



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad ab: 2^6 3^{13} 5^{11}; \quad bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}; \quad ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28} \quad (\checkmark 1)$$

Пусть $v_p(x)$ - наибольшая степень входящего простого числа p в разложении числа x на простые множители ($x \in \mathbb{N}$)

По свойству степеней: $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$

$$\begin{cases} v_2(a) + v_2(b) \geq 6 & (1) \\ v_2(b) + v_2(c) \geq 14 & (2) \\ v_2(a) + v_2(c) \geq 16 & (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1) + (2) + (3)}{2}: v_2(a) + v_2(b) + v_2(c) \geq 18$$

Это достигается при: $v_2(a) = 2; v_2(b) = 4; v_2(c) = 12$

$$\min v_2(abc) = 18$$

Аналогично для 3:

$$\begin{cases} v_3(a) + v_3(b) \geq 13 \\ v_3(b) + v_3(c) \geq 21 \\ v_3(a) + v_3(c) \geq 25 \end{cases}$$

$v_3(a) + v_3(b) + v_3(c) \geq \frac{59}{2}$, но ч.к. $v_3(x)$ - натуральное, то $v_3(a) + v_3(b) + v_3(c) \geq 30$

Достигается при $v_3(a) = 5; v_3(b) = 9; v_3(c) = 16$

$$\min v_3(abc) = 30$$

Для 5:

$$\begin{cases} v_5(a) + v_5(b) \geq 11 \\ v_5(b) + v_5(c) \geq 13 \\ v_5(a) + v_5(c) \geq 28 & (4) \end{cases}$$

$$v_5(a) + v_5(b) \geq 0$$

$$v_5(a) + v_5(b) + v_5(c) \geq 28$$

Достигается: $v_5(a) = 14; v_5(b) = 0;$

$$v_5(c) = 14$$

$$\min v_5(abc) = 28$$

Тогда минимальное $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$

$$\text{Ответ: } 2^{18} 3^{30} 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \in [0; \pi] \\ \sin x \in [-1; 1] \end{cases}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2\pi k = \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} \\ \pi - x + 2\pi k = \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2\pi = 10\pi k \\ -6x + 2\pi = 10\pi h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi h}{3}, \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \in [0; \pi]$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 4,5\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2} \leq 4,5\pi$$

$$0 \leq \frac{k}{2} \leq 1; \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi h}{3} \leq \frac{9}{2}\pi$$

$$-3\pi \leq 7\pi + 10\pi h \leq 22\pi$$

$$-10\pi \leq 10\pi h \leq 20\pi$$

$$-1 \leq h \leq 2$$

$$h \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi h}{3}, \quad h \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



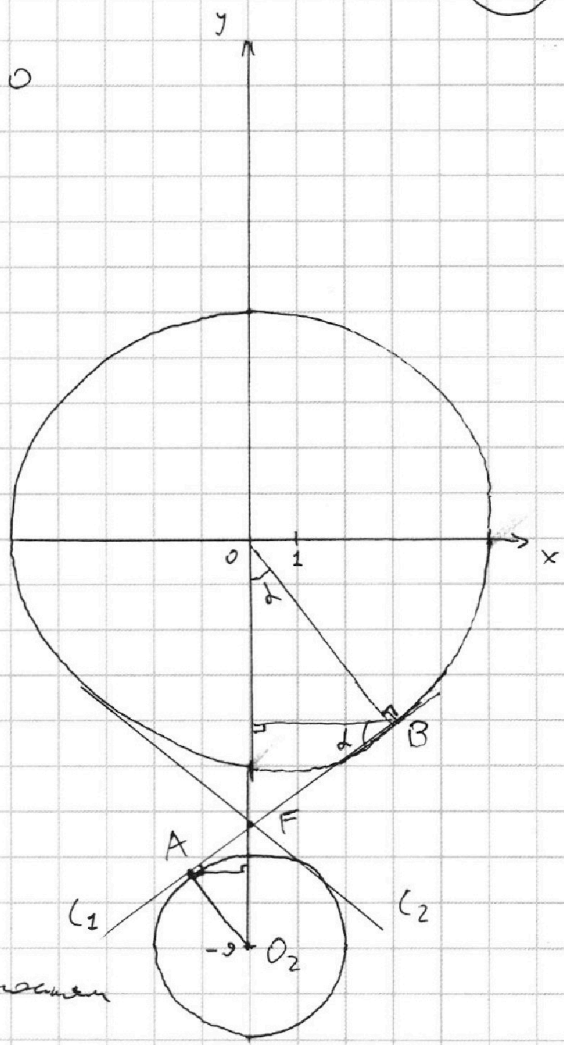
$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

