.

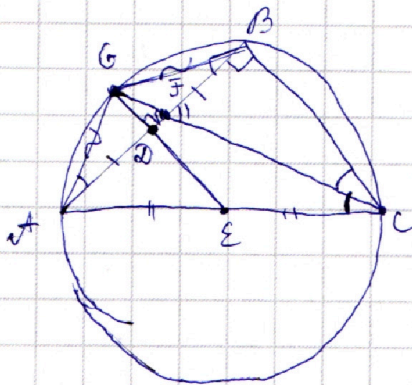
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$\triangle ABC$  опирается на окружность  $\Omega$ ,

$CF$  - биссектриса,

$D, E$  - середины  $AB$  и  $AC$ ,

$CF \cap DE = G, G \in \Omega$ .

$$S_{\triangle CEF} = 16 S_{\triangle GEF}$$

Найти:  $\angle A$  ~~и~~ треугольника  $ABC$ .

Решение:

1)  $\angle BCF = \angle CGF$  (опираются на одну дугу)

~~и~~  $\angle GCA = \angle GBA$  (опираются на одну дугу)

Так как  $\angle BCG = \angle GCA$  ( $CF$  - биссектриса), то  $\angle GBA = \angle GAF \Rightarrow \triangle BGA$  - равнобедрен  $\Rightarrow GD$  - высота

( $AD = BD$ )  $\Rightarrow \angle ADE = 180^\circ - \angle GDA = 90^\circ$ .

2)  $D, E$  - середины  $AB$  и  $AC \Rightarrow DE$  - средняя линия и

$DE \parallel BC, \Rightarrow \angle ADE = \angle ABC = 90^\circ$ ,

3)  $\angle GFD = \angle BFC$  (по св-ву верт. углов)  $\Rightarrow \triangle BFC \sim \triangle GFD$

~~и~~  $\angle FBC = \angle GDF = 90^\circ$  по двум углам

4) Тогда коэффициент подобия равен  $k = \sqrt{\frac{S_{\triangle BFC}}{S_{\triangle GFD}}} = 4$ ,

тогда  $BF = 4DF$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

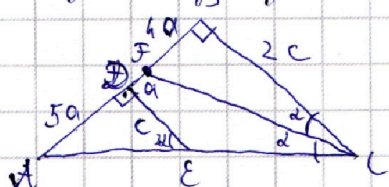
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Тогда получим следующий треугольник.



Введем обозначения  $\angle FCB = d$ ,  $DE = c$ ,  
 $FD = a$ , тогда  $\angle DEB = 2d = \angle ACB$ , ( $BC \parallel DE$ ),

$BF = 4DF = 4a$  (4).  $AD = BD = BF + DF = 5a$ .

Заметим, что  $\operatorname{tg} d = \frac{4a}{2c}$  из  $\triangle CFB$ ; также

$\operatorname{tg} 2d = \frac{5a}{c}$  из  $\triangle ADE$ , тогда обозначим

$\frac{a}{c} = t$ , тогда  $\operatorname{tg} d = 2t$ ;  $\operatorname{tg} 2d = 5t$ ,

$\operatorname{tg} 2d = \frac{2 \operatorname{tg} d}{1 - \operatorname{tg}^2 d} = 5t$ , ~~мы~~ подставим  $\operatorname{tg} d$ ,

$$\frac{2 \cdot 2t}{1 - 4t^2} = 5t$$

$$4 = 5 - 4 \cdot 20t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{1}{20}},$$

~~тогда~~ тогда  $\operatorname{tg} d = 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{20}} = \sqrt{\frac{25}{20}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Тогда  $\angle ACB = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$ , значит  $\angle BAC = 90^\circ -$

$$- \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ответ:  $90^\circ$ ;  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$ ;  $90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$ .



