



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Решите уравнение

$$6 \operatorname{tg} 2x - 1 + \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $13^{180} \cdot 17^{180}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x-1) - (x-2) \ln(3x-3) + (\ln 3) \ln(x-1) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{15}$, $AD = DC = \sqrt{6}$, $AC = 2\sqrt{3}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$12 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} - 1 + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 0$$

$$12 \frac{\sin x}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} - 1 + \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = 0 \quad \begin{matrix} \text{Пусть } \cos x + \sin x = \\ = a, \\ \sin x - \cos x = b \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{a+b}{2} \quad \cos x = \frac{a-b}{2}$$

$$12 \frac{(a+b)}{a-b} - 1 + \frac{a}{b} = 0$$

$$1 - \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$$

$$12 \frac{(a+b)}{(a-b)} - 1 + \frac{a}{b} = 0$$

$$\frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a-b)^2}$$

$$12 \frac{(a+b)(a-b)}{-4ab} - 1 + \frac{a}{b} = 0 \quad -3a^2 + 3b^2 - ab + a^2 = 0$$

$$2a^2 + ab - 3b^2 = 0 \quad D = b^2 + 24b^2 = (5b)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{-b \pm 5b}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -1,5b \end{cases}$$

$$1) a = b \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = 0$$

$$\text{при } x = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow \operatorname{tg}(\pi + 2\pi n) = 0 \quad 0 = 0 \Rightarrow$$

$$1 \text{ серия: } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) a = -1,5b \Rightarrow \operatorname{ctg}(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 6 \operatorname{tg} 2x = \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{4} \quad \text{т.к. } a = -1,5b, \text{ то } \sin x = -\frac{b}{2} \quad \cos x = -2,5b$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a = -1,5b \text{ н.с.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

Пусть q - знаменатель протр. Очевидно $q \in \mathbb{Q}$
(т.к. если q - иррац., то $b = a \cdot q$ - ирр., т.к. целое
умножить на ирр. - это ирр. число (если это
целое не равно 0, а оно очев. не равно,
иначе $a = b = c = 0$.)

$$\Rightarrow b = aq \quad c = aq^2 \quad \Rightarrow abc = a^3 q^3 = 13^{180} \cdot 17^{180}$$

$$\Rightarrow aq = 13^{60} \cdot 17^{60} \quad (q > 0 \text{ по определению протр. пр.})$$

т.к. $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ и $c \in \mathbb{Z}$, $abc \in \mathbb{Z}$, то

$$a = 13^x \cdot 17^y \quad c = 13^t \cdot 17^m \quad x, y, t, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\Rightarrow q = \frac{b}{a} = \frac{13^{60} \cdot 17^{60}}{13^x \cdot 17^y} = 13^{60-x} \cdot 17^{60-y}$$

$$\Rightarrow c = bq = 13^{120-x} \cdot 17^{120-y} \quad \text{т.к. } a \in \mathbb{Z}, \text{ то } x \geq 0$$

и $y \geq 0$, а т.к. $c \in \mathbb{Z}$, то $120-x \geq 0$ и $120-y \geq 0$

$$\Rightarrow \cancel{x \in \mathbb{Z}} \quad 0 \leq x \leq 120 \quad 0 \leq y \leq 120$$

$$\Rightarrow \text{вар-в выбрать пару } (x, y) - 121^2$$

Очевидно при любой такой паре $abc = 13^{180} \cdot 17^{180}$

и $a \in \mathbb{Z}$, т.к. $x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow 13^x \in \mathbb{N}$ и аналог.

$17^y \in \mathbb{N}$.

Также $13^{120-x} \in \mathbb{N}$, т.к. $0 \leq x \leq 120$ и

$17^{120-y} \in \mathbb{N}$, т.к. $0 \leq y \leq 120$.