(14)

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 & (1) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 5^2 \\ x^2 + (y+9)^2 = 2^2 & (2) \end{cases} \end{cases}$$

Изобразим график
совокупности (2)

(1): $5x + 6ay - 6 = 0$
 $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$, угловой коэффициент $k = -\frac{5}{6a}$



Найдем такие k , что не существуют 4 решения для системы или хотя бы одно в

$$kl_1 \leq k \leq kl_2$$

$$k(l_1 = \tan \alpha) = \frac{FB}{OB}$$

l_1 - касательная к двум окружностям

$F = (l_1 \cap Oy)$; A, B - точки касания с окружностями

$\triangle FOB \sim \triangle FO_2A$, углы m - коэффициент наклона,

$$m = \frac{OB}{O_2A} = 2,5; \quad m = \frac{OF}{FO_2} = 2,5; \quad OF + FO_2 = 9; \quad OE = \frac{5}{7} \cdot 9$$

$\triangle FOB$: По теореме Пифагора: $FB^2 = OF^2 - OB^2 = 5^2 \left(\frac{81}{49} - 1 \right)$

$FB = 5 \sqrt{\frac{32}{49}} = \frac{20}{7} \sqrt{2}$; $kl_1 = \frac{4}{7} \sqrt{2}$, Видно, что график симметричен относительно Oy , тогда $kl_2 = -kl_1 = -\frac{4}{7} \sqrt{2}$

$$-\frac{4}{7} \sqrt{2} \leq -\frac{5}{6a} \leq \frac{4}{7} \sqrt{2}; \quad -\frac{24\sqrt{2}}{35} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{24\sqrt{2}}{35}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-\frac{24\sqrt{2}}{35} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{24\sqrt{2}}{35}; \quad \begin{cases} a \leq -\frac{35}{48}\sqrt{2} \\ a \geq \frac{35}{48}\sqrt{2} \end{cases}$$

(24)

Тогда система может иметь ровно 4 решения

$$\text{при } a \in \left(-\frac{35}{48}\sqrt{2}; \frac{35}{48}\sqrt{2}\right)$$

Точка пересечения (1) с Oy — это точка с координатами $(0; \frac{b}{6a})$, она однозначно задаётся значением

b для каждого конкретного a , но найдётся такой

b для каждого a .

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{35}{48}\sqrt{2}; \frac{35}{48}\sqrt{2}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Выразить уравнения прямых, заданных сторонами параллелограмма №6

OR: $y = 0$ QR: $\frac{y-0}{90} = \frac{x-17}{2-17}$; $y = -6x + 102$

PQ: $y = 90$ OP: $y = k(x-15) = 90$; $k = 6$; $y = -6x$

Все точки внутри параллелограмма удовлетворяют условию:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 90 \\ y \geq -6x \\ y \leq -6x + 102 \end{cases}$$

Площади $A_1 = 6x_2 + y_2$; $B_1 = 6x_1 + y_1$
 $A_1 - B_1 = 48$

Площади A и B имеют форму OPQR, но для координат удовлетворяют условию

$$\begin{cases} y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} y_1 \leq 90 \\ y_2 \leq 90 \end{cases}; \begin{cases} y_1 + 6x_1 \geq 0 \\ y_1 + 6x_1 \leq 102 \end{cases}; \begin{cases} y_2 + 6x_2 \geq 0 \\ y_2 + 6x_2 \leq 102 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq B_1 \leq 102 \\ 0 \leq A_1 \leq 102 \end{cases}; A_1 - B_1 = 48, \text{ но } B_1 \in [0; 54]$$

$B_1 = 6x_1 + y_1$; $6x_1 = B_1 - y_1$; но $B_1 \equiv y_1 \pmod{6}$

Если $B_1 \equiv 6$, то $y_1 \equiv 6$; $y_1 \leq 90$, то 16 вариантов y_1

для B_1 ; $B_1 \equiv 6$; $B_1 \in [0; 54] \rightarrow 10$ вариантов B_1

Для конкретного $B_1 \equiv 6$, есть уникальные $A_1 \equiv 6$, $y_2 \equiv 6$; $y_2 \leq 90$
16 вариантов y_2 Итого: $10 \cdot 16^2$

