



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел  $(a; b; c)$  таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение  $abc$  равно  $2^{150} \cdot 3^{300}$ ?
3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность  $\Omega$ . Точки  $D$  и  $E$  – середины сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно,  $CF$  – биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямые  $ED$  и  $CF$  пересекаются в точке  $G$ , принадлежащей  $\Omega$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если известно, что площадь треугольника  $BCF$  в 16 раз больше площади треугольника  $DGF$ .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции  $y = x^5 + ax$ . Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой  $y = -3x$ , а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра  $a$  и сторону квадрата.
6. [5 баллов] Числа  $a, b$  и  $c$  не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения  $abc$ .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность  $\omega$ , а на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , взяты точки  $E$  и  $D$  так, что отрезки  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . На лучах  $EA$  и  $DC$  отметили точки  $X$  и  $Y$  соответственно таким образом, что  $AX = CF$  и  $CY = AF$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BXFY$ , если  $BF = 17$ ,  $XY = 31$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



III

$$x < -1$$

$$x^2 - 1 > 0$$

для удобства заметим  $k = -x$

$$k > 1$$

$$|4 - k^3| + |k^2 - 1| \leq |5 - k^2 - k^3|$$

$$k^2 - 1 > 0$$

$$5 - k^2 - k^3 = 5 - k^2(1 + k) = 5 + k^2(k - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} k > 0 \\ k^2 > 0 \\ k^3 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 - k^2 - k^3 > 0$$

$$I \quad 4 - k^3 \leq 0 \Rightarrow k \geq \sqrt[3]{4}$$

$$5 - k^2 - k^3 = (4 - k^3) - (k^2 - 1) < 0 \quad \text{ф.к. отриц.} - \text{положим}$$

$$k^3 - 4 + k^2 - 1 \leq k^3 + k^2 - 5$$

$$0 \leq 0 \quad \text{для } k \in [\sqrt[3]{4}; \infty) \text{ получим}$$

$$\text{д.р. } x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}]$$

$$II \quad 4 - k^3 > 0 \Rightarrow 1 < k < \sqrt[3]{4}$$

$$I \quad 5 - k^2 - k^3 \geq 0$$

$$-k^3 + k^2 + 3 \leq 5 - k^2 - k^3$$

$$2k^2 \leq 2 \Rightarrow k \leq 1 \quad \emptyset$$

$$II \quad 5 - k^2 - k^3 < 0$$

$$-k^3 + k^2 + 3 \leq k^3 + k^2 - 5$$

$$2k^3 \geq 8$$

$$k^3 \geq 4 \Rightarrow k \geq \sqrt[3]{4} \quad \emptyset$$

Ответ:  $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [-1; 1]$

2 страница

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

I  $x > 1$

$$\text{Тогда } x^3 > 1 \Rightarrow x^3 + 4 > 0$$
$$x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0$$

$$x^3 - x^2 + 5 > 0 \quad \text{т.к. } x^3 > x^2; 5 > 0 \Rightarrow x^3 + 5 > x^2 + 0$$

все модули е плюсом

$$x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$x^2 + 3 \leq -x^2 + 5$$

$$x^2 \leq 1$$

$x \leq 1$  противоречие с  $x > 1$ , в этом случае  
решения нет

II  $-1 \leq x \leq 1$

$$\text{Тогда } -1 \leq x^3 \leq 1 \Rightarrow x^3 + 4 \geq (-1) + 4 = 3 > 0$$

$$0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow \text{максимальное и минимальное значения}$$
$$x^2 - 1 \leq (1) - 1 = 0$$

$$x^3 - x^2 + 5 \leq 1 - 0 + 5 = 6$$

$$x^3 - x^2 + 5 \geq (-1) - (1) + 5 = 3 > 0$$

$$x^3 - x^2 + 5 > 0$$

все модули е плюсом, кроме  $|x^2 - 1|$   
там знак равенства при  $x = 1$  и  $x = -1$   $|x^2 - 1| = 0$ , поэтому  
там знак равенства

$$x^3 + 4 - x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$x^3 + 5 \leq x^3 + 5$$

$0 \leq 0$  все  $x \in [-1; 1]$  подходят

1 страница

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



т.к.  $a, b, c$  - возм. прогрессия можно пред-  
ставить

$$b = sa$$

$$c = sb = s^2 a$$

$$\text{Тогда } abc = a \cdot sa \cdot s^2 a = a^3 s^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

возведем корни из 3 степеней, проблем со  
знаками не будет, т.к. корни из четной  
степени.

$$as = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

$a$  может принимать 51 значение из степеней  
двойки и 101 значение из степеней  
трояки, ~~51~~  $51 \cdot 101 = 5151$ . В каждом случае  
будет только один вариант  $s = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{a}$   
одному набору  $\{a, s\}$  соответствует один набор  $\{a, b, c\}$   
значит всего вариантов  $51 \cdot 101 = 5151$

Ответ: 5151

страница 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1)  $y \neq 2$   
Запишем как квадратное уравнение на  $x$

$$x = \frac{13 - 2y \pm \sqrt{(13 - 2y)^2 - 4(y - 2)(44y - 94)}}{y - 2}$$

~~$y \neq 2$~~

П.к. все целые числа действительные, то подкоренное выражение не отрицательное

$$(13 - 2y)^2 - 4(y - 2)(44y - 94) \geq 0$$

$$169y^2 - 502y + 729 - 4(44y^2 - 88y - 94y + 188) \geq 0$$

$$169y^2 - 502y + 729 - 4(44y^2 - 182y + 188) \geq 0$$

$$169y^2 - 502y + 729 - 176y^2 + 728y - 752 \geq 0$$

$$-7y^2 + 26y - 23 \geq 0$$

умножим на -1

$7y^2 - 26y + 23 < 0$ , парабола ветвями вверх

значит

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < y < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{26 - \sqrt{676 - 644}}{14} < y < \frac{26 + \sqrt{676 - 644}}{14} <$$