~~Ответ:~~ (Если бы q могло быть отриц., то очев.
ответ был бы $\pm 121^2$ раза больше, т.е. $\pm 121^2$)

Ответ: $\pm 121^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\ln^2(x-1) - (x-2) [\ln 3 + \ln(x-1)] + \ln 3 \cdot \ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln^2(x-1) + \ln(x-1) [\ln 3 - (x-2)] - (x-2) \ln 3 \geq 0$$

~~Куб $\ln(x-1) \Rightarrow t \Rightarrow t^2$~~ Рассм. данное н-в.
как квадратное от-но $\ln(x-1)$. Найдем корни:

$$\ln^2(x-1) + \ln(x-1) [\ln 3 - (x-2)] - (x-2) \ln 3 = 0$$

$$D = [\ln 3 - (x-2)]^2 + 4(x-2) \ln 3 = [\ln 3 + (x-2)]^2 \Rightarrow$$

$$\ln(x-1) = - \frac{[\ln 3 - (x-2)] \pm (\ln 3 + (x-2))}{2}$$

$$\begin{cases} \ln(x-1) = x-2 & (1) & (2): x = \frac{4}{3} \\ \ln(x-1) = -\ln 3 = \ln \frac{1}{3} & (2) & \end{cases}$$

$$(1): e^{x-2} - x + 1 = 0 \quad (e^{x-2} - x + 1)' = e^{x-2} - 1 \Rightarrow \text{най-}$$

дем крит. т.: $e^{x-2} = 1 \quad x=2$. Заметим, что при $x=2$
 $\ln(x-1) = 0 = x-2 \Rightarrow$ это единств. реш. (т.к. оно
находится в единств. крит. т. \Rightarrow либо это экстремум, либо
ф-ция монотонна). $\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{4}{3} \end{cases}$

\Rightarrow чтоб в н-ве был знак ≥ 0 имеем:

$$x \in (-\infty; \frac{4}{3}] \cup [2; +\infty) \quad \text{ОДЗ: } x > 1 \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } x \in (1; \frac{4}{3}] \cup [2; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

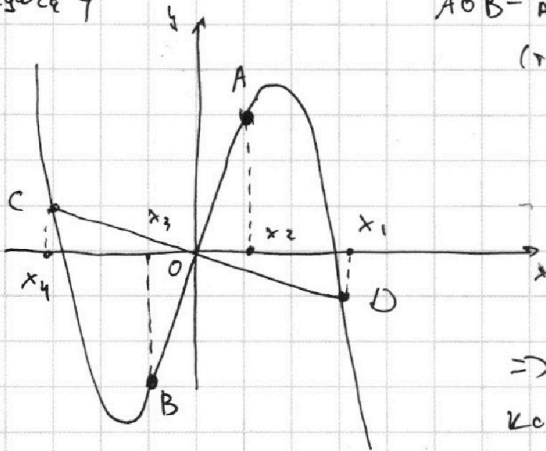
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4



AOB - ~~прямоугольный~~ диагональ квадрата
(т.е. т. $A \in y = 3x$ и т. $B \in y = 3x$)

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^3 + ax = 3x$$

(считаем, что $x \neq 0$)

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^2 + a = 3 \quad x^2 = \frac{3a-9}{2}$$

\Rightarrow это ур-ние имеет ≤ 2

корни \Rightarrow прямая $y = 3x$ пересекает график $y = -\frac{2}{3}x^3 + ax$ в ≤ 2 т.

(не считая т. O) $\Rightarrow AB$ и есть диагональ квадрата.

Пометно, что вторая диагональ квадрата ~~первой~~ лежит на прямой $\perp y = 3x \Rightarrow$ на $y = -\frac{x}{3}$

Аналогично пусть C и D - точки пересек.

$$y = -\frac{x}{3} \text{ и } y = -\frac{2}{3}x^3 + ax \Rightarrow ABCD \text{ - квадрат с}$$

$$\text{ц. в т. } O \Rightarrow OC = OD = OA = OB.$$

Пусть точки B, A, C имеют абсциссы

x_1, x_2, x_3 и x_4 соотв.. Пометно, что $x_4 = -x_1$ и

$x_2 = -x_3$ ($\triangle BOx_3O = \triangle AOx_2O$ т.к. $AO = OB$ и $\angle BOx_3O = \angle AOx_2O = 90^\circ$
и $\angle BOx_3 = \angle AOx_2$. Аналогично $\triangle COx_4O = \triangle DOx_1O$.)