Если $B_1 \equiv k \pmod{6}$; $k \neq 0$, то $y_1 \equiv k \pmod{6}$; $A_1 \equiv k \pmod{6}$
45 вариантов $B_1 \rightarrow \frac{90}{6}$ вариантов для $y_1 \equiv k \pmod{6}$

уникальные $A_1 \rightarrow \frac{90}{6}$ вариантов для $y_2 \equiv k \pmod{6}$. Итого: $45 \cdot 15^2$

Ответ: 12685



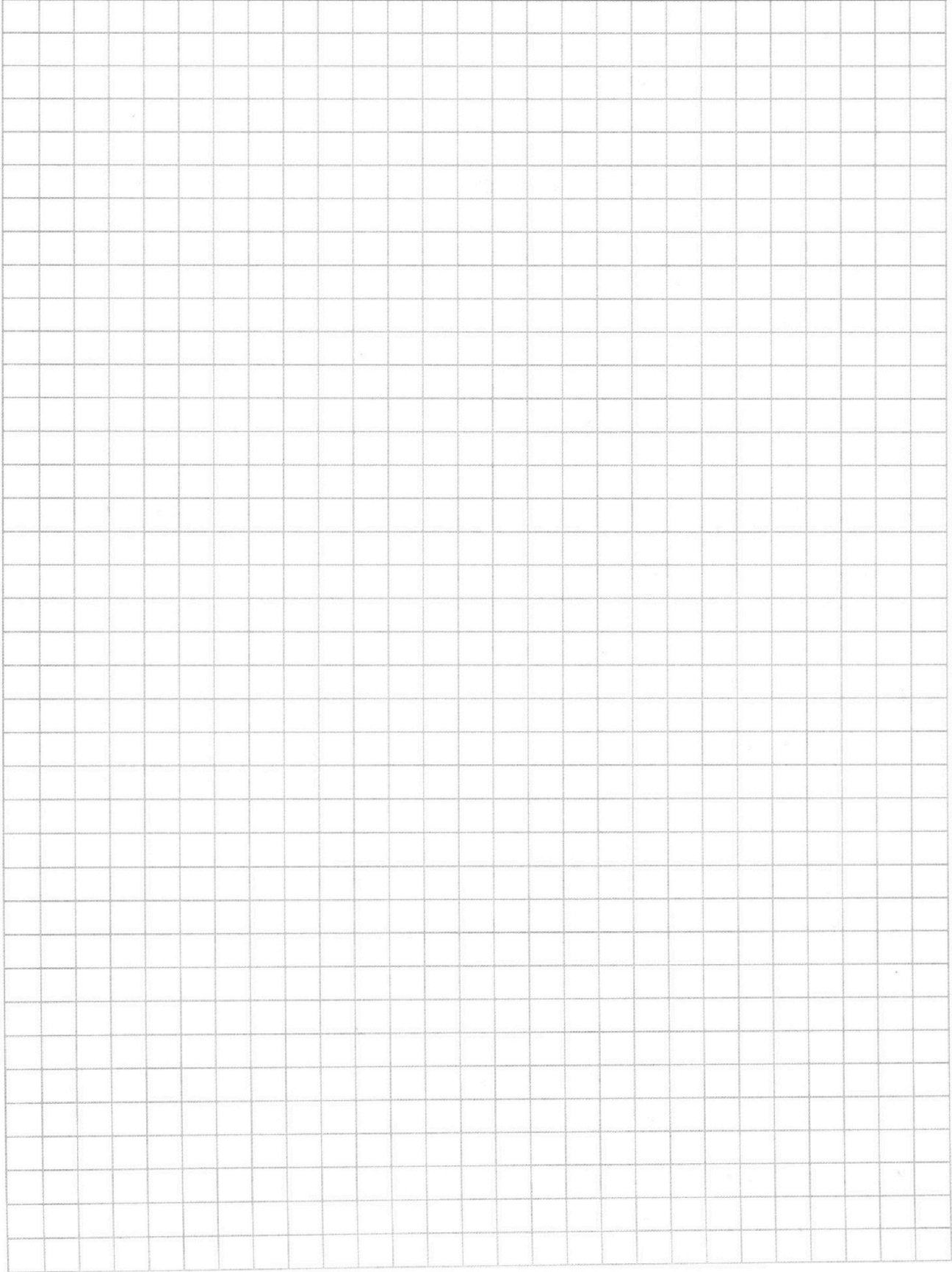
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-\frac{4}{\sqrt{2}} \leq -\frac{5}{6a} \leq \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{24}{35} \sqrt{2} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{24}{35} \sqrt{2}$$

