



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?
3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.
6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$a = x^3 - 9, \quad b = x^2 - 1 \Rightarrow |x^3 - 9| + |x^2 - 1| = |a| + |b|$$
$$|x^3 - x^2 - 8| = |a - b| \Rightarrow |a| + |b| \leq |a - b|$$

1) $a \geq 0, b \geq 0$

I) $a \geq b$.

$$a + b \leq a - b$$

$$2b \leq 0 \Rightarrow b = 0.$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1, \text{ но тогда } a < 0.$$

II) $a < b$.

$$a + b \leq b - a$$

$$2a \leq 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9}$$

$$(\sqrt[3]{9})^2 - 1 \geq 0$$

$$\sqrt{81} \geq 1.$$

$$81 \geq 1, \text{ значит } x = \sqrt[3]{9}, \text{ подходит}$$

2) $a \geq 0, b < 0$

$$a - b \leq a - b \quad (a - b \geq 0)$$

Но если $b < 0$, то $x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1; 1) \Rightarrow x^3 - 9 < 0$
 \downarrow
 $a < 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 1.

3) $a < 0, b \geq 0$.

$$-a + b \leq b - a.$$

Если $a < 0 \Rightarrow x^3 - a < 0 \Rightarrow x < \sqrt[3]{a}$, но т.к.

$b \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in [1; +\infty) \cup (-\infty; -1] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < \sqrt[3]{a} \\ x \in [1; +\infty) \cup (-\infty; -1] \end{cases} \Rightarrow x \in [1; \sqrt[3]{a}) \cup (-\infty; -1]$$

4) $a < 0, b < 0$.

~~$-a - b$~~ I) $a \leq b$.

$$-a - b \leq b - a.$$

$$-2b \leq 0, \text{ но } b < 0.$$

II) $a > b$.

$$-a - b \leq a - b$$

$$-2a \leq 0, \text{ но } a < 0.$$

Ответ: $x \in [1; \sqrt[3]{a}] \cup (-\infty; -1]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

a, b, c

Т.к. это геометрическая прогрессия, то

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow c = \frac{b^2}{a}$$

$$abc = a \cdot b \cdot \frac{b^2}{a} = b^3 = 5^{360} \cdot 7^{90} \Rightarrow b = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

Т.к. c - натур., то $b^2 : a \Rightarrow a = 5^p \cdot 7^q$, где

$0 \leq p \leq 240$, $0 \leq q \leq 60$. \Rightarrow значит есть

241 вариант для p и 61 вариант для q .

Ответ: $241 \cdot 61$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$t = y - 3$$

1) $t \neq 0$

$$x^2 t - x(11t - 1) + (32t - 5) = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 121t^2 - 22t + 1 - 4t(32t - 5) = \\ &= 121t^2 - 22t + 1 - 128t^2 + 20t = -7t^2 - 2t + 1 \end{aligned}$$

~~Т.к. такое x существует~~

Т.к. такое x существует $\Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow -7t^2 - 2t + 1 \geq 0$.

$-7t^2 - 2t + 1 \geq 0$ (t лежит между корнями,

$$D = 4 + 4 \cdot 7 = 4 \cdot 8 = 32. \quad \text{Т.к. параболы ветви направлены вниз}$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}}{-14} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{-7} = -\frac{1 \pm \sqrt{2}}{7}$$

Т.к. y — целое, то и t — целое.

$$-\frac{1 + \sqrt{2}}{7} > -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{7} < 1$$

$$\sqrt{2} < 6.$$

$$-\frac{1 - \sqrt{2}}{7} < 1$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{7} > -1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} > -7 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит, $-1 < t < 1 \Rightarrow$ а t - целое $\Rightarrow t=0$, но

этот случай мы не рассматриваем.

2) $t=0$

$$x-5=0 \Rightarrow x=5.$$

Ответ: $(x=5; y=3)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\frac{CF \cdot \sin d}{\cos 2\alpha}}{CF \cdot \sin d} = \frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{7DF}{5DF} = \frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{5}{7} \Rightarrow \text{т.к. } \cos 2\alpha > 0, \text{ и } \alpha < 90^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha < 180^\circ, \text{ то } 2\alpha = \arccos \frac{5}{7}$$

$$\text{Ответ: } \angle ABC = 90^\circ, \angle ACB = \arccos \frac{5}{7},$$

$$\angle CAB = 90^\circ - \arccos \frac{5}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

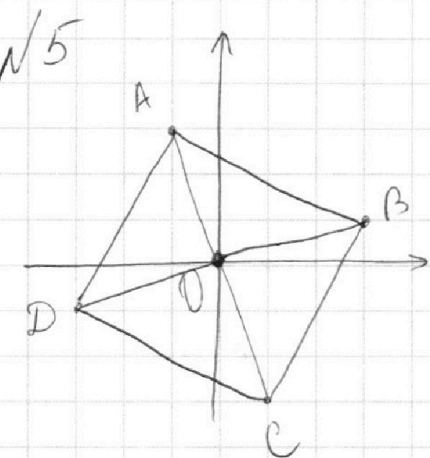
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $A(p, q)$, тогда C как центрально противоположная имеет координаты $C(-p, -q)$. Аналогично $B(k, l)$ и $D(-k, -l)$ (если $p < 0$ или $k < 0$, то переобозначим точки)