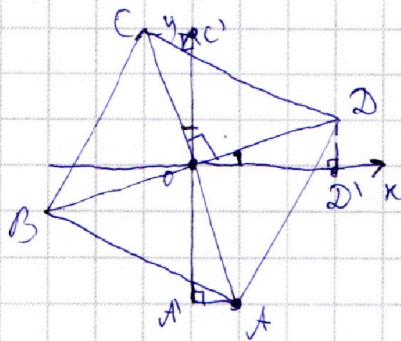
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим координаты  
точки  $A$   ~~$(x_0; y_0)$~~ ,  
тогда  $y_0 = -3x_0$ , так как  
по условию ~~центр~~ диагональ

лежит на прямой  $y = -3x$ . Так как

центр совпадает с началом координат, то

$C$  имеет координаты  $C(-x_0; 3x_0)$ , ( $OC = OA$ ,  
т.к.  $CO = AO$ ,  $O$  - ~~средина~~ <sup>центр</sup>;  $\angle COA = \angle AOB$ ,  $\angle COO = \angle AAO$ )

Тогда  $D$  имеет координаты  $(3x_0; x_0)$

$\triangle DOD' = \triangle COC'$  ( $\angle CCO = \angle DDO = 90^\circ$ ;  $CO = DO$ ,  $O$  - центр,  
 $\angle DOD' = \angle COC'$  ( $\angle COD = 90^\circ$ ;  $\angle C'OD' = 90^\circ \Rightarrow \angle COC' = \angle DOD'$ ))

Подставим ~~в~~ координаты точки  $A$  и  $D$  в

функцию  $y = x^5 + ax$ , получим.

$$\begin{cases} -3x_0 = x_0^5 + ax_0 & | \cdot -3 \\ x_0 = 243x_0^5 + 3ax_0 & , \text{слотим.} \end{cases}$$

$$10x_0 = 240x_0^5 + 30x_0 - 3ax_0$$

$$24x_0^5 = x_0$$

$$x_0^4 = \frac{1}{24}$$

$$x_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Тогда сторона квадрата имеет длину

$$|\vec{AD}| = \sqrt{(3x_0 - x_0)^2 + (x_0 + 3x_0)^2} = \sqrt{4x_0^2 + 16x_0^2} =$$
$$= \sqrt{20x_0^2} = \sqrt{20} \sqrt{\frac{1}{24}} = 2\sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{24}} = 2\sqrt{\frac{25}{24}}$$

Далее найдем  $a$ .

$$-3x_0 = x_0^5 + ax_0 \quad | : x_0 \neq 0$$

$$~~x_0^5 + ax_0 = -3x_0~~$$

$$-3 = x_0^4 + a, \quad \text{подставим } x_0$$

$$-3 = \frac{1}{24} + a$$

$$a = -3 - \frac{1}{24} = -\frac{72+1}{24} = -\frac{73}{24}$$

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{\frac{25}{24}}; a = -\frac{73}{24}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} = t, \text{ где } t = \text{const};$$

$$\begin{cases} a + \frac{5}{b} = t \\ b + \frac{5}{c} = t \\ c + \frac{5}{a} = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = t - \frac{5}{b} \\ b = t - \frac{5}{c} \\ c = t - \frac{5}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b} \\ b - c = \frac{5}{a} - \frac{5}{b} \\ c - a = \frac{5}{b} - \frac{5}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = \frac{5(b-c)}{bc} \\ b - c = \frac{5(c-a)}{ac} \\ c - a = \frac{5(a-b)}{ab} \end{cases}$$

Перемножим все уравнения

$$(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{125}{(abc)^2} (a-b)(b-c)(c-a), \text{ следовательно}$$

$$(abc)^4 = 125, \text{ или какая-либо пара}$$

чисел одинаковы, заметим, что

это невозможно, рассмотрим без

ограничения общности  $a = b$ ,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



тогда получим из равенства:

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}, \text{ равенство:}$$

$$a + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{c}$$

$$\frac{5}{a} = \frac{5}{c} \Rightarrow a = c, \text{ но тогда все }^{\text{числа}} \text{ равны}$$

между собой чего не может быть, тогда  
остается 1 вариант:

$$(abc)^2 = 125, \text{ но тогда}$$

$$abc = \pm \sqrt{125} = \pm 5\sqrt{5}, \text{ тогда наименьшее}$$

значение  $abc = -5\sqrt{5}$ .

Ответ:  $-5\sqrt{5}$ .

