МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω.

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам
$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$
Найдите наименьшее возможное значение выражения $\dfrac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B, а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже ~~велосипедиста~~ МОТОЦИКЛИСТА. Найдите расстояние между A и B.

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC, проходящую через вершину C, в точке Y; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω. Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пу №1

Пусть $a = 3^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot a_3$, $b = 3^{b_1} \cdot 7^{b_2} \cdot b_3$, $c = 3^{c_1} \cdot 7^{c_2} \cdot c_3$, где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ целые ~~числа~~ неотрицательные числа, a_3, b_3, c_3 не кратны 3 ~~или~~ 7 или равны 0.

По условию задачи:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 14, \\ a_1 + c_1 \geq 23, \\ b_1 + c_1 \geq 19; \end{cases} \Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 56 \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 \geq 28.$$

По условию задачи:

$a_2 + c_2 \geq 42 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 42.$

$abc = a_3 b_3 c_3 \cdot 3^{a_1+b_1+c_1} \cdot 7^{a_2+b_2+c_2} \geq 3^{28} \cdot 7^{42}.$

При $a = 3^9 \cdot 7^{13}$, $b = 3^5$, $c = 3^{14} \cdot 7^{28}$. $abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$, $ab = (3^{14} \cdot 7^{13}) \vdots 3^{14} \cdot 7^{13}$, $bc = (3^{19} \cdot 7^{28}) \vdots 3^{19} \cdot 7^{17}$, $ac = (3^{23} \cdot 7^{42}) \vdots 3^{23} \cdot 7^{42}$. Оч-но, при таких a, b и c выполняется условие.

Ответ: $3^{28} \cdot 7^{42}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

Пусть $a=3x^2+x+1$, $b=5-6x$.

Тогда $\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=\sqrt{a-b}-\sqrt{a}=b$;

$\sqrt{a-b}=\sqrt{a}+b$;

$a-b=a+b^2+2b\sqrt{a}$; $b^2+b+2b\sqrt{a}$;

$$\left[\begin{array}{l} b=0, \\ b+2\sqrt{a}+1=0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} b=0, \\ 6x-6=2\sqrt{3x^2+x+1}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 5-6x=0, \\ 9x^2+9-18x=3x^2+x+1, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{6}, \\ 6x^2+8-19x=0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{6}, \\ x=\frac{1}{2}, \\ x=\frac{8}{3}. \end{array}\right.$$

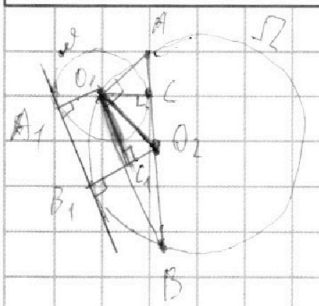
Ответ: $\left\{\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{8}{3}\right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

Пусть O_1 — центр ω, O_2 — центр Ω.

$\angle AO_1B = 90^\circ$ — т.к. опирается на диаметр

$O_1C \perp AB$ — радиус в точку касания.

Сл-но, O_1C — высота прямоугольного $\triangle AO_1B$, проведённая к гипотенузе. Сл-но, $O_1C = \sqrt{AC \cdot CB} = 5$.

Пусть A_1, B_1 — точки касания общей касательной с ω и Ω соответственно

Пусть C_1 — основание перпендикуляра с O_1 на O_2B_1

$O_1O_2 = OB_1 = \frac{AB}{2} = 13$ — радиусы Ω.

$O_1A_1 = O_1C = 5$ — радиусы ω.

$O_1A_1 \perp A_1B_1$, $O_2B_1 \perp A_1B_1$ — радиусы в точку касания.

В четырёхугольнике $O_1A_1B_1C_1$ три угла — прямые. Сл-но $O_1A_1B_1C_1$ — прямоугольник. Сл-но $O_1C_1 = A_1B_1$, $B_1C_1 = O_1A_1 = 5$

$O_2C_1 = O_2B_1 - B_1C_1 = 8$.

$A_1B_1 = O_1C_1 = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$.