При тем еще $\triangle COx_4O = \triangle BOx_3O$ ($CO = OB$ и $\angle COx_4 = 90^\circ$

$\angle BOx_3 = \angle x_3BO$ и \triangle прямоуг.) $\Rightarrow CO = OX_3$. CO - знак.

$y = -\frac{x}{3}$ абсциссе x_4 , а Ox_3 имеет длину $|x_3|$, т.е. $-x_3$

$$\Rightarrow \text{найдем } x_4: -\frac{2}{3}x^3 + ax = -\frac{x}{3} \quad \frac{2}{3}x^2 = a + \frac{1}{3} \quad x^2 = \frac{3a+1}{2}$$

$$\Rightarrow x_4 = -\sqrt{\frac{3a+1}{2}}, \text{ либо } x_4 = \sqrt{\frac{3a+1}{2}}. \text{ Из равенства } \triangle \text{ мы}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолж.)

знаем, что $OX_4 = BX_3$, $\Rightarrow BX_3 = |x_4|$, а BX_3 - значение
линейной функции $y = 3x$ в т. x_3 (со знаком "-")

$$\Rightarrow -3 \sqrt{\left| \frac{3a-9}{2} \right|} = -\sqrt{\left| \frac{3a+1}{2} \right|} \Rightarrow \sqrt{\frac{3a-9}{2}} = \sqrt{\frac{3a+1}{2}}$$

$$\sqrt{9a^2 - 6 \cdot 9a + 81 \cdot 9} = \sqrt{9a^2 + 6a + 1} \quad \Rightarrow \left| \frac{3a-9}{2} \right| = \left| \frac{3a+1}{2} \right|$$

$$\left| 27a - 81 \right| = \left| 3a + 1 \right| \Rightarrow \begin{cases} a = 11\frac{1}{4} \\ a = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Проверим эти a подставив в $-\frac{2}{3}x^3 + ax = 3x$

1) $a = \frac{8}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x = 3x$ ($x=0$ считаем решением)

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3} = 3 \Rightarrow -2x^2 + 8 = 9 \quad x^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{8}{3} - \text{н.с.}$$

2) $a = 11\frac{1}{4} \quad -2x^2 + 33\frac{3}{4} = 9 \quad x^2 = 12\frac{3}{8}$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow x_3 = -\sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow \text{т. В: } -3\sqrt{\frac{99}{8}} \text{ - ордината}$$

$$\Rightarrow B\left(-\sqrt{\frac{99}{8}}; -3\sqrt{\frac{99}{8}}\right) \Rightarrow x_4 = -3\sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow$$

$$\text{т. С: } -\left(\frac{-3\sqrt{\frac{99}{8}}}{3}\right) = \sqrt{\frac{99}{8}} \Rightarrow C\left(-3\sqrt{\frac{99}{8}}; \sqrt{\frac{99}{8}}\right)$$

$$\Rightarrow OC^2 \text{ по т. Пифагора: } \frac{99}{8} + 9 \cdot \frac{99}{8} = 10 \cdot \frac{99}{8}$$

$$\Rightarrow OC = \sqrt{55} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \text{Площадь квадрата: } \frac{(2 \cdot OC)^2}{2} =$$

$$= 2OC^2 = \frac{10 \cdot 99}{4} = \frac{990}{4}$$

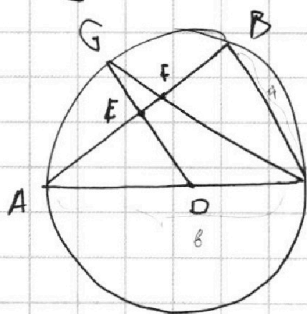
$$\text{Ответ: } a = 11\frac{1}{4}; \text{ Площадь: } \frac{990}{4}$$