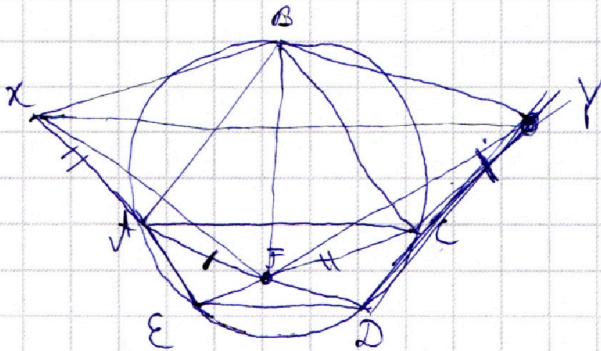
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$\triangle ABC$  - равнобедр.

$$FC = AK, AF = CY,$$

$$BF = 17; XY = 39$$

Найти:  $S_{XBYF}$ .

Решение:

$$1) \triangle XFA = \triangle YFC \Rightarrow XF = FY$$

$$2) \begin{array}{l} \triangle XBA \text{ равнобедр.} \Rightarrow XB = BA \\ \triangle YBC \text{ равнобедр.} \Rightarrow BC = BY \end{array} \Bigg| \Rightarrow BY = BX$$

$$3) \triangle BYF \text{ и } \triangle BXF \text{ - равнобедр.} \Rightarrow BY = FY, \\ BX = FX \Rightarrow BY = FY = XF = BX \Rightarrow XBYF -$$

ромб, тогда  $S_{XBYF} = \frac{BF \cdot XY}{2} = 263,5$

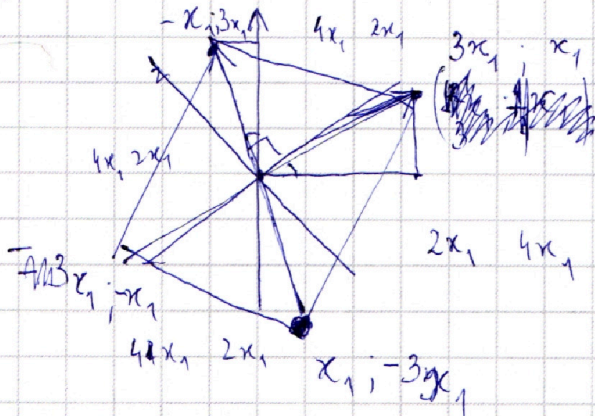
Ответ: 263,5.

1 2 3  
+ + +  
+ + +

1 2 3  
~~0 0~~

1 2 3  
- - -  
- - +  
- + -  
- + +  
+ - -  
+ - +  
+ + -  
+ + +

$$\begin{aligned} x^3 - 4 - x^2 + 1 &\leq x^3 + x^2 - 5 \\ -x^3 - 4 - x^2 + 1 &\leq x^3 - x^2 + 5 \\ -x^3 - 4 + x^2 - 1 &\leq -x^3 - x^2 + 5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} b &= 0 \\ 5a &= 7c \\ c &= \frac{6}{5} \\ a &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{5} + c = \frac{7}{5} + 0 = \frac{6}{5} + 0$$

$$\frac{b}{5} + c = \frac{6}{5} + 0 = \frac{6}{5} + 0$$

$$\frac{b}{5} + 0 = \frac{6}{5} + 0 = \frac{6}{5} + 0$$

$$\frac{b}{5} + c = \frac{7}{5} + 0 = \frac{6}{5} + 0$$

$$b = c$$

$$a = c$$

$$a = b$$

$$(abc)^2 = 125$$

$$(a-b)(b-c)(c-a) = 125 \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(abc)^2}$$

$$(c-a) = \frac{ab}{5(a-b)}$$

$$(b-c) = \frac{ac}{5(b-a)}$$

$$(a-b) = \frac{bc}{5(b-c)}$$

$$a - b = \frac{c}{5} - \frac{b}{5}$$

$$b - c = \frac{a}{5} - \frac{c}{5}$$

$$a - b = \frac{c}{5} - \frac{b}{5}$$

$$\begin{cases} a = \frac{b}{5} + \frac{c}{5} \\ b = \frac{c}{5} + \frac{a}{5} \\ c = \frac{a}{5} + \frac{b}{5} \end{cases}$$

1  
2 +  
3  
4  
5  
6 +  
7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода неопределен!