~~$y < \frac{22 + 132}{7}$~~

$$1 < \frac{13 - 2\sqrt{2}}{7} < y < \frac{13 + 2\sqrt{2}}{7} < 3$$

$y = 2$ , противоречие с условием случая 1:  
 $y \neq 2$   
страница 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1    2    3    4    5    6    7  
                 

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2) y = 2$$

$$x^2(2-2) - x(13 \cdot 2 - 2x) + 44 \cdot 2 - 94 = 0$$

$$-x(-1) + 88 - 94 = 0$$

$$x = 94 - 88 = 6$$

Ответ:  $x = 6$   
 $y = 2$

эпиграмма 9

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{FB}{FD} = k \Rightarrow \frac{S_{\Delta FBC}}{S_{\Delta SFD}} = k^2 \Rightarrow k = 4$$

по свойству биссектрисы кос от двух треугольников.  
заметим

$$\frac{BF}{FA} = \frac{BD - DF}{AD + DF} = \frac{\frac{AB}{2} - DF}{\frac{AB}{2} + DF} = \frac{AB - 2DF}{AB + 2DF}$$

$$\frac{DF}{AB} = \frac{DF}{2BD} = \frac{DF}{2DF + 2FB} = \frac{DF}{2DF + 2 \cdot 4DF} = \frac{1}{10}$$

по свойству биссектрисы  $\frac{FB}{FA} = 4$

$$AB = 10DF$$

$$\frac{BF}{FA} = \frac{AB - 2DF}{AB + 2DF} = \frac{8DF}{12DF} = \frac{2}{3}$$

по в. биссектрисы  $\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{CA} = \frac{2}{3} = \cos(2\alpha)$

Отметим:  $\angle ABC = 90$

$$\angle BCA = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\angle BAC = 90 - \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$$

страница 4

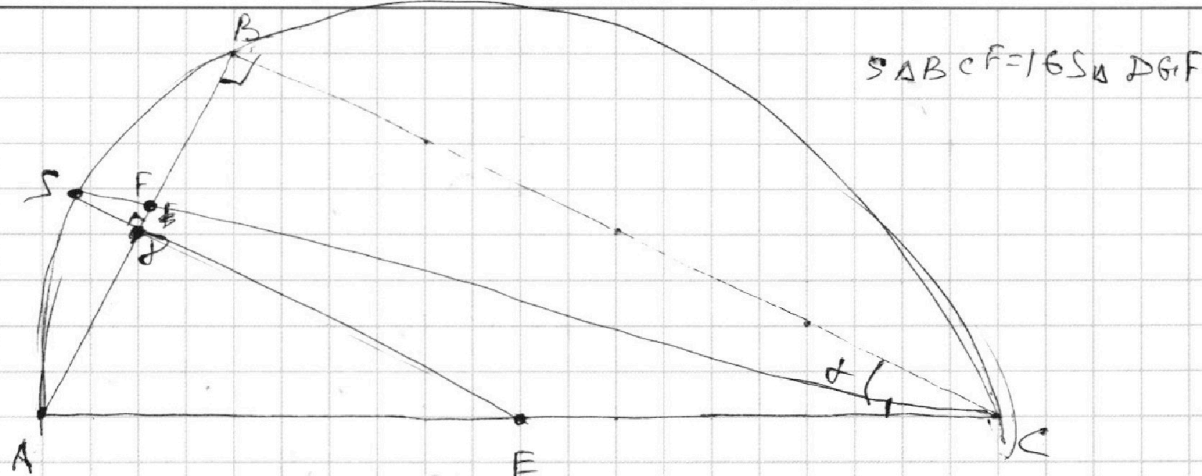
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



как известно, биссектриса угла внешнего треугольника делит дугу, ~~на~~ на которую опирается этот угол, пополам. биссектриса пересекает окружность в  $Q$  только один раз, значит прямая  $FD$  также пересекает окружность в этой точке. пусть эта точка  $S$ . (т.е.  $(\cdot)S = (\cdot)G$  по условию)

тогда  $\overset{\frown}{AS} = \overset{\frown}{SB}$  т.к.  $\angle FCB = \angle FCA$

тогда  $SE$  - с.п.к. к  $AB \Rightarrow \angle AFE = 90$

т.к.  $FE \parallel BC$  (средняя линия) то  $\angle AFE = \angle ABC$

$\angle ABC = 90 \Rightarrow \Delta ABC$  - прямоугольный

$\Delta FBC$  - прямоугольный

$\Delta SFD$  - прямоугольный

$FE \parallel SE \parallel BC \Rightarrow \angle FSC = \angle FCB \Rightarrow \Delta SFD \sim \Delta FBC$

$$\frac{SF}{FD} = \frac{FC}{FB} \quad \& \quad \frac{BC}{BF} = \frac{SD}{DF} \Rightarrow BC \cdot DF = SD \cdot BF$$

$$\text{и } S_{\Delta BCF} = 16 S_{\Delta DGF} \Rightarrow \frac{\sin(90) \cdot FD \cdot SD}{2} = \frac{16 \cdot \sin(90) \cdot FB \cdot BC}{16}$$

$$FD \cdot SD = 16 (FB \cdot BC)$$

отражса 3



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

I

Запишем условие  $y = x^5 + ax$  где ~~каждый~~ парочек

$$A: 3b = (-b)^5 + (-b) \cdot a$$

$$3 = -b^4 - a$$

$$B: c = (3c)^5 + c \cdot a$$

$$1 = 3c^4 + a$$

$$\begin{cases} 1 = 3b^4 + a \\ 3 = -b^4 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = +3b^4 + a \\ 9 = -3b^4 - 3a \end{cases}$$