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача № 5



Мы знаем, что G - точка пересек.
 Диск. $\angle C$ с окр. $\Omega \Rightarrow G$ - середина
 дуги AB , т.к. E - середина AB , то
 $GE \perp AB$ ($\triangle ABG$ - р/б, т.к. G - сер. дуги
 т.е. $AG = BG \Rightarrow GE$ - медиана \Rightarrow высота)
 GED - о-на прямая по усл. и т.к.
 $AE = EB$ и $AD = DC$, то DE - ср. линия
 $\Rightarrow GD \parallel BC \Rightarrow \angle ABC = \angle AED = 90^\circ$.

Пусть $AC = b$, $BC = a$, $AB = \sqrt{b^2 - a^2}$ (по т. Пифагора)

т.к. ср-диск., то $BF = \frac{a \sqrt{b^2 - a^2}}{a + b} = \frac{a \sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}}$

$$\Rightarrow CF^2 \text{ по т. Пифагора: } BF^2 + BC^2 =$$

$$= \frac{a^2(b-a)}{b+a} + a^2 = \frac{a^2b - a^3 + a^2b + a^3}{a+b} = \frac{2a^2b}{a+b}$$

аналогично $AF = \frac{b \sqrt{b^2 - a^2}}{a+b} = \frac{b \sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}}$ $AE = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}$

$$\Rightarrow EF = AF - AE = \frac{b \sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}} - \frac{\sqrt{b-a} \sqrt{b+a}}{2} = \frac{2b \sqrt{b-a} - (a+b) \sqrt{b-a}}{2 \sqrt{b+a}} =$$

$$= \frac{(b-a) \sqrt{b-a}}{2 \sqrt{b+a}}$$

$$ED - \text{ср. л.} \Rightarrow ED = \frac{a}{2} \Rightarrow DF^2 = EF^2 + ED^2 =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{4(b+a)} + \frac{a^2}{4} = \frac{CF^2}{DF^2} = \frac{2}{23} = \frac{2a^2b}{(b-a)^3} = \frac{8a^2b}{(b-a)^3}$$

$$= \frac{(b-a)^3 + a^2(a+b)}{4(a+b)} \Rightarrow \frac{CF^2}{DF^2} = \frac{2}{23} = \frac{2a^2b}{(b-a)^3 + a^2(a+b)} =$$

$$= \frac{8a^2b}{b^3 - 3b^2a + 4a^2b} = \frac{8a^2}{b^2 - 3ab + 4a^2} \Rightarrow 184a^2 = 2b^3 - 6ab + 8a^2$$

$$b^2 - 3ab + 4a^2 = 92a^2 = 0 \quad b^2 - 3ab - 88a^2 = 0$$

$$D = 9a^2 + 4 \cdot 88 \cdot a^2 = a^2 \cdot 361 = (19a)^2 \Rightarrow b = \frac{3a \pm 19a}{2}$$

$$\Rightarrow b = 11a \quad (-8a - \text{нет. с.н.}) \Rightarrow \angle C = \arccos \frac{1}{11}, \quad \angle A = \arcsin \frac{1}{11}$$

ответ: $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = \arcsin \frac{1}{11}$, $\angle C = \arccos \frac{1}{11}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6

Пусть $x^3 = a, y^3 = b, z^3 = c \Rightarrow a + \frac{11}{b} = b + \frac{11}{c} = c + \frac{11}{a}$

Перемножим три слагаемых $\rightarrow abc + \frac{11^3}{abc} + 11a + \frac{121}{a} +$

$+ \frac{11b + 121}{b} + \frac{11c + 121}{c}$

~~Понятно, что $a, b, c > 0$ (т.к. если равно + меньше 0, то $xyz < 0$, а у нас будет арифметическая прогрессия $\rightarrow 0$, если равнее 3, то аналогично умножим все. Пусть $a, b, c > 0$. Тогда по нерав-ву о средних.~~

~~$abc + \frac{11^3}{abc} > 2\sqrt{11^3} = 2\sqrt{1331} = 2 \cdot 11\sqrt{11} = 22\sqrt{11}$
 $11a + \frac{121}{a} > 2\sqrt{11a \cdot 121} = 22\sqrt{11a}$
 $11b + \frac{121}{b} > 22\sqrt{11b}$
 $11c + \frac{121}{c} > 22\sqrt{11c}$~~
 \Rightarrow произв трех слаг.