1  2  3  4  5  6  7

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

На одной странице можно оформить **только одну** задачу.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1  ~~$-x^3 - 4 - x^2 + 1 \leq -x^3 + x^2 - 5$~~      $2x^2 - 2 \geq 0$

2  ~~$-x^3 - 4 - x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 + 5$~~      $2x^3 - 8 \geq 0$

3  ~~$-x^3 - 4 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 - 5$~~      $0 = 0$

4  ~~$-x^3 - 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$~~      ~~$x^3 - x^2 + 5 \geq 0$~~

5  ~~$x^3 + 4 - x^2 + 1 \leq -x^3 + x^2 - 5$~~      $x^3 - x^2 + 5 \leq 0$

6  ~~$x^3 + 4 - x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 + 5$~~      $0 = 0$

7  ~~$x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$~~      ~~$-x^3 - 8 \geq 0$~~

8  ~~$x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$~~

$x^3 - x^2 + 5 \geq 0$

$x^3 - x^2 + 5 = 0$

$x^3 = x^2 - 5$

$5 = x^2(x-1)$

~~$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$~~

~~$0 \cdot 1 \cdot (y-2) - x \cdot (y-2) = 0$~~

$0 \cdot 1 \cdot (y-2) - x(y-3) - 2 = 0$

$-xy + 3 - 2 = 0$

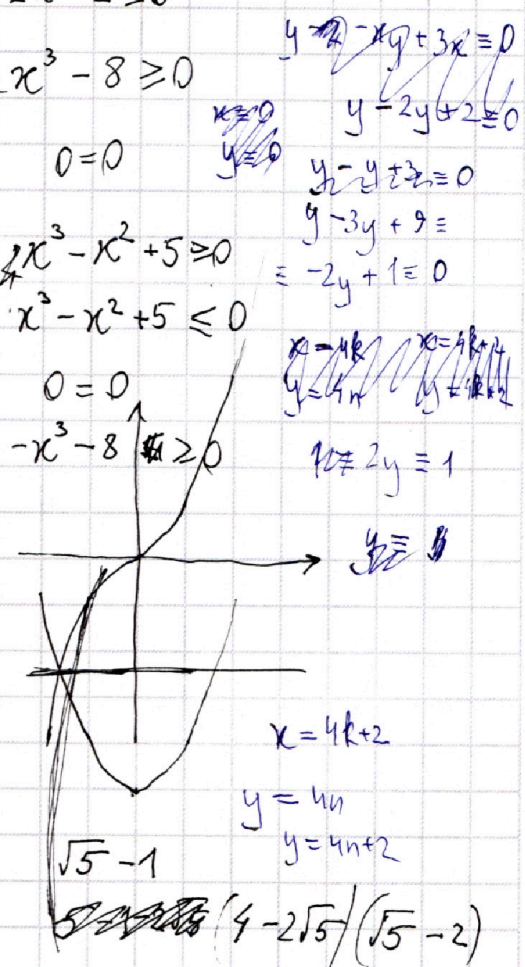
$xy \equiv 1 \pmod{4}$

$(y-2) - xy + 3 - 2 = 0$

$y - xy + 3 = 0$

~~$y(1-x) = -3$~~

$y(1-x) = 1 \pmod{4}$



$-2(2-\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)$

$-2(5-4) = -2$

$x=2$   
 $x=4$

$-xy + 3x - 2 = 0$

$x(3-y) \equiv 2 \pmod{4}$

$x \equiv 1$

$x \equiv 2$

$x \equiv 3$

$2(3-y) = 2$

$-2 = 2$

$y = 3 - y \equiv 1 \quad y = 2$

$3 - y = 3 \quad y = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

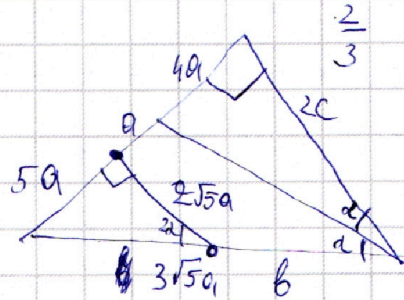


~~$$10k^2 + 16k + 24$$~~

$$94 = 2 \cdot 47$$

11	$11^2$
1	1
2	4
3	9
4	5
6	13
5	3
7	5
8	

$$25a^2 + 20a^2 = 45a^2 = 3\sqrt{5}a$$



~~1000~~

1000

sin 2\alpha

cos 2\alpha

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{5a}{c} = 5 \frac{a}{c} = 5t$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4a}{2c} = 2 \frac{a}{c} = 2t$$