Ответ: $\sqrt{105}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
				X		

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

$5x - y = 3z, \Rightarrow 5x = 3z + y \Rightarrow 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz.$

$5x = 3z + y \Rightarrow x = \cancel{3z}\ \frac{3z+y}{5}.$

$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Rightarrow 8yz + xz = 15xy \Rightarrow 8yz = x(15y - z) \Rightarrow 8yz = \frac{3z+y}{5}(15y - z) \Rightarrow$

$\Rightarrow 40yz = 15y^2 - 3z^2 + 44yz \Rightarrow 3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} z = 3y, \\ z = -\frac{5y}{3}. \end{array}\right.$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{9z^2 + y^2 + 6yz - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2} = \frac{2z(4z + 3y)}{y^2 + 3z^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{25x^2 - y^2 - z^2}\ \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{2\cdot 3y \cdot 15y}{y^2 + 9y^2} = \cancel{4,2}\ 9 \\ \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{-2\cdot\frac{5y}{3}\left(-\frac{20y}{3} + 3y\right)}{y^2 + \frac{25y^2}{3}} = \frac{110}{84} = \frac{55}{42} < 9 \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{55}{42}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6

Пусть ϑ_1 км/ч — скорость велосипедиста, ϑ_2 км/ч — скорость мотоциклиста, S км — путь от A до B, $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$, $\vartheta_1 > 7$, $\vartheta_2 > 0$, $S > 0$, $\vartheta_1 < \vartheta_2$

Тогда, по условию:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{\vartheta_1} = \dfrac{S}{\vartheta_2} + 1, (1) \\ \dfrac{\vartheta_1 \cdot S}{\vartheta_2} = \dfrac{\vartheta_2 \cdot S}{\vartheta_1} - 49, (2) \\ \dfrac{S}{\vartheta_1+7} = \dfrac{S}{\vartheta_2+7} + 0{,}6. (3) \end{cases}$$

$(1)\ \dfrac{S}{\vartheta_1} = \dfrac{S}{\vartheta_2} + 1 \Rightarrow S\vartheta_2 = S\vartheta_1 + \vartheta_1\vartheta_2 \Rightarrow S = \dfrac{\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_2 - \vartheta_1}$

$(2)\ \dfrac{\vartheta_1 S}{\vartheta_2} = \dfrac{\vartheta_2 S}{\vartheta_1} - 49 \Rightarrow \vartheta_1^2 S = \vartheta_2^2 S - 49\vartheta_1\vartheta_2 \Rightarrow S = \dfrac{49\vartheta_1\vartheta_2}{(\vartheta_2-\vartheta_1)(\vartheta_2+\vartheta_1)}$

$(3)\ \dfrac{S}{\vartheta_1+7} = \dfrac{S}{\vartheta_2+7} + 0{,}6 \Rightarrow S\vartheta_2 + 7S = S\vartheta_1 + 7S + 0{,}6\vartheta_1\vartheta_2 + 0{,}6 \cdot 49 + 4{,}2(\vartheta_1+\vartheta_2) \Rightarrow \dfrac{3\vartheta_1\vartheta_2 + 21(\vartheta_1+\vartheta_2) + 147}{5(\vartheta_2-\vartheta_1)}$

$S = \dfrac{\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_2-\vartheta_1} = \dfrac{49\vartheta_1\vartheta_2}{(\vartheta_2-\vartheta_1)(\vartheta_2+\vartheta_1)} = \dfrac{3\vartheta_1\vartheta_2 + 21(\vartheta_1+\vartheta_2)+147}{5(\vartheta_2-\vartheta_1)} \Rightarrow \vartheta_1\vartheta_2 = \dfrac{49\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2} = \dfrac{3\vartheta_1\vartheta_2 + 21(\vartheta_1+\vartheta_2)+147}{5}$

$\vartheta_1\vartheta_2 = \dfrac{49\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2} \Rightarrow \vartheta_1 + \vartheta_2 = 49.$

$\vartheta_1 \cdot \vartheta_2 = \dfrac{3\vartheta_1\vartheta_2 + 21(\vartheta_1+\vartheta_2)+147}{5} \Rightarrow 2\vartheta_1\vartheta_2 = 21 \cdot 49 + 147 = 1176 \Rightarrow \vartheta_1\vartheta_2 = 588$

$$\begin{cases} \vartheta_1 + \vartheta_2 = 49, \\ \vartheta_1\vartheta_2 = 588. \end{cases}$$

По обратной теореме Виета, ϑ_1, ϑ_2 — корни уравнения $x^2 - 49x + 588 = 0$

Т.к. $\vartheta_1 < \vartheta_2$, то $\vartheta_1 = 21$, $\vartheta_2 = 28$.

$S = \dfrac{\vartheta_1\vartheta_2}{\vartheta_2-\vartheta_1} = \dfrac{588}{7} = 84.$

Ответ: 84 км.

$EX=\sqrt{FX^2+EF^2}=2r$. Ан-но, $YX = r\sqrt{2}$

$EY \cdot YD = YX \cdot YF$ – по св-ву секущих,

~~EY~~ $YD(YD+ED) = r\sqrt{2}\cdot 2r\sqrt{2}$;

$YD^2+YD\,ED = 4r^2$

$ED = \dfrac{-YD^2+4r^2}{YD}$.