$$-2 \leq -\frac{1}{2} \leq 2$$

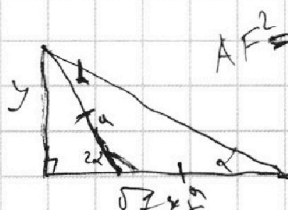
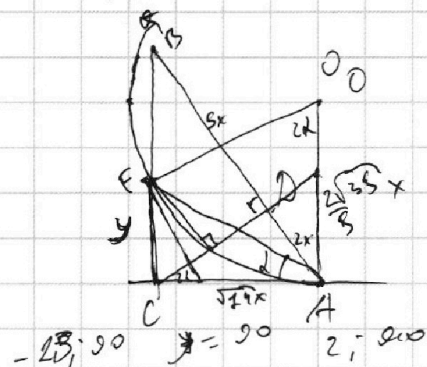
$$-2 < -\frac{1}{2} < 2$$

$$\frac{1}{a} \geq -\frac{24}{35} \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{a} \leq \frac{24}{35} \sqrt{2}$$

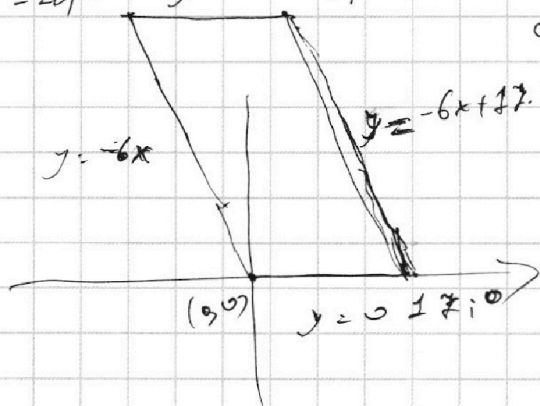
$$a \geq \frac{35 \cdot \sqrt{2}}{24 - 2}$$

$$a \leq$$



$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{y}{a}$$

$$a^2 = y^2 + (\sqrt{2}x - a)^2$$



$$\frac{y-0}{90} = \frac{x-17}{15}$$

$$\frac{y}{90} = \frac{-x}{15} + \frac{17}{15}$$

$$y = -6x + 17 \cdot 6$$

$$y_1 \leq -6x_1 + 17 \cdot 6$$

$$y_1 \geq -6x_1$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_1 \leq 90$$