$$\frac{4t}{1-4t^2} = 5t$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{5a}{c}$$

$$4 = 5 - 20t^2$$

$$20t^2 = 1$$

$$t^2 = \frac{1}{20}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

$$c = 2\sqrt{5}a$$

$$\frac{2 \cdot 2t}{1 - 4t^2} = 5t$$

~~$$4t = 5t - 20t^2$$~~

~~$$20t^2 - t = 0$$~~

~~$$t = 20$$~~

~~$$\Rightarrow \frac{a}{c} = 20$$~~

$$a = 20c$$



На одной странице можно оформить **ТОЛЬКО ОДНУ** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Лояра QR-кода недоступна!



**МФТИ**

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$\Delta = (13y-27)^2 - 4(44y-94) =$$

$$= 169y^2 - 702y + 729 - 4(44y - 94) = 169y^2 - 202y + 729 - 176y + 376y - 752 =$$

$$= 169y^2 - 702y + 729 - 176y + 376y + 352y - 752 =$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 13 \\ \hline 81 \\ + \\ 27 \\ \hline 351 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ + \\ 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 44 \\ \hline 176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 94 \\ \times 94 \\ \hline 376 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 188 \\ \times 188 \\ \hline 752 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 376 \\ - 702 \\ \hline 026 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ - 729 \\ \hline 752 \end{array}$$

$$= -7y^2 + 26y - 33 =$$

$$x = \frac{13y - 27 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$2y - 4$$

$$1 + \frac{5y - 5yx}{y^2} \pm \frac{7y^2 - 26y + 33}{y^2} = 0$$

$$\Delta = 676 - 4 \cdot 33 \cdot 7$$

$$13y - 27 + \sqrt{7y^2 - 26y + 33}$$

$$a + \frac{b}{5} = b + \frac{c}{5} = c + \frac{a}{5}$$

$$a = b + \frac{c}{5} - \frac{b}{5}$$

$$a + b + c + \frac{b}{5} + \frac{c}{5} + \frac{a}{5} = 37$$

$$c = b + \frac{c}{5} - \frac{c}{5}$$

$$a + b + c + \frac{a+b+c}{5} = 37$$

$$a - c = \frac{b}{5} - \frac{b}{5} = \frac{5a - 5b}{5} = \frac{a6}{5}$$

$$x + \frac{y}{5x} = 37$$

$$y^2 + 5y - 5yx = 0 \quad a6 = \frac{5b-61}{(a-4)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

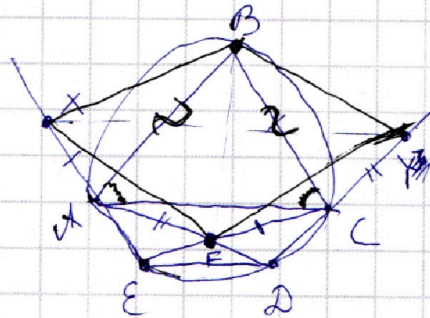


$$-\frac{x^3}{x^3-x^2} \rightarrow x^2+5 \frac{|x^2-1|}{x} \quad |x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$$

$$-\frac{x^3-x^2+5}{x} \frac{|x-1|}{x^2} \quad a + \frac{5}{6} = b + \frac{5}{6} = c + \frac{5}{9}$$