По нерав-ву о средних $xyz < \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$ (рав-во не достигается, т.к. они не все =)

Пусть ~~$a > b > c$~~ . $a, b, c > 0$. Если a - наиб из них (без огр. одинаковости), то c - наим., т.к. если b - наим., то $a + \frac{11}{b} > c + \frac{11}{a}$ (т.к. $a > c$ и $b < a$)

\Rightarrow среди них равно 2 отриц. (если 1, то фактически мы (1) все меняем, а ~~$a > b > c$~~ ~~возьмем~~ получим те же рав-ва, но xyz ~~будет~~ увеличится (т.к. станет меньше, а все 3 числа отриц. дабы не могут поменяться почему и все попох. не могут).

Пусть $a > 0, a > b, c < 0 \Rightarrow$ ~~$b > c$~~ , т.к. если $b > c$, то $a + \frac{11}{b} > a + \frac{11}{c} \Rightarrow b + \frac{11}{c} > c + \frac{11}{a} \Rightarrow b > c$ ~~$b > c$~~

Примерами: $a \neq b$, т.к. если $a = b$, то $\frac{11}{b} = \frac{11}{c} \Rightarrow b = c \Rightarrow a = b = c$, а по усл. это не так.

$b > c$, т.к. если нет, то $c > b \Rightarrow \frac{11}{c} < \frac{11}{b} \Rightarrow b + \frac{11}{c} < c + \frac{11}{a} \Rightarrow a > 0 > b > c$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

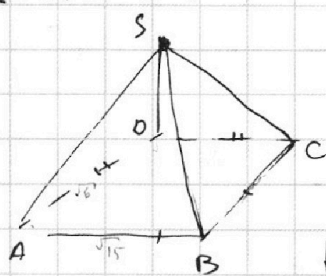
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача

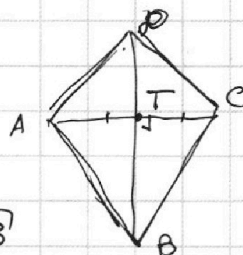


$$\angle ADC = 90^\circ, \text{ т.к. } \triangle ADC: AD^2 + DC^2 = 12 = AC^2$$

Пусть $SO = x \Rightarrow$ по Т. Пифагора

$$\text{в } \triangle ADS: AS = \sqrt{6 + x^2}$$

Найдём BD :



$$T = DB \cap AC$$

т.к. $AD = DC$, а $AB = CB$, то

BD - пер. пер. к AC

$$\Rightarrow BT = \sqrt{AB^2 - AT^2} = \sqrt{15 - 3} = 2\sqrt{3}$$

$$DT = \sqrt{AD^2 - AT^2} = \sqrt{6 - 3} = \sqrt{3} \Rightarrow BO = 3\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\text{в } \triangle OSB \text{ по Т. Пифагора } BS = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \sqrt{x^2 + 27}$$

$$\Rightarrow AS + BS = \sqrt{x^2 + 6} + \sqrt{x^2 + 27} = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}$$

$$\Rightarrow x^2 + 6 = x^2 + 27 + 12 + 15 + 12\sqrt{5} - 2\sqrt{x^2 + 27} (2\sqrt{3} + \sqrt{15})$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2 + 27} \sqrt{3} (2 + \sqrt{5}) = 48 + 12\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + 27} = \frac{24 + 6\sqrt{5}}{2\sqrt{3} + \sqrt{15}} = \frac{24 + 6\sqrt{5}}{\sqrt{12} + \sqrt{15}} = \frac{(\sqrt{15} - \sqrt{12})(24 + 6\sqrt{5})}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 + 27 = \frac{(27 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5})^2}{36(16 + 5 + 8\sqrt{5})}$$