1) AC на $y = 2x$, т.к. $AC \perp BD$, то BD на

$$y = -\frac{1}{2}x$$

$$q = 2p, \quad l = -\frac{1}{2}k$$

$$y = -x^5 + ax$$

подставляем A

$$q = -p^5 + ap$$

$$2p = -p^5 + ap$$

$$2 = -p^4 + a$$

$$p^4 = a - 2$$

$$y = -x^5 + ax$$

подставляем B

$$l = -k^5 + ak$$

$$-\frac{1}{2}k = -k^5 + ak$$

$$-\frac{1}{2} = -k^4 + a$$

$$k^4 = a + \frac{1}{2}$$

т.к. ABCD - квадрат, то $AC^2 = BD^2$

$$AC^2 = 4p^2 + 4q^2 = 20p^2; \quad BD^2 = 4k^2 + 4l^2 = 5k^2$$

$$5k^2 = 20p^2 \Rightarrow k^2 = 4p^2 \Rightarrow k^4 = 16p^4 \Rightarrow a + \frac{1}{2} = 16(a - 2)$$

$$-15a = 32 + \frac{1}{2} \Rightarrow 15a = \frac{65}{2} \Rightarrow a = \frac{13}{6}$$

$$AB^2 = (k-p)^2 + (q-l)^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k > 0, p > 0 \Rightarrow k = 2p \text{ (из } k^2 = 4p^2)$$

$$q = 2p, \quad l = \frac{1}{2}k = -p.$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= p^2 + 9p^2 = 10p^2 = 10\sqrt[2]{p^4} = 10\sqrt[2]{\frac{13}{6} - 2} = \\ &= 10\sqrt[2]{\frac{1}{6}} = \frac{10}{\sqrt[2]{6}} = \frac{10\sqrt[2]{6}}{6} = \frac{5\sqrt[2]{6}}{3}. \end{aligned}$$



2) ВД на $y = 2x$. Аналогично, предыдущему случаю.

Ответ: $a = \frac{13}{6}$, сторона квадрата $-\sqrt{\frac{5\sqrt[2]{6}}{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0.$$

1) $a = b$.

$$a + \frac{7}{a} = a + \frac{7}{c} \Rightarrow a = c = b. \text{ Противоречие.}$$

2) $a \neq b$.

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c}$$

$$a - b = \frac{7}{c} - \frac{7}{b} \Rightarrow a - b = \frac{7(b-c)}{bc} \Rightarrow b - c = \frac{(a-b)bc}{7}$$

$$b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

$$b - c = \frac{7(c-a)}{ac} \Rightarrow c - a = \frac{(b-c)ac}{7}$$

$$c - a = \frac{(b-c)ac}{7} = \frac{(a-b)abc^2}{49}$$

$$c + \frac{7}{a} = a + \frac{7}{b}$$

$$c - a = \frac{7(a-b)}{ab} \Rightarrow \frac{(a-b)abc^2}{49} = \frac{7(a-b)}{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{abc^2}{49} = \frac{7}{ab} \Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 343 \Rightarrow \max abc = \sqrt{343}$$

Пример: $a = -2\sqrt{7}, b = \sqrt{7}, c = \frac{-\sqrt{7}}{2}$

$$abc = \sqrt{343}$$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} = -\sqrt{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

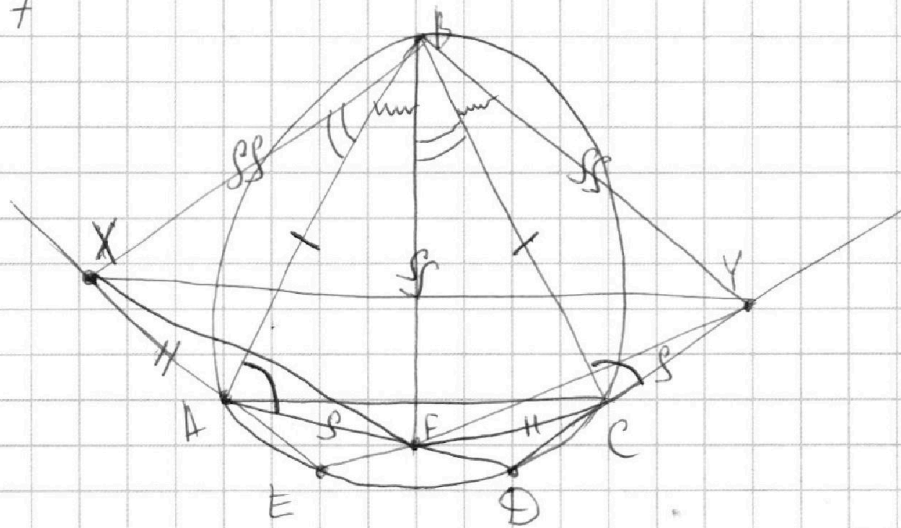
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7



$$AB = BC, AX = CF, CY = AF$$

$$\angle BCY = 180^\circ - \angle FCB = 180^\circ - (180^\circ - \angle BAF) = \angle BAF$$

\Downarrow

$$\triangle BAF = \triangle BCY \Rightarrow BF = BY$$

$$\angle XAB = \angle FCB \text{ (окапоуизно)} \Rightarrow \triangle XAB = \triangle BFC$$