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

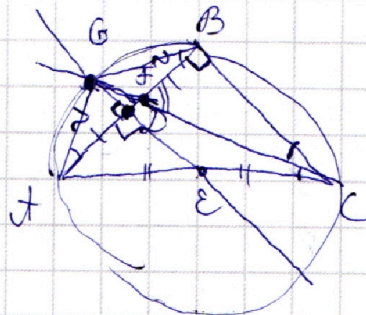
a, b, c



$$BF = 17$$

$$XY = 37$$

2<sup>i</sup>



$$S_{BCF} = 16 S_{OGF}$$

$$\frac{26 \cdot 27}{2} = S_{OGF}$$

$$2 \cdot \frac{i_a}{3} \cdot \frac{j_a}{3}$$

$$2 \cdot \frac{i_b}{3} \cdot \frac{j_b}{3}$$

$$2 \cdot \frac{i_b - i_a}{3} \cdot \frac{2j_b - j_a}{3}$$

$$BF \cdot k = 4$$

$$FD \cdot k = BF$$

$$GD \cdot k = BC$$

$$i_b - i_a = i_c - i_b$$

$$j_b - j_a = j_c - j_b$$

$$2 \cdot \frac{50 - b_1}{3} \cdot \frac{100 - b_2}{3}$$

$$2 \cdot \frac{50}{3} \cdot \frac{100}{3}$$

$$2 \cdot \frac{50 + b_1}{3} \cdot \frac{100 + b_2}{3}$$

$$0 \leq b_1 \leq \frac{5}{100}$$

$$i_a + i_b + 2i_b - i_a = 150$$

$$j_a + j_b + 2j_b - j_a = 300$$

$$3i_b = 150$$

$$3j_b = 300$$

$$i_b = 50$$

$$j_b = 100$$

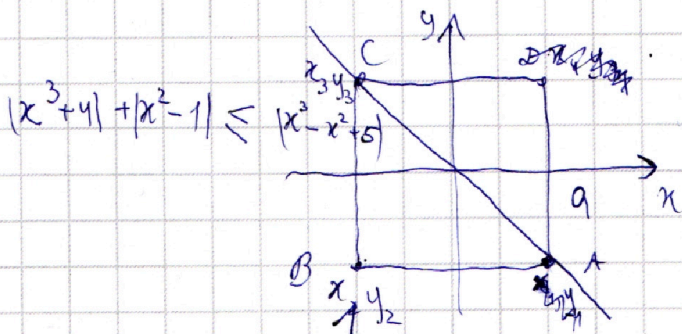
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~A = (x1, -3x1)~~

A (x<sub>1</sub>; -3x<sub>1</sub>)

B (~~x1~~; ~~3~~-3x<sub>1</sub>)  
-x<sub>1</sub>

C (~~x1~~; 3x<sub>1</sub>)

D (x<sub>1</sub>; 3x<sub>1</sub>)

$3x^2 - 2x = 0$

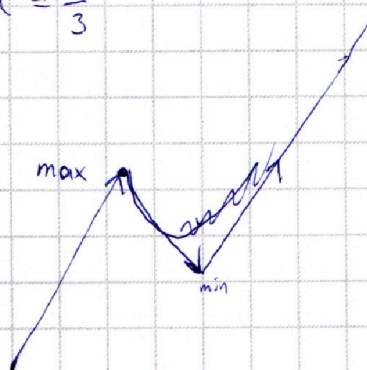
~~x(3x-2)=0~~ A (x<sub>1</sub>; -3x<sub>1</sub>)

x(3x-2)=0 B (x<sub>1</sub>-a; -3x<sub>1</sub>)

x=0 C (x<sub>1</sub>-a; -3x<sub>1</sub>+3a)

x =  $\frac{2}{3}$

$x^3 - x^2 + 5$



$a = b - \frac{5}{b} + \frac{5}{c}$

~~a = b + \frac{5}{c} - \frac{5}{a}~~

~~c = a + \frac{5}{b} - \frac{5}{a}~~

~~a = b = c + \frac{5}{a} - \frac{5}{c}~~

$abc = (b - \frac{5}{b} + \frac{5}{c}) (a + \frac{5}{b} - \frac{5}{a}) (c + \frac{5}{a} - \frac{5}{c})$