ложим

$$1 = 3b^4 + 5$$

$$3b^4 = 6$$

$$b^4 = 2$$

$$b = \sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$$

$$10 = -2a$$

$$a = -5$$

$$AB = \sqrt{(A_y - B_y)^2 + (A_x - B_x)^2}; A_y = 3b; A_x = -b; B_y = b; B_x = 3b$$

$$AB = \sqrt{(2b)^2 + (2b)^2} = \sqrt{4b^2 + 4b^2} = \sqrt{8b^2} = 2b \cdot \sqrt{2} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{16} = \sqrt[4]{800}$$

II путь ~~мы~~ получим такую же элементарную  $\begin{cases} 1 = 3b^4 + a \\ 3 = -b^4 - a \end{cases}$ , соответственно ответ будет тем же, т.к. мы получим B:  $-c = (-3c)^5 - ac$

что эквивалентно

$$B: c = (3c)^5 + ac \text{ из п. I}$$

$$\text{Ответ: } AB = \sqrt[4]{800}; a = -5$$

страница 6

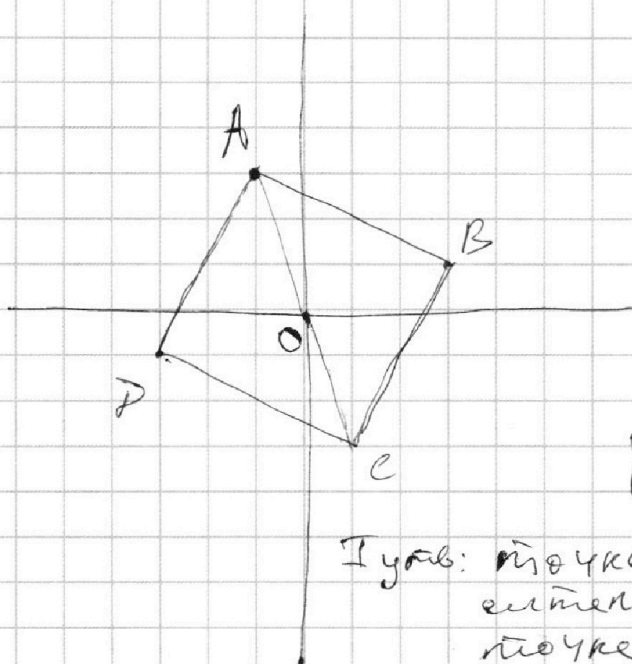
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



пусть диагональ  
AC лежит на  $y = -3x$   
поскольку  $AC \perp BD$   
BD лежит на  $y = \frac{1}{3}x$   
пусть  $A_y = 3b$

тогда  $A_y = -3A_x$   
 $A_x = -\frac{A_y}{3} = -b$

$$A(-b; 3b)$$

Пусть: точка C симметрична относительно начала координат точке A, значит  $C_x = -A_x$   
 $C_y = -A_y$

$$C(b; -3b)$$

пусть  $B_y = c$

т.к. BD лежит на  $y = \frac{1}{3}x$

$$B_y = \frac{1}{3}B_x \Rightarrow B_x = 3c \quad B(3c; c)$$

аналогично I утв.  $D(-3c; c)$

Теперь заметим,  $AO^2 = BO^2$

$$A_y^2 + A_x^2 = B_y^2 + B_x^2$$

$$10b^2 = 10c^2 \Rightarrow \begin{cases} b=c & \text{I} \\ b=-c & \text{II} \end{cases}$$

страница 5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = \frac{5}{b} = c + \frac{5}{a}$$

$$c = \frac{5}{b} + \frac{a^2 - 5}{a} = \frac{5a + a^2b - 5b}{ab}$$

$$\text{тогда } abc = 5a + a^2b - 5b$$

пусть  $x = abc$ , минимуму выражения  $x$

$$\text{пусть } f(a) = x = 5a + a^2b - 5b \quad (b - \text{параметр})$$

$$f'(a) = 5 + 2ab = 0 \Rightarrow a = \frac{-5}{2b}$$

$$\text{пусть } f(b) = x = 5a + a^2b - 5b \quad (a - \text{параметр})$$

$$\text{тогда } f'(b) = a^2 - 5 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{5} = \frac{-5}{2b}$$

$$2b = \frac{-5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$$

$$b = -\frac{\sqrt{5}}{2}; \quad a = \sqrt{5}; \quad c = -2\sqrt{5}$$

$$abc = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

ответа 10

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a^2b^3 + 10ab^2 - 10a^2b - a^3b^2 - 25a + 25b - 5b^3 + 5ab + 5a^2b + 25a - 25b$$

$$a^2b^3 + 10ab^2 - 5a^2b - a^3b^2 - 5b^3 + 5ab$$
~~$$-a^2b^3 + 5ab^2 - 5a^2b$$~~

~~$$+ 5ab^2 - 10a^2b - a^3b^2 - 5b^3 + 5ab$$~~
~~$$+ 5b^3 - 25ab - 5a^2b^3$$~~

~~$$15ab^3 - 10a^2b - a^3b^2 + 20ab - 5a^2b^3$$~~
~~$$- 5ab^4 + 5a^2b + a^3b^3$$~~

$$a^2b^3 + 5ab^2 - 5b^3 + 5ab$$

~~$$- a^2b^3 - 5ab^2 + 5b^3$$~~

$$5ab$$

$$\begin{array}{r} a^2b + 5a - 5b \\ \hline -5 + ab \end{array} \quad ab^2$$

$$x(b^2 - ab - 5) + 5ab = 0$$

$$5ab$$

$$x = \frac{5ab}{5 + ab - b^2} \quad a \neq b$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$abc + 5c = b^2c + 5b$$