\Downarrow

$$BX = BF$$

~~Решение задачи~~

$$\text{Т.к. } \triangle XAB = \triangle BFC \Rightarrow \angle XBA = \angle FBC$$

$$\triangle ABF = \triangle BCY \Rightarrow \angle ABF = \angle CBY$$

Пусть $\angle XBY = 2\beta$, тогда по теореме косинусов

$$XY^2 = BX^2 + BY^2 - 2 \cos 2\beta \cdot BX \cdot BY$$

$$XY = 36, BX = BY = BF = 19.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$36^2 = 19^2 + 19^2 - 2 \cdot \cos 2\beta \cdot 19^2$$

$$36^2 = 19^2(2 - 2 \cos 2\beta)$$

$$\left(\frac{36}{19}\right)^2 = 2 - 2 \cos 2\beta$$

$$2 \cos 2\beta = 2 - \left(\frac{36}{19}\right)^2$$

$$2 - \frac{36^2}{19^2} = \frac{2 \cdot 19^2 - 36^2}{19^2} = \frac{2 \cdot 361 - 1296}{19^2} = \frac{-574}{19^2}$$

$$\cos 2\beta = \frac{-287}{19^2}$$

$$\cos 2\beta = 1 - 2 \sin^2 \beta$$

$$1 - 2 \sin^2 \beta = \frac{-287}{19^2}$$

$$2 \sin^2 \beta = 1 + \frac{287}{19^2}$$

$$2 \sin^2 \beta = \frac{648}{361}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{324}{361}; \text{ T.K. } \beta < 90^\circ, \text{ то } \sin \beta > 0.$$

$$\sin \beta = \frac{18}{19}$$

$$S_{\Delta XBF} = S_{\Delta YBF} = \frac{1}{2} \cdot XB \cdot BF \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 19^2 \cdot \frac{18}{19} =$$

$$\Rightarrow \frac{18 \cdot 19}{2}$$

$$S_{BXFY} = S_{\Delta XBF} + S_{\Delta YBF} = \frac{18 \cdot 19}{2} + \frac{18 \cdot 19}{2} = 18 \cdot 19 = 342.$$

Ответ: 342.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \quad ; \quad \max abc$$

~~1) a+b, a+c, b+c~~
 $a - b = \frac{7}{c} - \frac{7}{b}$ ~~238~~ ~~21~~ ~~54~~ $a^2 b^2 c^2 = 343$

$$a - b = 7 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \quad \text{270.} \quad abc = \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$$

$$a - b = 7 \left(\frac{b - c}{bc} \right) \quad \text{297 2) } a = b.$$

$$b - c = \frac{(a - b)bc}{7} \quad \text{234} \quad a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c}$$

$$b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} \quad \text{231} \quad b - c = \frac{7}{a} - \frac{7}{c} \quad \frac{7}{b} = \frac{7}{c} \quad \downarrow \quad b = c = a.$$

$$b - c = \frac{7}{a} - \frac{7}{c} \quad b - \frac{\sqrt[3]{343}}{ab} = \frac{(a - b)bc}{7a}$$

$$\frac{(a - b)bc}{7} = \frac{7}{a} - \frac{7}{c} = 7 \cdot \frac{c - a}{ac} \quad \text{231} \quad a = 1, b = \sqrt[3]{7}, c = 7$$

$$c - a = \frac{(a - b)abc^2}{49} \quad \text{231} \quad a + \frac{7}{b} = 1 + \sqrt[3]{7}$$

$$a + \frac{7}{b} = c + \frac{7}{a} \quad \text{231} \quad b + \frac{7}{c} = \sqrt[3]{7} + 1$$

$$c - a = \frac{7}{b} - \frac{7}{a} \quad \text{231} \quad c + \frac{7}{a} = 14$$

$$\frac{(a - b)abc^2}{49} = 7 \cdot \frac{a - b}{ab} \quad \text{231} \quad abc = 343$$

$$\frac{abc^2}{49} = 7 \cdot ab \quad \text{231} \quad ab^2 - \sqrt[3]{343} = ab\sqrt[3]{7} - b^2\sqrt[3]{7}$$

$$ab^2 + b^2\sqrt[3]{7} = ab\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{343}$$

$$b^2(a + \sqrt[3]{7}) - b \cdot a\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{343} = 0$$

$$2c\sqrt[3]{7} = ac + a\sqrt[3]{7} \quad \text{231} \quad 2c = \sqrt[3]{7} + a.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

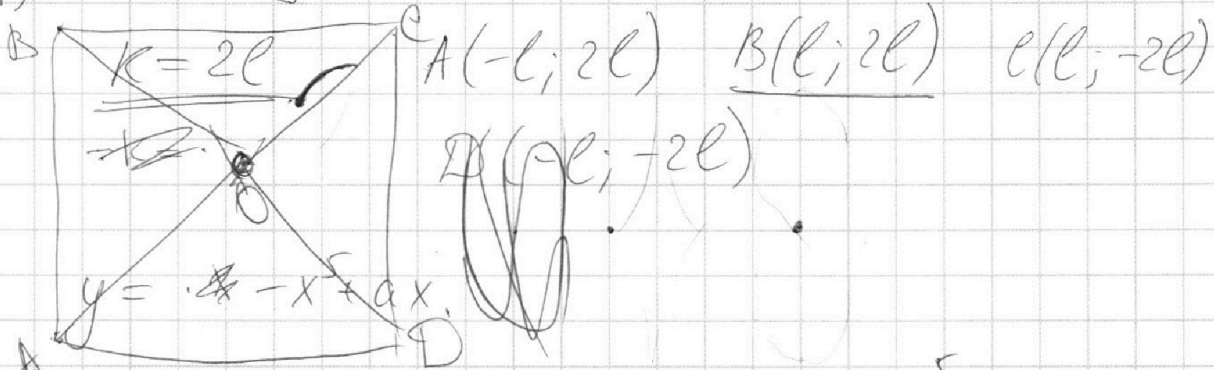
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