$\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{YD}{ED} = \dfrac{YD^2}{-YD^2+4r^2}$

$\upsilon_1 \quad \upsilon_2$

$$\frac{S}{\upsilon_1} = \frac{S}{\upsilon_2} + 1 \qquad \frac{\frac{49\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_2-\upsilon_1}}{\upsilon_1} = \frac{\frac{49\upsilon_2\upsilon_1}{\upsilon_2-\upsilon_1}}{\upsilon_2} + 1$$

$$49 + \frac{\upsilon_1 S}{\upsilon_2} = \frac{S\upsilon_2}{\upsilon_1} \qquad 49\upsilon_2 = 49\upsilon_1 + \upsilon_2^2 - \upsilon_1^2$$

$$\upsilon_1(49 - \upsilon_1) =$$

$$\frac{36}{60} = \frac{6}{10}$$

$$\frac{S}{\upsilon_1+7} = \frac{S}{\upsilon_2+7} + 0{,}6$$

$$49\upsilon_1\upsilon_2 = S(\upsilon_2 - \upsilon_1) \qquad 49\upsilon_2 + S\upsilon_1^2 = S\upsilon_2^2$$

$$\upsilon_2^2 - 49\upsilon_2 - \upsilon_1 + 49\upsilon_1$$

$$\frac{49\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_1\upsilon_2 - \upsilon_1^2} = \frac{49\upsilon_1\upsilon_2}{\upsilon_2^2 - \upsilon_1\upsilon_2} + 1$$

$$49^2 + 4\upsilon_1^2 - 4\cdot 49\upsilon_1 \quad (49 - 2\upsilon_1)^2$$

$$49 \pm (49 - 2\upsilon_1)$$

$$49\upsilon_1\upsilon_2(\upsilon_2 - \upsilon_1)$$

$$S\upsilon_2 + 7S = S\upsilon_1 + 7S + 0{,}6\,(\upsilon_2 - \upsilon_1)(\upsilon_2 + \upsilon_1) + 49(\upsilon_1 - \upsilon_2)$$

$$\frac{49\upsilon_2}{\upsilon_2 - \upsilon_1} = \frac{49\upsilon_1}{\upsilon_2 - \upsilon_1} + 1 \qquad \upsilon_1 + \upsilon_2 = 49$$

$$49\upsilon_2 = 49\upsilon_1 + \upsilon_2 - \upsilon_1 \qquad S\upsilon_1^2 = S\upsilon_2^2 - 49\upsilon_1\upsilon_2$$

$$48\upsilon_2 = 48\upsilon_1$$

$$S = \frac{49\upsilon_1\upsilon_2}{49(\upsilon_1 - \upsilon_2)} \qquad \frac{\upsilon_1(49 - \upsilon_1)}{\upsilon_1 - 49 + \upsilon_1} = \frac{49\upsilon_1 - \upsilon_1^2}{2\upsilon_1 - 49}$$

$$\frac{\upsilon_1\upsilon_2}{(\upsilon_1+7)(\upsilon_1 - \ldots)}$$

$$S\upsilon_1 - S\upsilon_2 = \upsilon_1\upsilon_2 \qquad S\upsilon_1 - S(49 - \upsilon_1) = \upsilon_1(49 - \upsilon_1)$$

$$\frac{49\upsilon_1 - \upsilon_1^2}{(\upsilon_1+7)(2\upsilon_1 - 49)} = \frac{49\upsilon_1 - \upsilon_1^2}{(\upsilon_2+7)(2\upsilon_1 - 49)} + 0{,}6$$

$$S\upsilon_1 - 49S + \upsilon_1 S = 49\upsilon_1 - \upsilon_1^2$$

$$25\upsilon_1 - 49S = 49\upsilon_1 - \upsilon_1^2$$

$$\upsilon_1(49 - \upsilon_1)(56 - \upsilon_1) = \upsilon_1(49 - \upsilon_1)(\upsilon_1 + 7) + 0{,}6(\upsilon_1 + 7)(56 - \upsilon_1)(2\upsilon_1 - 49)$$