$$a^2bc + 5ac = ab^2c + 5ab = abc^2 + 5bc$$

$$\Leftrightarrow c = a + k$$

$$ab(a^2 + 2ak + k^2)$$

$$a^2b(a+k) + 5a(a+k) = ab^2(a+k) + 5ab = ab(a+k)^2 + 5b(a+k)$$

$$a^3b + a^2bk + 5a^2 + 5ak = a^2b^2 + ab^2k + 5ab = ~~a^2b^2~~$$

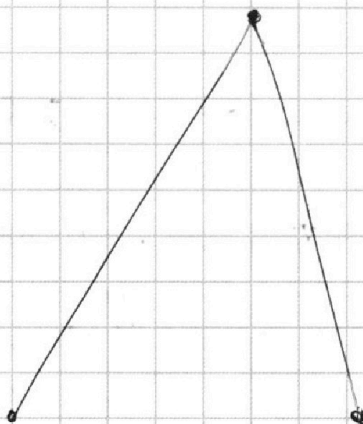
$$= a^3b + 2a^2bk + abk^2 + 5ab + 5bk$$

$$ab(a+k) = a^2b + abk$$

$$1 + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + 5$$

$$\frac{5}{b} = c + 4$$

$$5 = bc + 4b$$



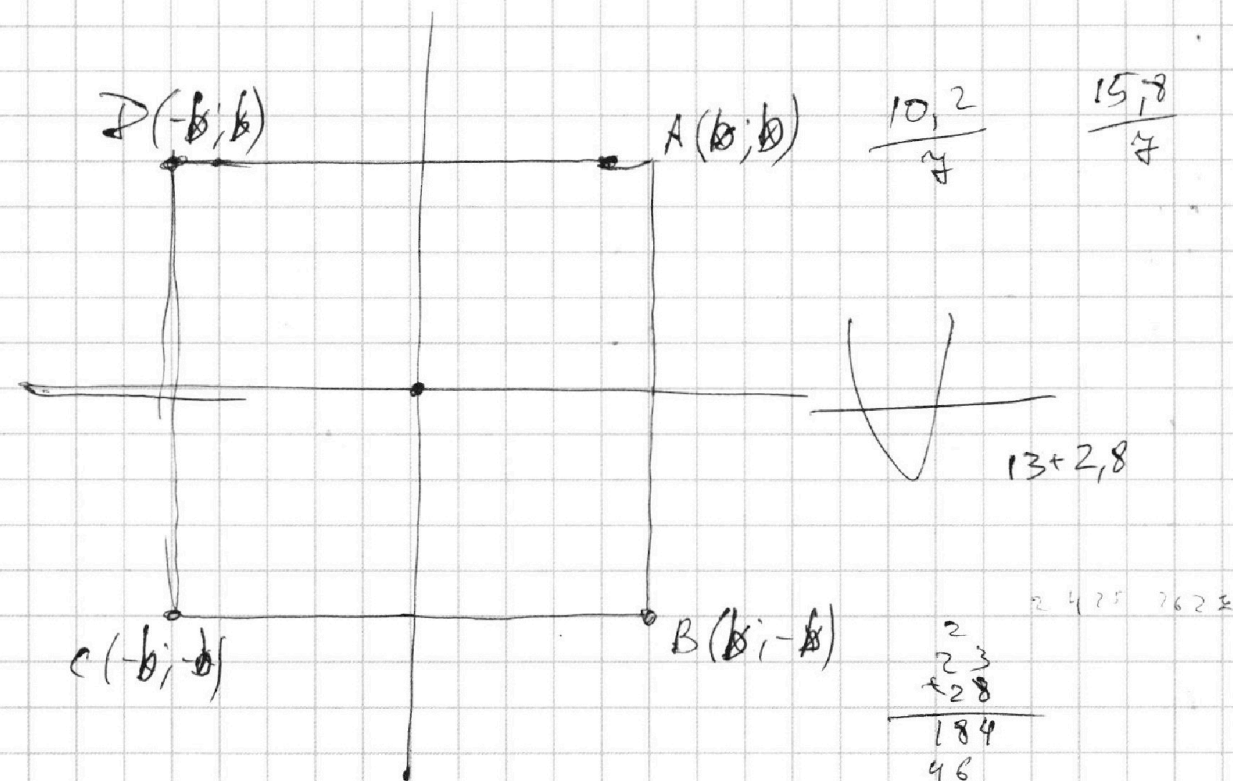
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$b = b^5 + ab$$

$$1 = b^4 + a$$

$$b = -b^5 - ab$$

$$1 = -b^4 - a$$

$$\sqrt{b^7 - b^5} = ab$$

$$\sqrt{b^7 + b^5} = ab$$

$$y^2 - 26y + 23 < 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 23 \\ +28 \\ \hline 184 \\ 46 \\ \hline 844 \\ \times 88 - 94 = 0 \\ x = 6 \end{array}$$