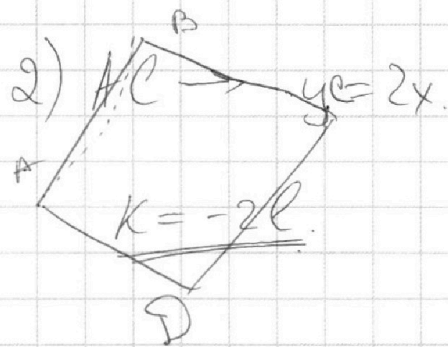
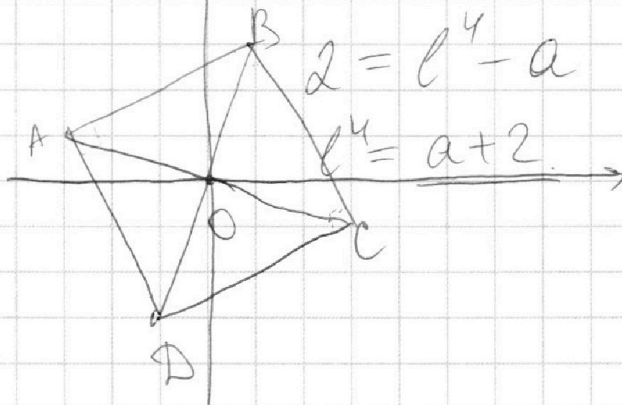
1) $BD \rightarrow y = 2x$



B: $2l = -l^5 + al$
 $2 = -l^4 + a$
 $l^4 = a - 2$

A: $2l = -(-l)^5 - al$
 $2l = l^5 - al$
 $2 = l^4 - a$

$a - 2 = a + 2$



A(-l; -2l) B(l; -2l)
 C(l; 2l) D(-l; 2l)

$y = -x^5 + ax$

C: $2l = -l^5 + al$
 $2 = -l^4 + a$
 $l^4 = a - 2$

~~A~~ B: $-2l = -l^5 + al$
 $-2 = -l^4 + a$

$l^4 = a - 2$

$a - 2 = -a - 2$

D: $2l = l^5 - al \Rightarrow l^5 = 2l + al \Rightarrow l^4 = a + 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$y = 3$

$-x(33-34) + 36-101=0$

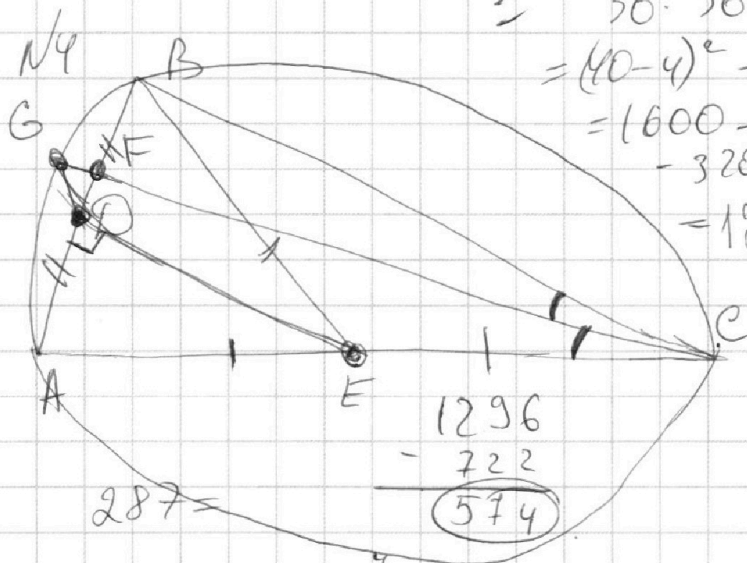
$$\begin{array}{r} 361 \\ x \quad 2 \\ \hline 722 \end{array}$$

$x - 5 = 0$

$x = 5$

$36 \cdot 36 =$
 $= (40-4)^2 = 1600 - 320 + 16 = 1296$

$a^2 = a^2 + da^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot a \cdot a \sqrt{2}$
 $a \sqrt{2} = -a^2 + 2a^2 - 2a^2 = a^2$