$$x^2 = 4(27 - 12\sqrt{5})(21 - 8\sqrt{5}) - 27 = 4(567 - 216\sqrt{5} - 252\sqrt{5} +$$

$$+ 480) - 27 = 4(1047 - 468\sqrt{5}) - 27 = 4161 - 1872\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{4161 - 1872\sqrt{5}} \quad S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin 90^\circ}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9$$

$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3} \sqrt{4161 - 1872\sqrt{5}} \cdot 9$$

б): шар. радиус r от-но $SOB \Rightarrow$ его центр лежит в SDB , при том он касается SO и $OB \Rightarrow$ он лежит на бисс. $\angle SOB$

Ответ: а) $3 \sqrt{4161 - 1872\sqrt{5}}$.

Очевидно, что пирамида ссим. от-но пл-ти SOB

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1 продолж.

6. $\frac{\sin 2x - 1}{\cos 2x} + \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} = 0$

$\frac{12 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} - 1 + \frac{\cos x + \sin x}{-\cos x + \sin x} = 0$

$\sqrt{a+b} \cos x + \sin x = a$
 $-\cos x + \sin x = b$

$\Rightarrow 12 \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x + \sin x}{-\cos x + \sin x} - 1 = 0$

$\sin x = \frac{a+b}{2}$

$\cos x = \frac{a-b}{2}$

$\frac{12(a-b)}{a+b} + \frac{a}{b} - 1 = 0$
 $1 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$

$\frac{12(a-b)}{a+b} + \frac{a}{b} - 1 = 0$
 $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2}$

$\frac{12(a-b)(a+b)}{4ab} + \frac{a}{b} - 1 = 0$

$3a^2 - 3b^2 + a^2 - ab = 0$

$4a^2 - 3b^2 - ab = 0$

$4a^2 - ab - 3b^2 = 0 \quad D = b^2 + 48b^2 = (7b)^2$

$\Rightarrow a = \frac{b \pm 7b}{8}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -\frac{3}{4}b \end{cases}$

1) $a = b \Rightarrow \cos x - \sin x = \cos x + \sin x \Rightarrow \sin x = 0$

$\Rightarrow \tan 2x = 0 \Rightarrow \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ но т.к. $\sin x = 0 \Rightarrow$

$x = \pi n$

$\cos + \sin = -1,5 \quad (\sin - \cos)$

$\cos + \sin = -1,5 \quad \sin + 1,5 \cos \Rightarrow \cos - 3 \sin = 0$

$\sqrt{5} (\cos^2 - 9 \sin^2) = \sqrt{5} \cos \left(x + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$
 $\Rightarrow x + \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{2} + \pi n$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N

$$\frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

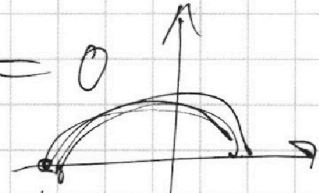
$$\frac{2+9x}{1-tg^2 x} = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{2 \sin x}{\cos - \sin}$$

$$\frac{\cos x + \frac{\sqrt{11}}{4}}{\sin x - \frac{\sqrt{11}}{4}}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{11}{2}} \cos x + \sqrt{\frac{11}{2}} \sin x}{\cos x + \sqrt{\frac{11}{2}} - \sin x}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$-1 + \frac{a}{b} \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = 0$$



$$\frac{12 \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}}$$

$$-1 + \frac{a}{b} = 0$$

$$\frac{12 \frac{a-b}{a+b}}{-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} + (a+b)^2} - 1 + \frac{a}{b}$$

$$6 \operatorname{tg} 2x =$$

$$\frac{12(a-b)}{4ab} - 1 + \frac{a}{b} = 0$$

$$\frac{3(a-b)}{a} - b + a = 0$$

$$3(a-b) - ab + a^2 = 0$$

$$a^2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$a^2 = \sin 2x + 1$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sim \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3 \sin x - \cos^2 x + \sin^2 x + \sin 2x + 1 = 0$$