X	y
6	2

$$y < \frac{26 + \sqrt{676 - 644}}{14}$$

$$\frac{26 - \sqrt{32}}{14} < y < \frac{26 + \sqrt{32}}{14}$$

$$\frac{26 - 4\sqrt{2}}{14} < y < \frac{26 + 4\sqrt{2}}{14}$$

$$\frac{13 - 2\sqrt{2}}{7} < y < \frac{13 + 2\sqrt{2}}{7}$$

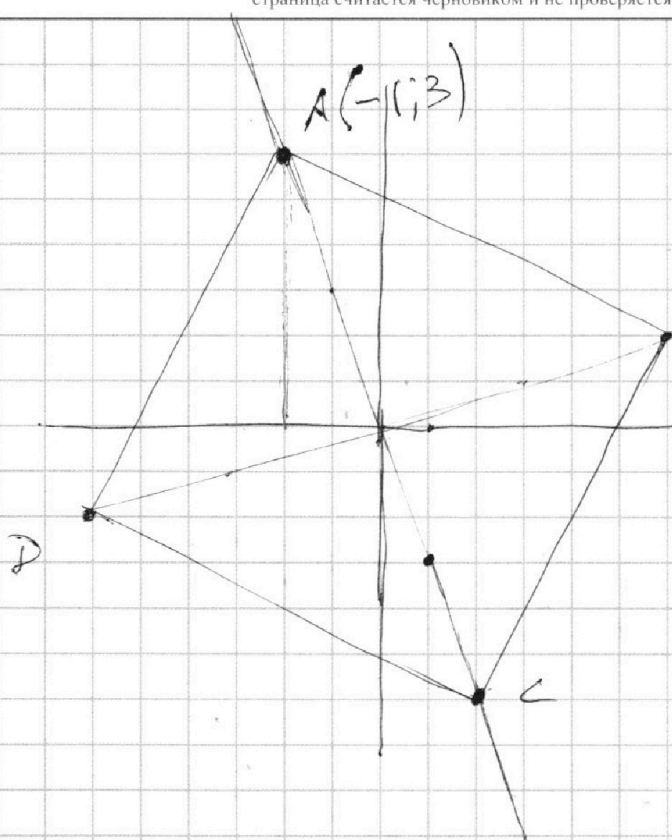
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$A(-b; 3b)$   
 ~~$B(3c; c)$~~   
 ~~$C(3b; -b)$~~

$B(3|1)$   $1; -3$   
 $3; 1$   
 $(3b)^2 + (b)^2 = (3c)^2 + c^2$

$10b^2 = 10c^2$   
 $b^2 = c^2$

~~$A(\frac{3}{b} - 3b/b)$~~   
 ~~$B(3c; c)$~~   
 ~~$C(3b; -b)$~~   
 ~~$D(-3c; c)$~~

$y = -3x$   
 $y = \frac{1}{3}x$

A:  $b = (-3b)^5 - 3ab$   
B:  $c = (3c)^5 + 3ac$   
C:  $-b = (3b)^5 + 3ab$   
D:  $-c = (-3c)^5 - 3ac$

$b = -243b^5 - 3ab$

$1 = -243b^4 - 3a$

$c = 243c^5 + 3ac$

$1 = 243c^4 + 3a$

$3 = -b^4 - a$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 25 \\ \hline 160 \\ 64 \\ \hline 800 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 74y - 94 = 0$$

$$x = \frac{13y-27 \pm \sqrt{169y^2 + 729 - 702y + (94-44y)(y-2)}}{2y-4}$$

$$x = \frac{13y-27 \pm \sqrt{125y^2 - 520y + 541}}{2y-4}$$

$$125y^2 - 520y + 541 = k^2$$

$$\begin{array}{r} +88 + 94 - 702 \\ 702 \\ \hline 182 \\ \hline 520 \end{array}$$

$$13y - 27 \equiv k \pmod{2y-4}$$

$$y-1 \equiv k \pmod{2y-4}$$

$$y^2 - 2y + 1 \equiv 125y^2 - 520y + 541 \pmod{2y-4}$$

$$\begin{array}{r} \cdot 12 \\ 729 \\ - 188 \\ \hline 541 \end{array}$$

$$y^2 - 2y + 1 + 2y - 4 \equiv 125y^2 - 520y + 541 + 520y - 1040$$

$$y^2 - 3 \equiv 125y^2 - 499 \pmod{2y-4}$$

$$124y^2 \equiv 496 \pmod{2y-4}$$

$$\begin{array}{r} 1040 \\ - 541 \\ \hline 499 \end{array}$$

$$b = sa$$

$$c = s^2 a$$

$$abc = a^3 \cdot s^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$51 \cdot 101 = 51 + 5100 = 5151$$

$$as = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

~~$$1 \dots 2^{50} \cdot 3^{100}$$~~



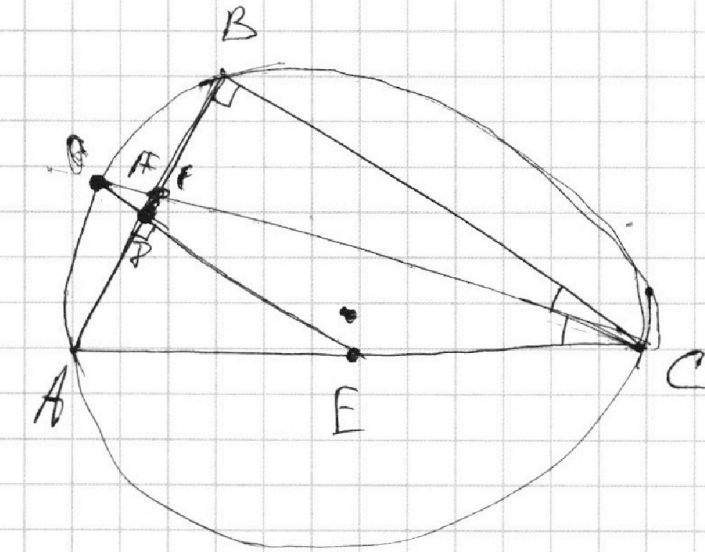
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