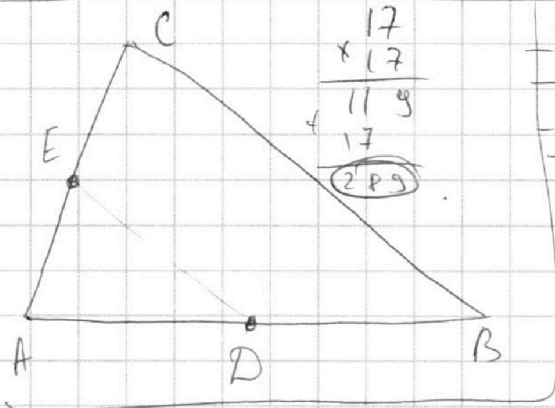
$19^2 = 361$

$36^2 = 1296$

$287 =$

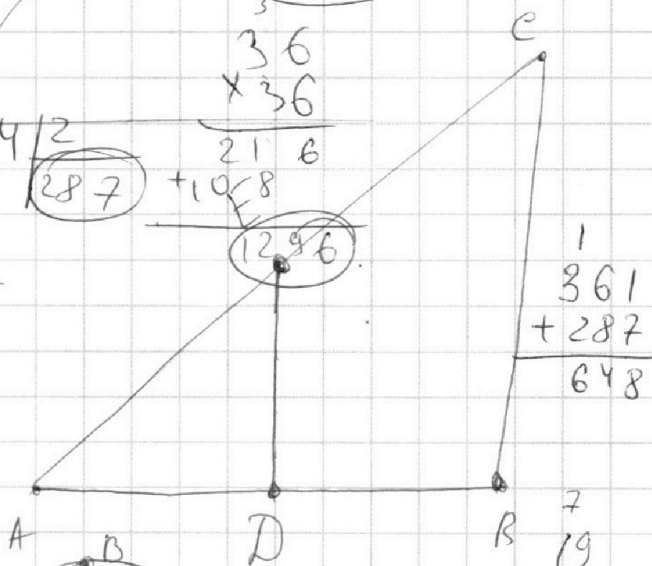
$$\begin{array}{r} 1296 \\ - 722 \\ \hline 574 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 36 \\ \hline 216 \\ + 1008 \\ \hline 1296 \end{array}$$



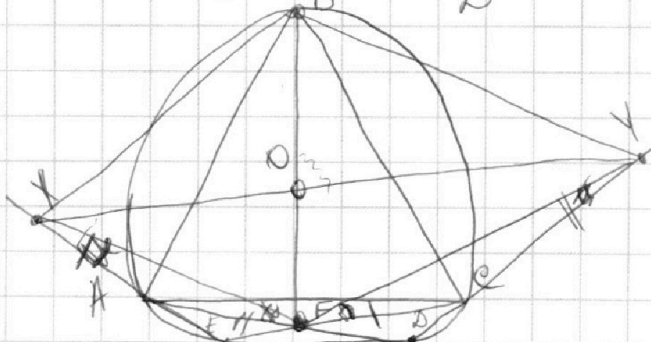
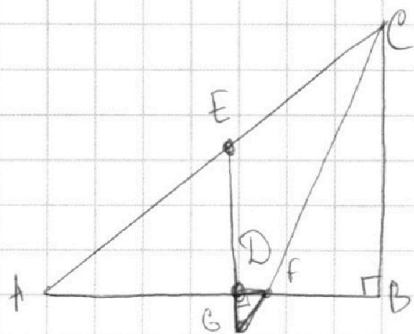
$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 170 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 574/2 \\ - 4 \\ \hline 17 \\ - 16 \\ \hline 14 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 216 \\ + 1008 \\ \hline 1296 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 361 \\ + 287 \\ \hline 648 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 152 \\ \times 18 \\ \hline 119 \\ \hline 342 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_{1,2} = \frac{11t - 1 \pm \sqrt{-7t^2 - 2t + 1}}{2t}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 28 \\ \hline 448 \\ + 112 \\ \hline 1568 \end{array}$$

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

~~cc~~

$$-7t^2 - 2t + 1 = -7(y-3)^2 - 2(y-3) + 1 = -7(y^2 - 6y + 9) - 2(y-3) + 1 = -7y^2 + 42y - 63 - 2y + 6 + 1 = -7y^2 + 40y - 56 \geq 0$$

$$D = 1600 - 4 \cdot (-7) \cdot (-56) = 1600 - 28 \cdot 56 = 1600 - 1568 = 32$$

$$y_{1,2} = \frac{-40 \pm 4\sqrt{2}}{-14} = \frac{-20 \pm 2\sqrt{2}}{-7}$$

$$= \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{20 + 2\sqrt{2}}{7} < 4$$

$$\frac{20 - 2\sqrt{2}}{7} > 2$$

$$20 + 2\sqrt{2} < 28$$

$$20 - 2\sqrt{2} > 14$$

$$2\sqrt{2} < 8$$

$$6 > 2\sqrt{2}$$

$$8 < 64$$

$$3 > \sqrt{2}$$

$$\cos x = \frac{5}{7}$$

$$abc(a+b+c) \neq$$

$$y=3, x \neq 0 \Rightarrow t=0$$

$$a^2bc + 7ac = ab^2c + 7ab =$$

$$abc(a-b) = \frac{7ab - 7ac}{7c(a-b)} = abc + 7bc = k$$

$7ab + 7bc^2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8| \quad b = 0.$$