$$y_2 + 6x_2 \geq 0$$

$$y_2 + 6x_2 \leq 17 \cdot 6 = 102$$

$$y_1 \in [0; 90]$$

$$A \geq 0 \quad B \geq 0$$

$$A \leq 102 \quad B \leq 102$$

$$A + B = 48$$

$$A \in [48; 102]$$

$$B \in [0; 54]$$

0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54

50

$$B = y_2 + 6x_2$$

$$6x_2 = B - y_2$$

$$55 \geq 55 \cdot 18$$

кор

к

$$A_1 \rightarrow y_1$$

$$225 \cdot 45 + 2560$$

$$\frac{22500}{2} - 5 \cdot 225 + 2560 = 11250 - 1125 + 2560 = 12685$$

$$55 \cdot 15 \cdot 15 + 10 \cdot 16 \cdot 16$$

$$10 \cdot 125 + 2560$$

$$12685$$

48



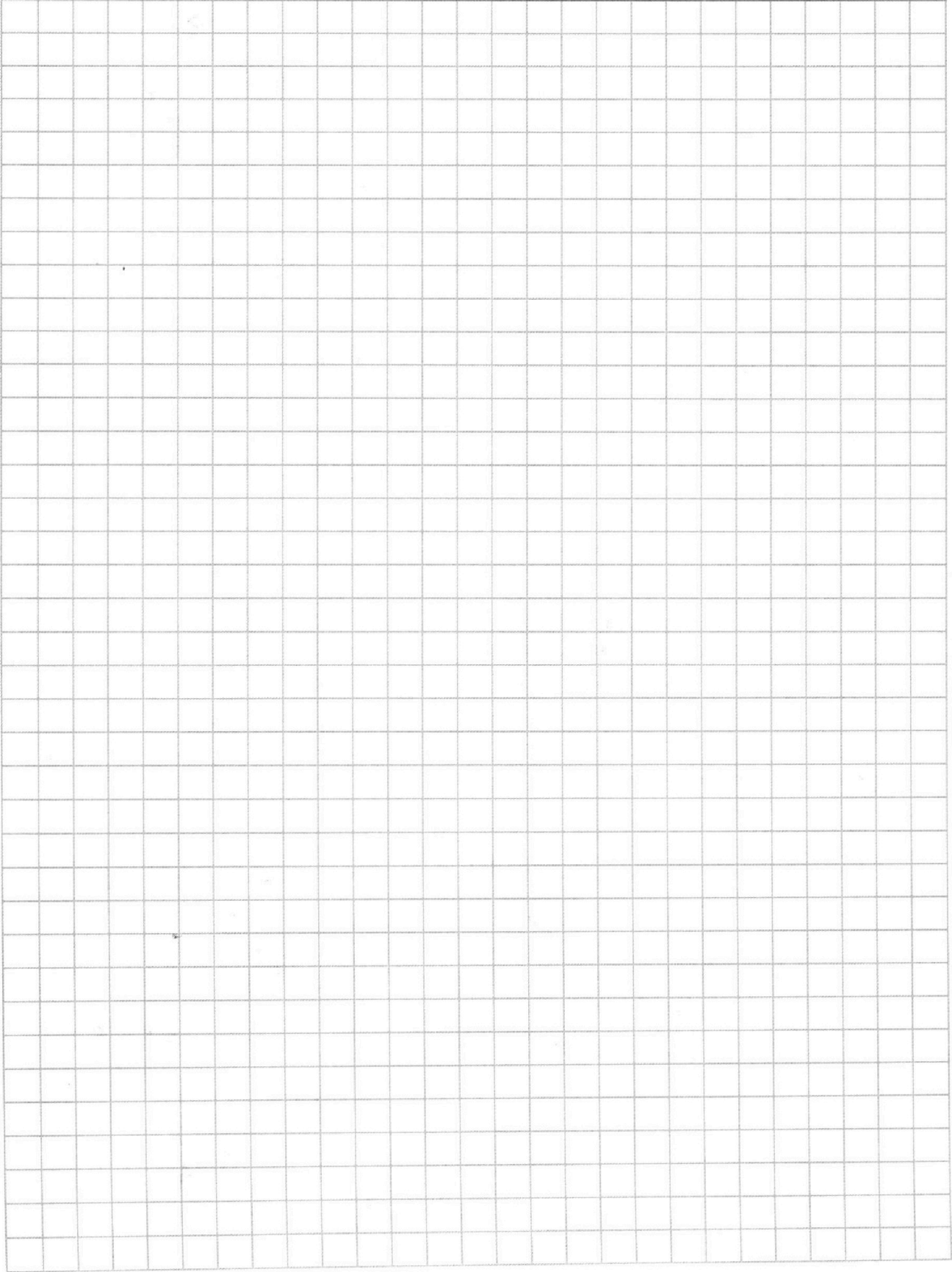
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a^2 = 2^6 \cdot 3^{13}$; $b^2 = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{23}$; $c^2 = 2^{10} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$ $a^2 b^2 c^2 = 2^{36} \cdot 3^{69} \cdot 5^{79}$

$a = pm$; $b = pm$ p - н.о.д.