$abc = (ab + 5 - \frac{5b}{a}) - \frac{5a}{b}$

$\frac{2(y-2)}{13y-27} = x$

$2x(y-2) = 13y - 27$

~~13y - 27 = 2x(y-2)~~

$-26 + 27 + 98$

~~13y - 27 + 2x(y-2) = 0~~

$2x(y-2) - (13y-27) = 0$

~~$x^2y - 2x^2 = 13xy + 27x + 4xy - 94 = 0$~~

$x^2(y-2) - x(13y-27) + 4xy - 94 = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -3x = x^5 + ax & \begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \end{array} \\ x = 243x + 3ax \\ 3x = -x^5 - ax \\ -x = -243x - 3ax \end{cases} \quad \begin{array}{l} 3^5 = 243 \\ 81 \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{cases} -3x = x^5 + ax & \begin{array}{r} 132 \\ \times 24 \\ \hline 318 \end{array} \\ x = 243x^5 + 3ax & \begin{array}{r} 39 \\ \times 27 \\ \hline 1053 \end{array} \end{cases} \quad \begin{array}{l} x^2(y-2) - x^2y + 2y - 1 = 0 \\ -xy + 2y - 1 \equiv 0 \pmod{3} \\ y-2 - xy + 2y - 1 \equiv 0 \pmod{3} \\ 2y - 1 \equiv 0 \\ y \equiv 2 \quad x \equiv 0 \pmod{3} \end{array}$$

$$\begin{cases} -3 = x^4 + a & \begin{array}{r} 17 \\ \times 3 \\ \hline 51 \end{array} \\ 1 = 243x^4 + 3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 = -3x^4 - 3a \\ 1 = 243x^4 + 3a \end{cases}$$

$$10 = 240x^4$$

$$24x^4 = 1$$

$$x^4 = \frac{1}{24}$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$$

$$\sqrt{(2x)^2 + 4x^2} = \sqrt{4x^2 + 16x^2} =$$

$$= \sqrt{20} \cdot \sqrt{\frac{1}{24}} = 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} = 2\sqrt{\frac{25}{24}}$$

$$\frac{13y + 27}{y-2} \text{ целое}$$

$$\frac{44y - 94}{y-2} \text{ целое}$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 3 \\ \hline 132 \\ \times 2 \\ \hline 272 \\ \hline 72 \end{array}$$

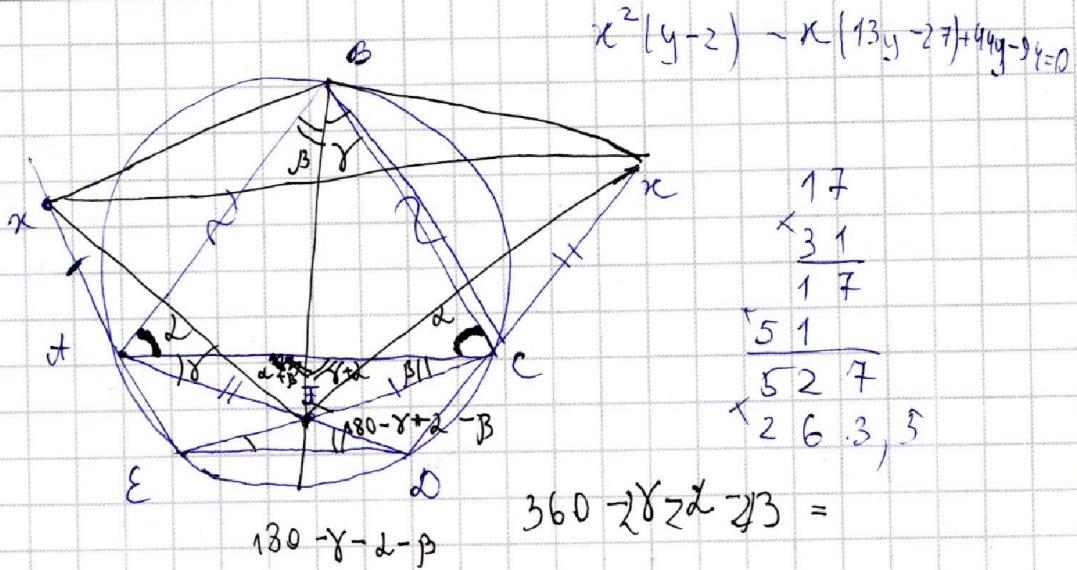
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 31 \\ \hline 17 \\ \hline 51 \\ \hline 527 \\ \hline 2635 \end{array}$$

$$360 - 2\gamma - 2\delta - \beta =$$

$$360 - 2\gamma - 2\delta - \beta = 180$$

$$180 - 2\gamma - 2\delta - \beta$$

$$x = \frac{13y - 27 \pm \sqrt{7y^2 - 26y + 33}}{2y - 4} \quad \text{целое}$$

$$y - \frac{1}{2} \pm \sqrt{3y^2 - 2y + 1} = 0$$

$$y \cdot 4 = 432$$

4