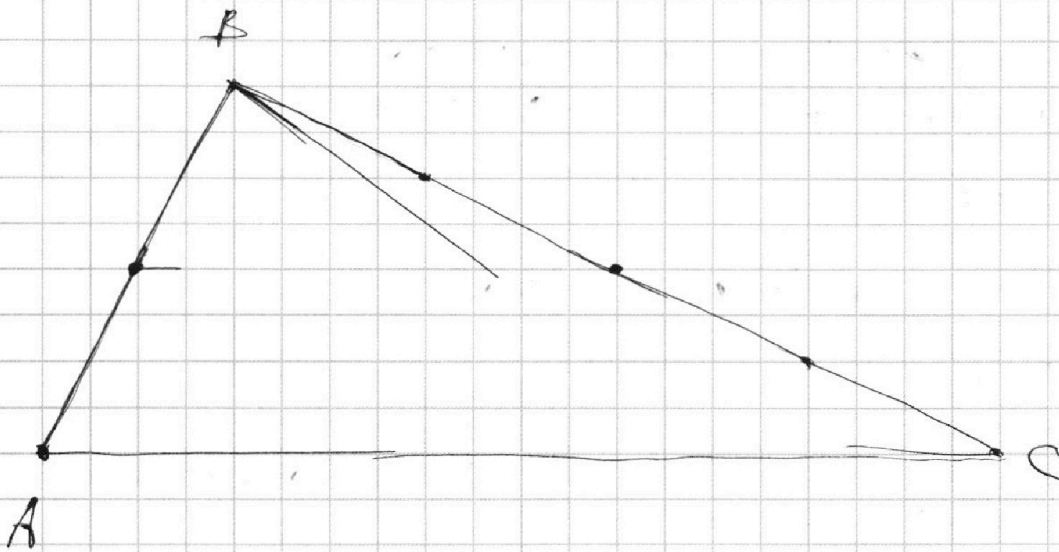


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{\Delta BCF} = 16 S_{\Delta DGF}$$

$$\frac{FB}{FC} = \frac{FD}{SF}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|$$

~~I  $x^3 + 4 \geq 0$~~

I  $x \geq 1$

~~$x^3 + 4 \geq 0$~~   
 ~~$x^2 - 1 \geq 0$~~

~~$x^3 - x^2 + 5 \geq 0$~~

$x^3 - x^2 + 5 \geq 0$

$x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$

$x^2 + 3 \leq -x^2 + 5$

$2x^2 \leq 2$

$x^2 \leq 1$

$x \leq 1$

$x = 1$

II  ~~$-1 < x < 1$~~

$-1 < x < 1$

$0 \leq x^2 < 1$

$x^3 + 4 \geq 0$

$x^2 - 1 \leq 0$

$0 \leq 3 < x^3 - x^2 + 5 < 6$

$-1 - 1 + 5$

$x^3 + 4 - x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 + 5$

$-x^2 + 5 \leq -x^2 + 5$

$0 \leq 0$

$x \in (-1; 1]$

III  $x \leq -1$

$x^3 \geq -1$

$x^3 \leq -1$

$x^3 - x^2 + 5 \leq -1 - 1 + 5 = 3$

~~$x^3 - x^2 + 5 \geq 0$~~

$x \leq -1$

~~$x^3 + 4 \leq 0$~~

$x^3 + 4 \leq 0 ; x \leq -1$

$x < \sqrt[3]{-4} ; x^2 \geq 1$

$x^2 < \sqrt[3]{16}$

$x^3 - x^2 + 5 = (x^3 + 4) + (1 - x^2)$

$x^3 + 4 < 0$

$1 - x^2 < 0$

$x^3 - x^2 + 5$

~~$x^3 + 4 \leq 0$~~

~~$x^3 + 4 \leq 0$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



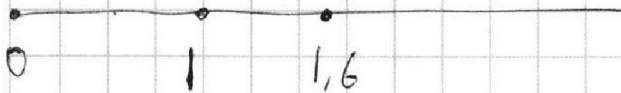
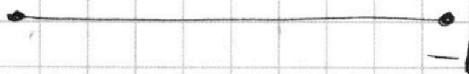
$$I$$
$$4 - k^3 > 0$$

$$2^2 \times 2^3$$
$$4$$

$$\begin{array}{r} +16 \\ +16 \\ \hline 256 \\ +16 \\ \hline 1536 \\ \hline 4096 \end{array}$$

$$1 < k < \sqrt[3]{4} \approx 2^{\frac{2}{3}} \approx 1,6$$

$$5 - 1 - 1 \rightarrow 5 - k^2 - k^3 \rightarrow 5 - \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} \cdot 4 = 1 - \sqrt[3]{16}$$



$$5 - k^2 - k^3 > 0$$

$$5 > k^2(1+k)$$

$$5 - k^2(1+k) > 0$$

~~$$5 - k^2(k-1) > 0$$~~

$$5 > k^3 + k^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$169y^2 + 429 + 402y - 176y^2 - 452 + 228y$$

$$X = \frac{13y - 24 \pm \sqrt{26y - 23 - 7y^2}}{2y - 4}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 189 \\ 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$26y - 23 - 7y^2 = k^2$$

$$13y - 24 \equiv k \pmod{2y - 4}$$

$$y - 1 \equiv k \pmod{2y - 4}$$

$$y^2 - 2y + 1 \equiv 26y - 23 - 7y^2 \pmod{2y - 4} - 452$$

$$y^2 - 2y + 1 + 2y - 4 \equiv 26y - 23 - 7y^2 - 26y + 52$$

$$y^2 - 3 \equiv 29 - 7y^2 \pmod{2y - 4}$$

$$8y^2 \equiv 32 \pmod{2y - 4}$$

$$8y = s(2y - 4) + 32$$

$$4y^2 = s(y - 2) + 16$$

$$4y^2 \equiv 16 \pmod{y - 2}$$

$$4y^2 - 5y + (2s - 16) = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 32s + 256}}{8}$$

$$y = \frac{s \pm (s - 16) \sqrt{25 - 32s}}{8}$$

~~$$y = \frac{y - 2 \pm \sqrt{4y^2 - 4y + 256}}{8}$$~~

~~$$y = \frac{s \pm \sqrt{s^2 + 256}}{8}$$~~

$$\left[ \begin{array}{l} y = \frac{2s - 16}{8} \\ y = \frac{16}{8} \end{array} \right.$$