~~$$\cos \sin 2x - \cos 2x$$~~

①

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)$$

$$\cos + \sin$$

$$D = b^2 + \dots$$

~~$$\sin x \cos x - \cos x \sin x$$~~

$$-1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$D = \frac{1}{b}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$6 \operatorname{tg} 2x = \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{4}$$

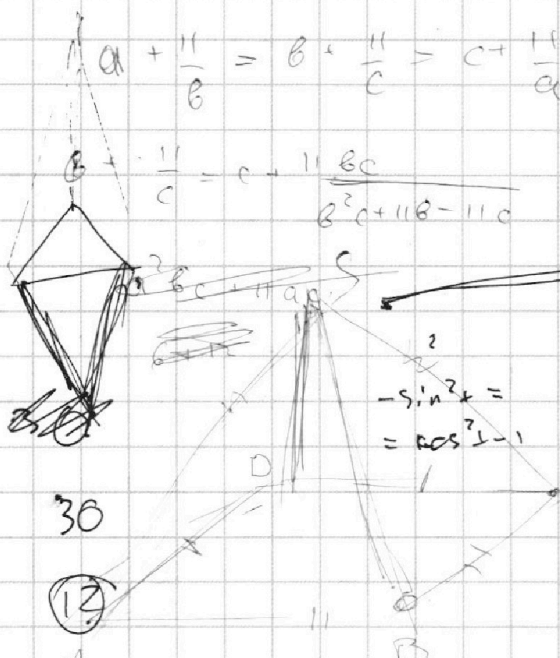
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{11}{b} = b + \frac{11}{c} = c + \frac{11}{a}$$

$$a = b + \frac{11}{c} - \frac{11}{b} = \frac{b^2 + 11b - 11c}{bc}$$

$$b + \frac{11}{c} = c + \frac{11}{b} \Rightarrow \frac{b^2 c + 11b - 11c}{bc} = 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2x &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \end{aligned}$$

30

12

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\cos x \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \frac{\sqrt{2}}{2}} \end{aligned}$$

$$\ln e^{2x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

$x < 2,50$

9

$$12 \frac{\sin x + \cos x}{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + \sin x)} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - 1 = 0$$

$$12 \frac{(a+b)(a-b)}{ab} = 1 \quad 12a^2 - 12b^2 = ab \quad 12a^2 - ab - 12b^2 = 0$$

$$b = b^2 + 4 \cdot 12^2 \cdot b^2 = b^2 (1 + 24^2)$$

$$\frac{-b \pm b \sqrt{24^2 + 1}}{24} = a$$

Opt. 1

$$\ln^2(x-1) - (x-2)(\ln 3 + \ln(x-1)) + \ln 3 \cdot \ln(x-1) \geq 0$$

$$a^2 - (x-2) \cdot b - (x-2)a + ab$$

1600
240
32

4188 - 27 4161

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-2x^2 + 3a = 9$$

$$-2x^2 + 8 = 9$$

$$-2x^2$$

$$\frac{156}{6} = 16$$

$$36 = 6 \cdot (6 + 150) = 36 \cdot 16 = 3^3 \cdot 2^6$$

$$a > b > c$$

$$\frac{11}{a} < \frac{11}{b} < \frac{11}{c}$$

$$a > b > c$$

$$-\frac{2}{3}x^3 + ax = 3x$$

$$27a - 81 = -3a - 1$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + a = 3$$