$$1) \ x^2 > 9 \Rightarrow x^2 > 1$$

$$x = \pm 1, \text{ но } a < 0.$$

$$x^3 - 9 = a, \quad x^2 - 1 = b$$

⊗

$$|a| + |b| \leq |a - b| \quad \sqrt[3]{|a|} - 1$$

$$a = 0$$

$$x = \sqrt[3]{9}$$

$$b = (\sqrt[3]{9})^2 - 1$$

$$1) \ a \geq 0, \ b \geq 0, \ a \geq b$$

$$a + b \leq a - b \quad \Leftrightarrow x$$

$$(\sqrt[3]{9})^2 - 1 \geq 0$$

$$(\sqrt[3]{9})^2 \geq 1 \quad \text{Ⓥ}$$

$$134 + 24 \quad a + b \leq a - b$$

$$125 - 25 - 8 = b \leq -b$$

$$2b \leq 0 \Rightarrow b = 0$$

$$a \geq 0, \ b < 0$$

$$a + b \leq b - a$$

$$-1 < x < 1$$

$$a \leq -a \quad 2a \leq 0 \Rightarrow a = 0 \quad \Downarrow \quad a < 0.$$

$$3) \ a \geq 0, \ b < 0 \quad (-1; 1)$$

$$a - b \leq a - b \quad \text{Ⓥ}$$

$$a < 0, \ b \geq 0$$

$$4) \ a < 0, \ b \geq 0$$

$$-a + b \leq b - a \quad \text{Ⓥ}$$

$$x^3 < 9 \quad \Downarrow \quad x \in (-\sqrt[3]{9}; 1]$$

$$5) \ a < 0, \ b < 0, \ a < b$$

$$-a - b \leq b - a$$

$$-2b \leq 0 \quad \text{⊗}$$

$$\begin{array}{r}
 241 \\
 \times \quad 61 \\
 \hline
 241 \\
 + 1446 \\
 \hline
 14701
 \end{array}$$

$$c/b = a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(a, b, c) \quad abc = 5^{360} \cdot 7^{90}$$

$$d = \frac{b}{a}$$

$$a, b, \frac{b^2}{a}$$

$$abc = a \cdot b \cdot \frac{b^2}{a} = b^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$$

$$b = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

$$\frac{b^2}{a} = \frac{5^2 \cdot 7}{a} \quad 0,1,2$$
$$a = 5^p \cdot 7^q \quad 0 \leq p \leq 2$$
$$a = 7^7 \cdot 5^7 \cdot 7 \cdot 5^2 \quad 0 \leq p \leq 1$$
$$a = 5, 5^2 \quad a = 1$$

$\frac{b^2}{a}$ - катет, a - катет.

$$\frac{b^2}{a} = \frac{5^{240} \cdot 7^{60}}{a} \Rightarrow a = 5^p \cdot 7^q, \quad 0 \leq p \leq 240, 0 \leq q \leq 60$$

(x, y)

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$t = y - 3, \quad t \neq 0.$$

$$x^2 t - x(11t - 1) + (32t - 5) = 0$$

$$D = (11t - 1)^2 - 4t(32t - 5) =$$
$$= 121t^2 - 22t + 1 - 128t^2 + 20t =$$
$$= -7t^2 - 2t + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 7t^2 + 2t - 1 \leq 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 28}}{14} = \frac{-2 \pm \sqrt{32}}{14} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

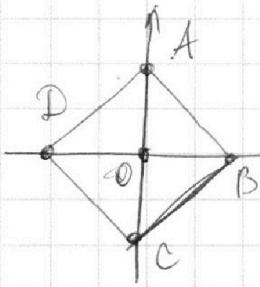
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

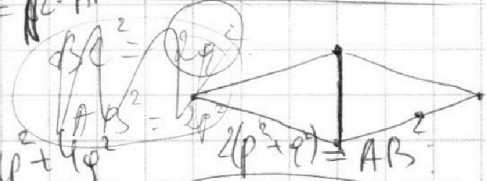


$O(0;0)$ ~~A B C~~

$A(-p; q)$ $B(p; q)$
 $C(p; -q)$ $D(-p; -q)$

~~AC: $y = -\frac{2q}{-2p} = \frac{q}{p}$~~

~~$AC^2 = 2 \cdot AB^2$~~



1) AC ка $y = 2x$

$AC^2 = 4p^2 + 4q^2$

$q = -2p \Rightarrow A(-p; -2p) \quad B(p; -2p)$

$C(p; 2p) \quad D(-p; 2p)$

$y = -x^2 + ax$

$AB^2 = BC^2 \Rightarrow (bx+p)^2 + (by-q)^2 = (bx-p)^2 + (by+q)^2$

$A(-p; q) \quad C(p; -q)$

$b_x = p(\sqrt{2}-1)$

$b_y = q(1-\sqrt{2})$

$b_x^2 + b_y^2 + 2b_x p + 2b_y q = p^2 + q^2$

$\frac{q^2}{p^2} b_y^2 + b_y^2 + 4b_y q = p^2 + q^2$

$b_y^2 \cdot \left(\frac{q^2+p^2}{p^2} + 4b_y q - (p^2+q^2) \right) = 0$

$D = 16q^2 + 4 \cdot \frac{q^2+p^2}{p^2} (p^2+q^2)$

$4b_x p = 4b_y q$
 $b_x p = b_y q$
 $b_x^2 + 2b_x p + p^2 + b_y^2 + 2b_y q + q^2 = p^2 + q^2$
 $b_x^2 + b_y^2 + 2b_x p + 2b_y q = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$A(ap; q) \quad C(p; -q) \quad B(k; l) \quad D(-k; -l)$