~~$$(s - 8)$$~~

$$8 \cdot \frac{(s - 8)(s - 8)}{16} \equiv x \pmod{\frac{s - 8}{2} - 4} \left[ \begin{array}{l} y = \frac{s - 8}{4} \\ y = 2 \end{array} \right.$$

$$\frac{s^2 - 16s + 64}{2} \equiv x \pmod{\frac{s - 24}{2}}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 28 \\ \hline 184 \\ 46 \\ \hline 744 \end{array}$$

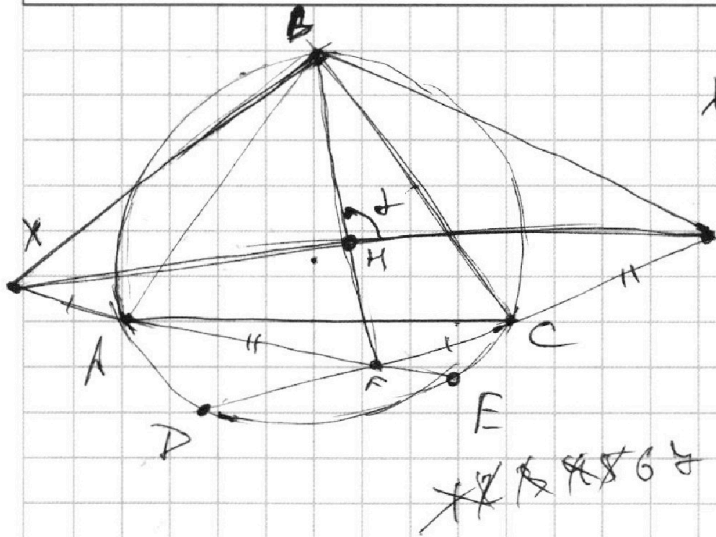
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$XY = 31$$

$$BF = 17$$

$$\sin 0 = 0$$

$$\sin 180 = 0$$

$$\sin 90 = 1$$

$$\sin 270 = -1$$

$S_{BXFY}$

$$2BH - BF =$$

$$= 2BH - BH - HF$$

$$BH - HF$$

$$\frac{BH \cdot HY \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{BH \cdot HX \cdot \sin(180 - \alpha)}{2}$$

$$+ \frac{HF \cdot HY \cdot \sin(180 - \alpha)}{2} + \frac{HF \cdot HX \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 31 \\ \hline 17 \\ 54 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$(BH \cdot HY \cdot \sin \alpha + BH \cdot (31 - HY) \cdot \sin \alpha \cdot$$

$$- (17 - BH) \cdot HY \cdot \sin \alpha + (17 - BH)(31 - HF) \cdot \sin \alpha) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{2} \left( \frac{BH \cdot HY - 31BH + BH \cdot HY - 17HY + BH \cdot HY}{+ 527 - 31BH - 17HY + BH \cdot HY} \right)$$

$$\frac{\sin \alpha}{2} (4BH \cdot HY - 62BH - 34HY + 527) \quad \begin{array}{l} 13 - 2\sqrt{2} \\ 7 \\ 7 < 13 - 2\sqrt{2} \end{array}$$

$$\frac{\sin \alpha}{2} (2BH - 17)(2HY - 31) \quad \begin{array}{l} 13 + 2\sqrt{2} < 21 \\ 2\sqrt{2} < 6 \end{array}$$

$$\frac{\sin \alpha}{2} (BH - HF)(HY - HX) \quad \begin{array}{l} 2\sqrt{2} < 8 \\ \sqrt{2} < 4 \\ 1,4523 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5} + \frac{5}{\frac{-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5} - \frac{10}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{-2\sqrt{5}} = \frac{-5-5}{2\sqrt{5}} = \frac{-10}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{1}$$

~~$$2\sqrt{5} + \frac{5}{\sqrt{5}}$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{5}{b} = c + \frac{5}{a}$$

$$c = \frac{5}{b} + a - \frac{5}{a} = \frac{5}{b} + \frac{a^2 - 5}{a} = \frac{5a + a^2b - 5b}{ab}$$

$$c = \frac{a^2b + 5a - 5b}{ab} \quad \text{тогда } abc = a^2b + 5a - 5b$$

$$b + \frac{5ab}{a^2b + 5a - 5b} = \frac{a^2b + 5a - 5b}{ab} + \frac{5}{a} = \frac{a^2b + 5a - 5b}{ab} + \frac{5b}{ab}$$

$$b + \frac{5ab}{a^2b + 5a - 5b} = \frac{a^2b + 5a}{ab}$$

$$\frac{a^2b^2 + 5ab - 5b^2 + 5ab}{a^2b + 5a - 5b} = \frac{a^2b + 5a}{ab} = \frac{abc + 5}{b}$$

$$a^2b^3 + 5ab^2 + 5b^3 + 5ab = a^3b^2 + 5a^2b - 5ab^2 + 5a^2b + 25a + 25b$$

$$a^2b^3 + 10ab^2 - 10a^2b - a^3b^2 - 25a + 25b - 5b^3 + 5ab = 0$$

пусть  $x = a^2b + 5a - 5b$ , можно переписать как

$$x(b^2 - ab - 5) + 5ab = 0$$

$$x = \frac{5ab}{5 + ab - b^2}$$

$$5 + 2ab = 0$$

$$a^2 - 5 = 0$$

$$5 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}$$

$$5\sqrt{5} + 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{5}{-2\sqrt{5}} = \frac{-10}{\sqrt{5}} = -2\sqrt{5}$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

~~ответа 10~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = \frac{s}{4} - 2$$
$$26y = \frac{26s}{4} - 52 = \frac{13s}{2} - 52$$
$$4y^2 = 4 \cdot \left( \frac{s^2}{16} - s + 4 \right) = \frac{s^2}{4} - 4s + 16$$