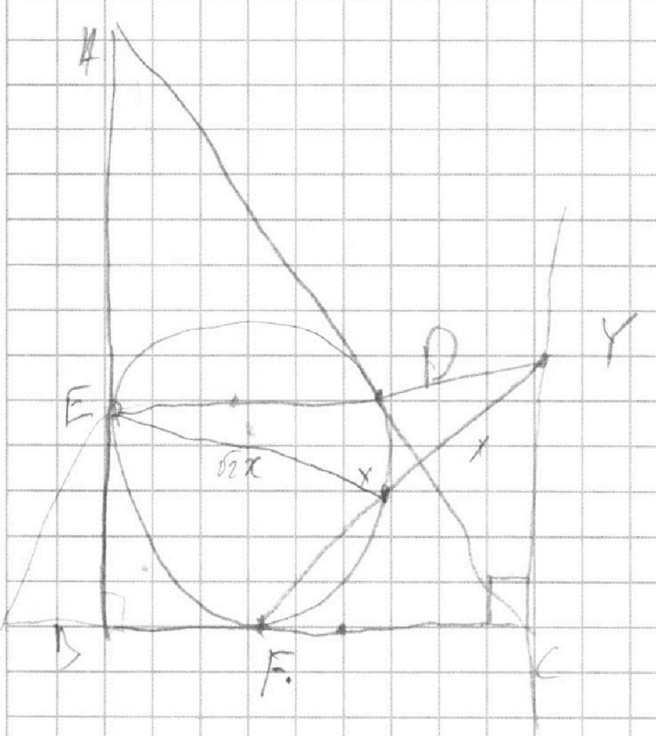
$$\upsilon_1^2 - 49\upsilon_1 + 25\upsilon_1 - 49S = 0 \qquad (25 - 49)^2 + 4\cdot 49S$$

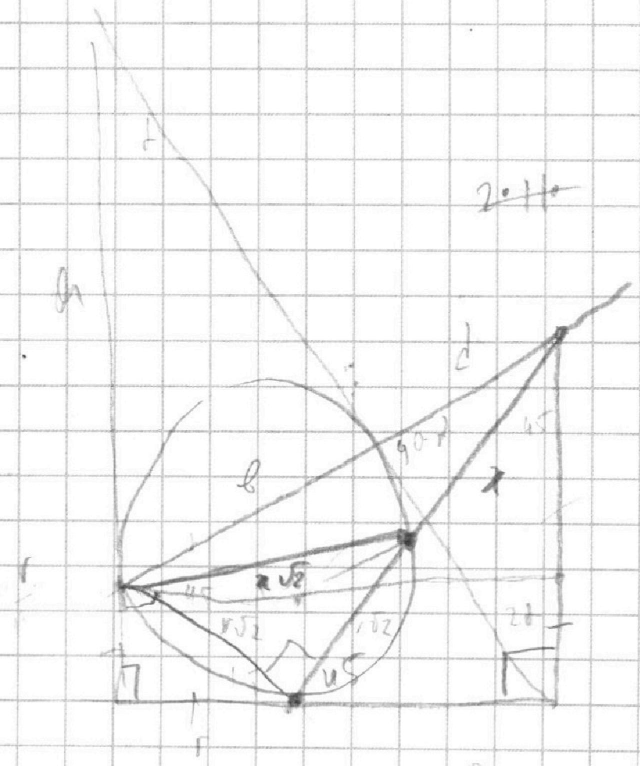
$$48^2 - 8\cdot 49S$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





~~2·11~~

$d^2 + bd =$

$\frac{a}{b} = \frac{d}{b}$

$$\frac{2r^2 + 2x^2 - 4xr\sqrt{2}}{\sqrt{2r^2 + x^2 - 2r\sqrt{2}}} = x$$

$\frac{m}{m} = \frac{r}{a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$-4y+y=-5y$

$8xy+x=\frac{15xy}{z}$

$5x-y=3y\left(-\frac{5y}{3}\right)$ $x=-\frac{4y}{5}$

$5x-y=-5y$

$5x=-4y$

$\frac{7y+14y}{6}$ $\frac{18y}{6}=3y$

$3z(5x+y)-z^2$

$\frac{1}{4}=\frac{9}{2y}$ $\frac{3}{-y}+\frac{1}{y}=\frac{15}{-2y}$

y^2+3z^2

$z(15x+3y-z)$ $x=\frac{6y}{5}$

$-16y+2y=15$

y^2+9z^2+6yz

y^2+3z^2

$\frac{20}{3}-3=\frac{\frac{11}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot 2}{\frac{28}{3}}$