1) AC ка $y = 2x$. \Rightarrow BD ка $y = -\frac{1}{2}x$

$q = 2p$; $l = -\frac{1}{2}k$ $\cdot l^2 = \frac{1}{4}k^2$

$y = -x^5 + ax$

$q = -p^5 + ap$

$2p = -p^5 + ap$

$2 = -p^4 + a$

$p^4 = a - 2$

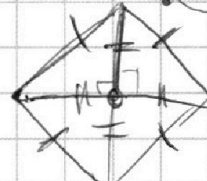
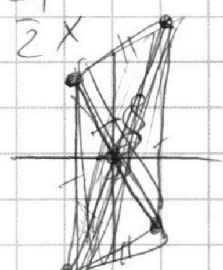
~~$y = -x^5 + ax$~~ $y = -x^5 + ax$

~~$l = -k^5 + ak$~~ $l = -k^5 + ak$

$-\frac{1}{2}k = -k^5 + ak$

$-\frac{1}{2} = -k^4 + a$

$k^4 = a + \frac{1}{2}$



$AB^2 = BC^2$

~~$k^2 - 2pk + p^2 + q^2 - 2ql + l^2 = k^2 + 2pk + p^2 + q^2 + 2ql + l^2$~~

$k^2 - 2pk + p^2 + q^2 - 2ql + l^2 = k^2 + 2pk + p^2 + q^2 + 2ql + l^2$

$0 = 4pk + 4ql$

$pk + ql = 0$

$p^4 = 16k^4$
 $a - 2 = 16a + 8$
 $-15a = 10$

$\frac{13}{6} + \frac{1}{2} = \frac{16}{6}$

$16(a - 2) = a + \frac{1}{2}$

$AC^2 = 4p^2 + 4q^2 = 4p^2 + 16p^2 = 20p^2$

$16a - 32 = a + \frac{1}{2}$

$BD^2 = 4k^2 + 4l^2 = 4k^2 + k^2 = 5k^2$

$15a = 32 + \frac{1}{2}$

$4p^2 = k^2$

$16p^4 = k^4$

$30a = 65$
 $a = \frac{13}{6}$

$15a = \frac{65}{2}$

$p^2 = \frac{1}{16}$; $k^2 = \frac{4}{16}$

$p^4 = \frac{1}{6}$; $k^4 = \frac{16}{6}$

$AB^2 = (k - p)^2 + (q - l)^2$

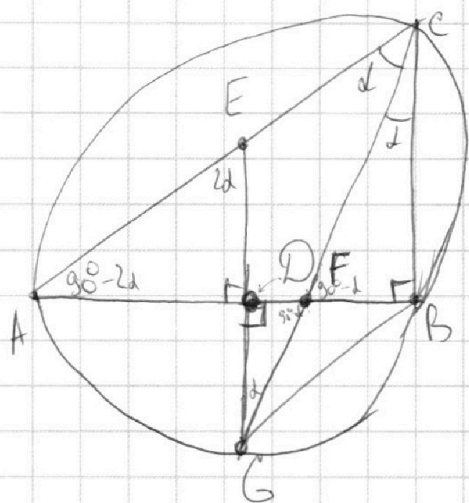
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$S_{\triangle DGF}$

$\triangle DGF \sim \triangle BCF$

коэффициент подобия

$$\frac{S_{\triangle DGF}}{S_{\triangle BCF}} = k^2 = 25$$

$k=5$

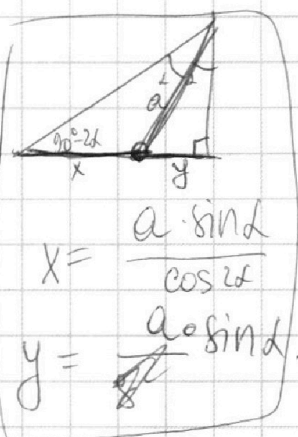
$BC = 5 DG, \quad \underline{BD = 5 DF}$

Теорема синусов \sin

$AF = \frac{CF \cdot \sin \alpha}{\cos 2\alpha}$

$BF = CF \cdot \sin \alpha$

$\triangle ACF$ и $\triangle BCF$



$x = \frac{a \cdot \sin \alpha}{\cos 2\alpha}$

$y = a \cdot \sin \alpha$

$AF = AD + DF = BD + DF = 6 DF$

$BF = BD - DF = 4 DF$

$\frac{AF}{BF} = \frac{3}{2} = \frac{1}{\cos 2\alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$

$\sin^2 \alpha = t$

$1 - 2t = \frac{2}{3} \Rightarrow 2t = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{6} \Rightarrow t < 90^\circ \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{6}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha$$

$$\cos^2 2\alpha = \frac{4}{9}$$

$$1 - \sin^2 2\alpha = \frac{4}{9}$$

$$\sin^2 2\alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow 2\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{5}{9}}$$

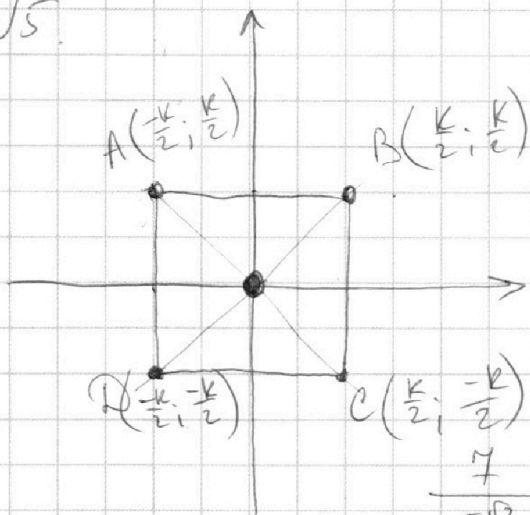
$$c = \frac{a+b}{2} \quad (b = \sqrt{7})$$

$$\sqrt{7} \cdot \left(\frac{a+\sqrt{7}}{2}\right) a = \sqrt{343}$$

$$\frac{a+\sqrt{7}}{2} a = 7$$

$$a(a+\sqrt{7}) = 14$$

N5.