$s$  - целое

$$x = \frac{13s}{4} - 26 - 24 - \sqrt{\frac{13s}{2} - 52 - 23 - \frac{s^2}{16} + 4s - 28}$$
$$\frac{\frac{s}{2} - 8}{2}$$

$$x = \frac{13s - 212 - \sqrt{216s - 1648 - s^2}}{2s - 16}$$

$$y = \frac{2s - 1}{8}$$

$$216s - 1648 - s^2$$

$$\frac{s^2 - 16s + 64}{2} = s \left( \frac{s - 24}{2} \right) + x$$

$$\frac{s^2 - 16s + 64}{2} = \frac{s^2 - 24s}{2} + x$$

$$32 = \frac{8s}{2} + x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|4 - k^3| + k^2 - 1 \leq |5 - k^2 - k^3|$$

$$k^2 - 1 \leq |5 - k^2 - k^3| - |4 - k^3|$$
$$5 - k^2 - k^3 = (4 - k^3) - (k^2 - 1)$$

$$4 - k^3 \geq 0$$

$$k^2 - 1 \geq 0$$

$$4 - k^3 \leq 0$$

$$5 - k^2 - k^3 \leq 0$$

$$4 - k^3 + k^2 - 1 \leq |5 - k^2 - k^3|$$

$$-k^3 + k^2 + 3 \leq |5 - k^2 - k^3|$$

I при  $5 - k^2 - k^3 \geq 0$

$$-k^3 + k^2 + 3 \leq 5 - k^2 - k^3$$

$$2k^2 \leq 2$$

$$k \leq 1 \quad \emptyset$$

$$5 - k^2 - k^3 \leq 0$$

$$-k^3 + k^2 + 3 \leq k^3 + k^2 - 5$$

$$2k^3 \geq 8$$

$$k^3 \geq 4$$

$$k \geq \sqrt[3]{4} \quad \emptyset$$

$$4 \frac{1}{8} \times \frac{6}{3}$$

~~$$4 \frac{1}{8} \times \frac{6}{3}$$~~

$$996 + 99 \leq 995$$

$$1 < k < \sqrt[3]{4}$$

где все  $k \geq \sqrt[3]{4}$  возможны

~~невозможны~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1 \Rightarrow \frac{5}{b} = c + 5$$

$$c = \frac{5}{b} - 4$$

$$b + \frac{5}{\frac{5}{b} - 4} = \frac{5}{b} - 4 + 5$$

$$a = 1$$

$$b \neq \frac{5}{4}$$

$$b \neq 0$$

$$b + \frac{5b}{5 - 4b} = \frac{5}{b} + 1$$

$$b - 1 = \frac{5}{b} - \frac{5b}{5 - 4b} = \frac{25 - 20b - 25b}{5b - 4b^2}$$

$$b - 1 = \frac{25 - 45b}{5b - 4b^2}$$

$$5b^2 - 4b^3 - 5b + 4b^2 = 25 - 45b$$

$$-4b^3 + 9b^2 + 40b - 25 = 0$$

$$4b^3 - 9b^2 - 40b + 25 = 0$$

$$4 - 9 - 40 + 25$$

$$32 - 36 - 80 + 25$$

$$c = \frac{5}{b} + a - \frac{5}{a}$$

$$b + \frac{5ab}{5a + a^2b - 5b} = \frac{5a + a^2b}{ab}$$

$$c = \frac{5}{b} + \frac{a^2 - 5}{a} = \frac{5a + a^2b - 5b}{ab}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b + \frac{5ab}{a^2b + 5a - 5b} = \frac{5 + ab}{b} \quad a \quad c = \frac{a^2b + 5a - 5b}{ab}$$

$$\frac{a^2b^2 + 5ab - 3b^2 + 5ab}{a^2b + 5a - 5b} = \frac{5 + ab}{b} \quad \cancel{a^2b + 5a - 5b}$$

$$\frac{a^2b^2 + 10ab - b^2}{a^2b + 5a - 5b} = \frac{5 + ab}{b}$$

$$a^2b^3 + 10ab^2 - b^3 = 5a^2b + 25a - 25b + a^2b^2 + 5a^2b - 5ab^2$$

$$a^2b^3 + 15ab^2 - b^3 - 10a^2b + 25a - 25b + a^3b^2 = 0$$

~~$$a^5 + 15a^3 - a^3 - 10a^3 + 25a - 25a + a^5 = 0$$~~

~~$$2a^5 + 4a^3 = 0$$~~

$$a \neq b \neq c$$

~~$$a^2 + 2 = 0$$~~

$$a^2b + 5a - 5b = \min$$

~~$$2a^3(a^2 + 2) \neq 0$$~~

$$a^2b + 5a - 5b = X$$

$$5x = 5a^2b + 25a - 25b \quad x(5 + b^2 + ab) + 15ab^2 + 4b^2 + 20a^2b = 0$$

$$a^2b^3 + 15ab^2 - b^3 - 15a^2b + 5x + a^3b^2 = 0$$

$$a^2b^3 + 15ab^2 - b^3 - 10a^2b + 25a - 25b + a^3b^2 - 5a^2b - 25a + 25b$$

$$a^2b^3 + 15ab^2 - b^3 - 15a^2b + a^3b^2$$

$$a^2b^3 - 5ab^2 + 5b^3$$

$$10ab^2 + 4b^3 - 15a^2b + a^3b^2$$

$$+ 5ab^2 \quad - 5a^2b - a^3b^2$$

$$15ab^2 + 4b^3 - 20a^2b$$

~~$$+ 20a^2b + 100a + 100b$$~~

$$\begin{array}{l} a^2b + 5a - 5b \\ \hline 5 + b^2 + ab \end{array}$$

~~$$15ab^2$$~~

$$x = \frac{20a^2b - 4b^2 - 15ab^2}{5 + b^2 + ab}$$