$$30a = 80$$

$$x^2 = a - 3$$

$$a = 8$$

$$x^2 = 3a + 1$$

$$a > c > b$$

$$a > b > c$$

$$\frac{11}{c} < \frac{11}{b}$$

$$-\frac{2}{3}x^3 + a = -\frac{1}{3}$$

$$a = \frac{82}{24} = \frac{41}{12}$$

$$24a = 82$$

$$x = \frac{3a - 9}{2}$$

$$\frac{41}{4} + 1 = \frac{45}{4}$$

$$\frac{2}{3}x^2 = a + \frac{1}{3}$$

$$a > b > c$$

$$f(f(x)) = 11,25$$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$x_1, x_2$$

$$-7 > -8$$

$$27$$

$$41$$

$$27$$

$$a > b > c$$

$$-\frac{11}{7}$$

$$-\frac{11}{8}$$

$$a + \frac{11}{b}$$

$$b + \frac{11}{c}$$

$$c + \frac{11}{a}$$

$$a + \frac{11}{b} = b + \frac{11}{c} = c + \frac{11}{a}$$

$$c + \frac{11}{a}$$

$$a > b > c$$

$$c + \frac{11}{a} < a + \frac{11}{b}$$

$$a + \frac{11}{b} < c$$

$$\frac{135}{12} = \frac{45}{4}$$

$$\begin{matrix} 81 \\ 12 \\ 16 \\ 81 \\ 97 \end{matrix}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper. The work includes:

- Initial inequalities: $a < 0 < b$
- Algebraic manipulations involving $\sqrt{b^2 - a^2}$ and $\frac{a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{b+a}}$.
- A geometric diagram of a triangle with vertices A, B, C and various points and lines drawn, including a circle.
- Complex algebraic derivations, including:
 - $(\frac{b}{11} + 2) \left(\frac{29}{121} + 11 + \frac{2}{b \cdot 11} + 990 \right) = \left(\frac{29}{11} + 9 \right) \left(\frac{9}{11} + 9 \right) + \frac{a}{4}$
 - $a^2 + a^2(b^2 - a^2) = (a^2 + ab)^2 - a^2 b^2 - a^4 = 2a^2 b - 2a^4 - 2ab^2$
 - $\frac{b^2(b-a)}{a+b} + \frac{b^2}{4} - \frac{b \sqrt{b-a} \sqrt{b-a} \sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}} = \frac{b^3 - 3b^2 a + 4a^2 b}{4}$
 - $\frac{b^3 - 3b^2 a + 4a^2 b}{4} = \frac{4(a^2 b - b^2 a) + b^2(a+b)}{4(a+b)}$
 - $\frac{2ab(a+ab)}{4} = \frac{2a^2 b(a+b)}{4(a+b)(b^2 - 4ab)} = \frac{2a^2}{b^2 - 4a}$
 - $\frac{b^3 - 3b^2 a + 4a^2 b}{4} = \frac{b^2 - 4ab}{4}$
 - $a = b + \frac{c}{11} - \frac{9}{11}$
- Final result: $abc + \dots$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper. At the top left is a QR code. The work includes:

- Initial calculations: $a^3 \cdot 9^3 = 13^{180} \cdot 17^{180}$, $99 = 13^{60} \cdot 17^{60}$.
- Diagrams: A box with '60' and '60', a circle with '120', and a circle with '60'.
- Equations: $e^{x-2} - x + 1 = 0$, $e^{x-2} - 1 - \frac{2}{3}x + 9x = 3x$, $a^2 - \text{const} = \dots + \text{const} + 9$.
- Logarithmic expressions: $(\ln 3)^2 + 4(x-2)(\ln 3 + \ln(x-1))$, $\ln^2(x-1) + \ln(x-1)(\ln 3 - (x-2)) - \ln 3(x-2)$.
- Calculus: $y' = -\frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 9 = -2x^2 + 9$, $9a^2 + 4 \cdot 88^2 a^2 = a \cdot t$.
- Geometry: A diagram of a circle with points and lines, and a diagram of a triangle with a point inside.
- Final results: 320 , 332 , 341 , 352 , 361 , 320 , 32 , 19^2 , 19 , 121 , 19 , 361 .
- Other notes: $x > z > y$, $y > z > x$, $z > x > y$.