1) $BD \rightarrow y = 2x$

$$\frac{k}{2} = 2 \cdot \frac{k}{2} \Rightarrow k = 0$$

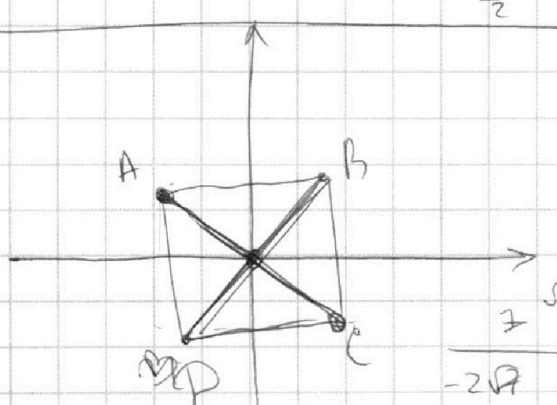
2) $AC \rightarrow y = 2x$

$$\frac{k}{2} = -k \Rightarrow 3k = 0, k = 0$$

$$\frac{7}{-\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{2-7}{-\sqrt{7}} = -\frac{5}{\sqrt{7}}$$

$a + a\sqrt{7} = 14$
 $a(1 + \sqrt{7}) = 14$
 $a = \frac{14}{1 + \sqrt{7}}$
 $a = \frac{14(1 - \sqrt{7})}{1 - 7} = \frac{14(1 - \sqrt{7})}{-6} = \frac{7(1 - \sqrt{7})}{-3}$
 $a = \frac{7(\sqrt{7} - 1)}{3}$

$a = -2\sqrt{7}$
 $c = \frac{-\sqrt{7}}{2}$



$A(l; k) \quad A(-l; -k)$
 $C(-l, \quad C(l, k)$
 ~~$B(l; k) \quad D(-l, -k)$~~

$A(-l; k) \quad B(l; k) \quad C(l; -k)$
 $D(-l; -k)$

$$a + \frac{7}{b} = -2\sqrt{7} + \sqrt{7} = -\sqrt{7}$$

$$b + \frac{7}{c} = \sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

$$c + \frac{7}{a} = \frac{-\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

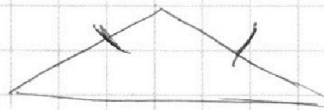
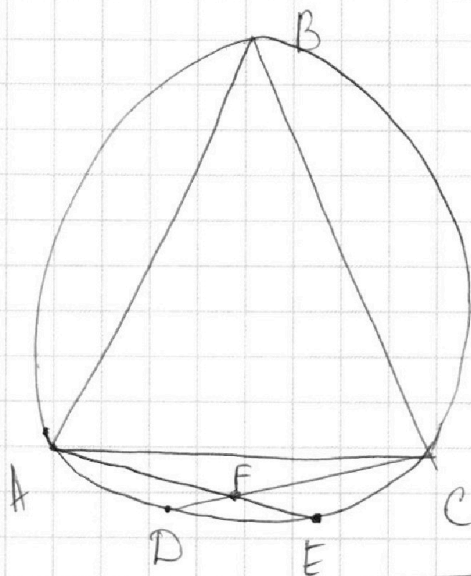
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

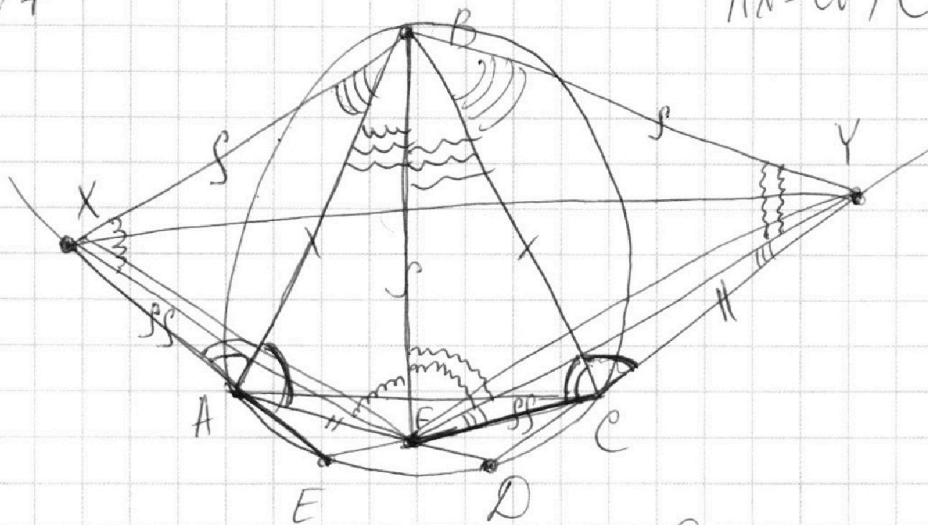
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7



N7

$AX = CF; CY = AF.$



$$\begin{aligned} \angle BCY &= 180^\circ - \angle DCB = 180^\circ - (180^\circ - \angle BAD) = \\ &= \angle BAD \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