$\frac{25x^2+7z^2}{y^2+3z^2}=1$

$11y=5x$

$\frac{4}{y}+\frac{1}{y}=\frac{5}{y}$

$\frac{y^2+11z^2+6yz}{}=1$ $5x=10y$ $x=2y$

$8xy+1=\frac{15xy}{z}$ $xz=15xy$

$60z+45\cdot 3z$

$8yz=(15y-z)(3z+4y)$

$\frac{-10}{y}+\frac{1}{y}=\frac{-9}{y}$

$\frac{15(3z^2+6yz)}{4yz^2+4yz}$

$40yz=15y^2-3z^2+44yz$

$15y^2-3z^2+4yz$

$\boxed{x=2y \quad z=\frac{10y}{3}}$

$x=-\frac{5y}{3}$

$\frac{18y}{6}=3y$

$\frac{15}{2}+\frac{50y}{}$

$\frac{15\cdot 3}{5y}$

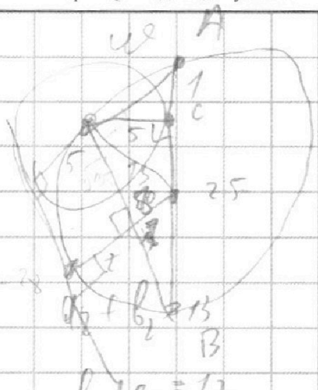
$4y-\frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$a_1+b_1=14$ $a_2+b_2=13$ $2a_2=58$

$b_1+c_1=19$ $a_1-b_1=4$ $b_2+c_2=17$ $a_2-c_2=25$

$a_1+c_1=23$ $2a_1=18$ $a_2+c_2=42$

$a_1=9$ $b_1=5$

$c_1=14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

Т.к. дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то НОД$(a,b)=1$.

Т.к. мы хотим найти наибольшее m, при котором $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ числитель и знаменатель $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ можно сократить на m, то $m=$ НОД$(a+b; a^2-9ab+b^2)$.

Т.к. $(a+b)\vdots m$, НОД$(a,b)=1$, то НОД$(a,m)=1$, НОД$(b,m)=1$.

Т.к. $(a+b)\vdots m$, $(a^2-9ab+b^2)\vdots m$, то $(a^2-9ab+b^2-b(a+b))\vdots m$

$a^2-9ab+b^2-b(a+b)=a^2-10ab=a(a-10b)$.

Т.к. НОД$(a;m)=1$, то $(a-10b)\vdots m$.

Т.к. $(a+b)\vdots m$, $(a-10b)\vdots m$, то $((a+b)-(a-10b))\vdots m$

$(a+b)-(a-10b)=11b$.

Т.к. НОД$(b;m)=1$, то $11\vdots m$. Сл-но, $m\leq 11$.

При этом, если $a+b=11k$, $k\in\mathbb{N}$, то дробь $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}=\frac{11k}{a^2-9(11k-a)a+(11k-a)^2}=$

$=\frac{11k}{11a^2-99k+121k^2-22ak}=\frac{11k}{11(a^2-9k+11k^2-2ak)}$ сократима на 11.

Ответ: 11.

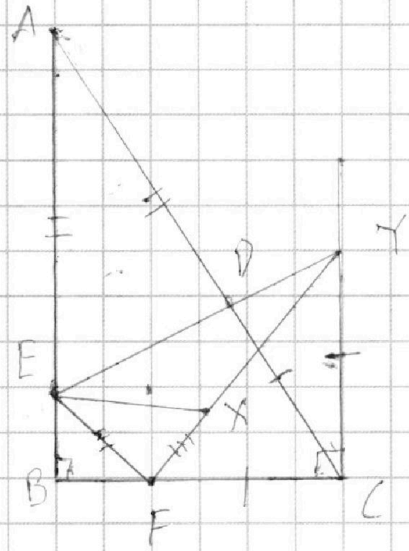
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7



Пусть $AD = a$, $XY = x$, r - радиус ω, $CD = c$

$EX = x\sqrt{2}$ - по условию.

$EB = BF = r$ - по св-ву прямоугольного тр-ка.

$AE = a$, $CF = c$ - по св-ву касательных

$\triangle AED \sim \triangle CYD$ - т.к. $YC \parallel AE$

Сл-но, $\frac{CD}{DA} = \frac{YC}{AE} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{YC}{a} \Rightarrow YC = a$.

Сл-но, $YC = FC = c$. Сл-но, $\triangle YCF$ - прямоугольный и равнобедренный

Сл-но $\angle YFC = 45^\circ$.

$\angle FEX = \angle CFY = 45^\circ$ - угол между кас. и хордой

$\angle EFB = 45^\circ$, т.к. $\triangle EBF$ - прямоугольный равнобедренный.

Сл-но $\angle EFX = 180^\circ - \angle BFE - \angle YFX = 90^\circ$

Сл-но $\triangle EFX$ - прямоугольный равнобедренный.

$XF = EF = \sqrt{EB^2 + BF^2} = r\sqrt{2}$.