$\text{НОК}(a, b) = pmn$

$b = 2 \cdot 3^9 \cdot 5^5$

$\sqrt{2}(a) + \sqrt{2}(b) \geq 6 \sqrt{13} = 24$
 $\sqrt{2}(b) + \sqrt{2}(c) \geq 14$
 $\sqrt{2}(c) + \sqrt{2}(a) \geq 16$

$\sqrt{2}(a) = 2$ $\sqrt{2}(b) = 2$ $\sqrt{2}(c) = 2$
 $\sqrt{3}(a) = 0$ $\sqrt{3}(b) = 14$ $\sqrt{3}(c) = 21$
 $2, 5(5, 9, 16)$

$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$D(\arccos x) = [0; \pi]$

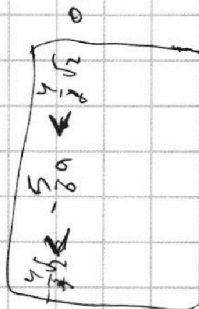
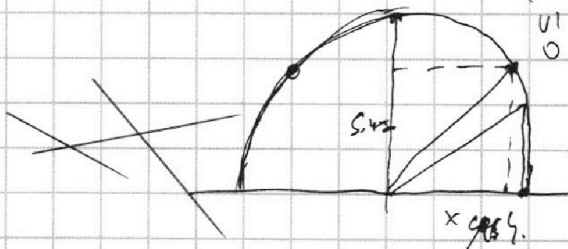
$\sin x = 2$

$\arccos 2 = \frac{9\pi - 2x}{10}$

$\cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin x$

$\cos 2 = \sin \pi =$

~~$\cos x = \cos y \Rightarrow x = y + 2\pi k$~~



$-10 \leq 9\pi - 2x \leq 10$

$-9\pi - 10 \leq -2x \leq 10 - 9\pi$

$\frac{9\pi}{2} - 5 \leq x \leq \frac{9\pi}{2} + 5$

$\frac{x - 2\pi}{5} = x + 2\pi k$

$\frac{x - 2\pi}{5} = \pi - x + 2\pi k$

$x - 2\pi = 5\pi - 5x + 10\pi k$

$x - 2\pi = 5\pi - 5x + 2\pi k$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) = \sin 2$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi - 2x}{10}\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{2x - 4\pi}{10}\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{x + 2\pi}{5}\right) = \sin x$

$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k$

$x = \frac{9\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$

$x \geq \frac{9\pi}{2} + 5$

$x \leq \frac{9\pi}{2} + 5$

$5x + 6ay - b = 0$

$(x^2 + y^2 + 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$

$x^2 + y^2 + 18y + 81 - 4 = 0$

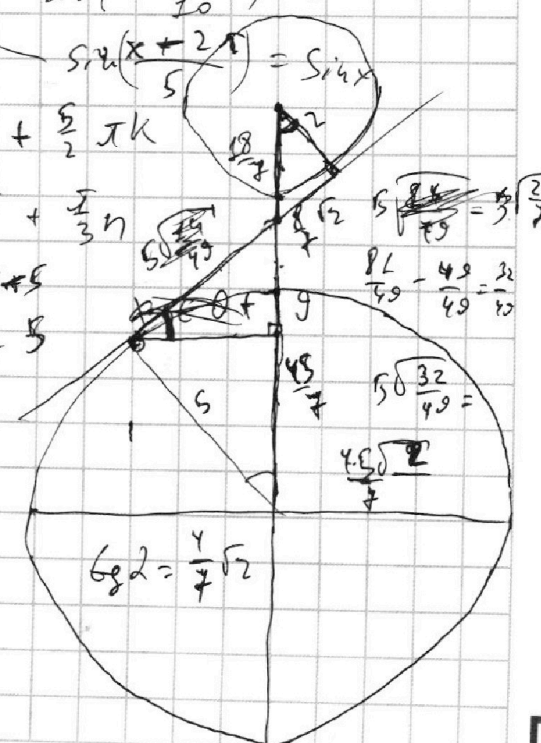
$5x + 6ay - b = 0$

$x^2 + y^2 = 25 - 6ay = 5x - b$

$x^2 + (y + 9)^2 = 4$

$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$

$-\frac{5}{6}a = k$



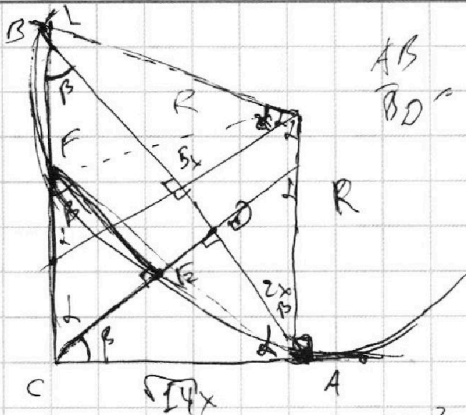
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

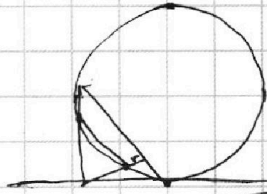
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$$

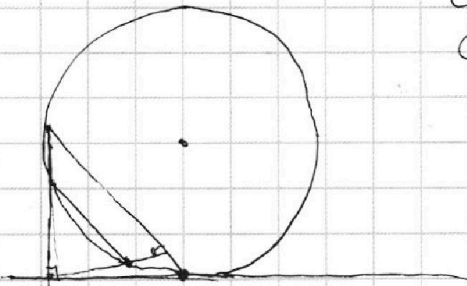
$$\begin{cases} \sqrt{5}(a) + \sqrt{5}(b) \geq 11 \\ \sqrt{5}(b) + \sqrt{5}(c) \geq 13 \\ \sqrt{5}(a) + \sqrt{5}(c) \geq 28/3 \end{cases}$$



$$CD^2 = 10x^2$$

$$CD = \sqrt{10}x$$

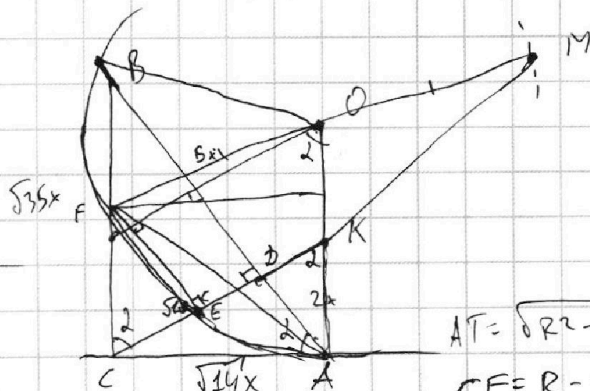
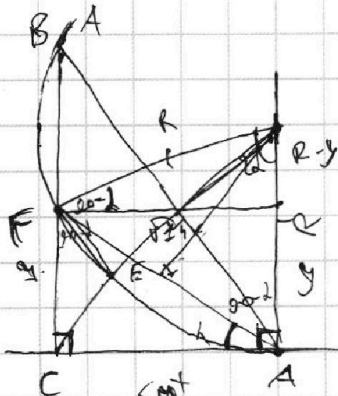
$$S_{ACD} = \sqrt{10}x^2$$



$$AC = \sqrt{(20+14)x^2} = \sqrt{34}x$$

$$BC^2 = 49x^2 - 14x^2 = 35x^2$$

$$BC = \sqrt{35}x$$



$$14x^2 = CE \cdot EM$$

$$EM^2 + FE^2 = (2R)^2$$

$$CE \cdot EF = S_{CEF}$$

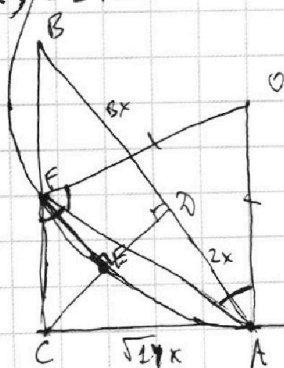
$$R^2 - R^2 - y^2 + 2Ry = 14x^2$$

$$14x^2 =$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{14}x}{2R}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{14}x}{2\sqrt{R^2 - 14x^2}}$$

$$S_{AFC} = \frac{CF}{BF}$$



$$CD \cdot DK = AD^2 = 4x^2$$

$$\sqrt{10}x \cdot DK = 4x^2$$

$$DK = \frac{2\sqrt{10}x}{5}$$

$\triangle EFM$ - MF - gnaner

$$\frac{AC}{OM} = \frac{AF}{R}$$

$$AM = MF = \sqrt{R^2 - 14x^2}$$

$$4R^2 - 4 \cdot 14x^2 - 14x^2 = CF^2$$

$$AT = \sqrt{R^2 - 14x^2}$$

$$CF = R - \sqrt{R^2 - 14x^2}$$

$$AF^2 = 14x^2 + R^2 + R^2 - 14x^2 - 2R\sqrt{R^2 - 14x^2}$$