



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{14}7^{13}$ ,  $bc$  делится на  $3^{19}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $3^{23}7^{42}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=25$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

**МОТОЦИКЛИСТА**

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = \sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Реш

Реш

Пусть  $a = 3^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot a_3$ ,  $b = 3^{b_1} \cdot 7^{b_2} \cdot b_3$ ,  $c = 3^{c_1} \cdot 7^{c_2} \cdot c_3$ , где  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$

целые ~~и~~ неотрицательные числа,  $a_3, b_3, c_3$  не кратны 3 и 7 или равны 0.

По условию задачи:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 14, \\ a_1 + c_1 \geq 23, \\ b_1 + c_1 \geq 19, \end{cases} \Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 56 \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 \geq 28.$$

По условию задачи:

$$a_2 + c_2 \geq 42 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 42.$$

$$abc = a_3 b_3 c_3 \cdot 3^{a_1 + b_1 + c_1} \cdot 7^{a_2 + b_2 + c_2} \geq 3^{28} \cdot 7^{42}$$

$$\text{Пусть } a = 3^9 \cdot 7^{13}, b = 3^5, c = 3^{14} \cdot 7^{28}, abc = 3^{28} \cdot 7^{42}, ab = 3^{14} \cdot 7^{13}, bc =$$

$$= (3^{14} \cdot 7^{28}) : 3^{13} \cdot 7^{17}, ac = (3^{23} \cdot 7^{42}) : 3^{23} \cdot 7^{42}. \text{ А-но, при таких } a, b \text{ и } c \text{ выполняется условие.}$$

$$\text{Ответ: } 3^{28} \cdot 7^{42}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ДЗ

Пусть:  $a = 3x^2 + x + 1$ ,  $b = 5 - 6x$ .

Тогда  $\sqrt{5x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = \sqrt{a-b} - \sqrt{a} = b$ ;

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{a} + b$$

$$a-b = a + b^2 + 2b\sqrt{a}; \quad b^2 + b + 2b\sqrt{a};$$

$$\begin{cases} b=0, \\ b^2 + b + 2b\sqrt{a} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0, \\ 6x-6 = 2\sqrt{3x^2+x+1}; \end{cases}$$

$$5-6x=0;$$

$$9x^2 + 9 - 12x = 3x^2 + x + 1;$$

$$x = \frac{5}{6};$$

$$6x^2 + 9 - 12x = 0;$$

$$x = \frac{5}{6};$$

$$x = \frac{1}{2};$$

$$x = \frac{3}{5}.$$

Ответ:  $\left\{ \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5} \right\}$ .

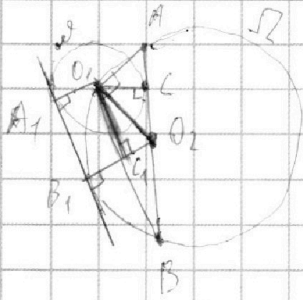
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Delta \chi$

Пусть  $O_1$  - центр  $\omega$ ,  $O_2$  - центр  $\Omega$ .

$\angle A O_1 B = 90^\circ$  - т.к. окружности касаются

$O_1 C \perp AB$  - радиус в точку касания.

$\omega$ -ко,  $O_1 C$  - высота прямоугольного  $\Delta A O_1 B$ , проведенная к гипотену-

зе.  $\omega$ -ко,  $O_1 C = \sqrt{A O_1 \cdot B O_1} = 5$ .

Пусть  $A_1, B_1$  - точки касания окружностей  $\omega$  и  $\Omega$  соответственно

Пусть  $C_1$  - ортоцентр треугольника  $\Delta O_1 A_1 B_1$

$O_1 O_2 = O B_1 = \frac{AB}{2} = 8$  - радиусы  $\Omega$ .

$O_1 A_1 = O_1 C_1 = 5$  - радиусы  $\omega$ .

$O_1 A_1 \perp A_1 B_1, O_2 B_1 \perp A_1 B_1$  - радиусы в точку касания.

В прямоугольном  $\Delta O_1 A_1 B_1$  при  $\angle A_1$  - гипотенуза,  $\omega$ -ко  $O_1 A_1, B_1 C_1$  - меди-

аналы.  $\omega$ -ко  $O_1 C_1 = A_1 B_1, B_1 C_1 = O_1 A_1 = 5$ .

$O_2 C_1 = O_2 B_1 - B_1 C_1 = 3$ .

$A_1 B_1 = O_1 C_1 = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$ .

Ответ:  $\sqrt{105}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



DS

$$5x - y = 3z, \Rightarrow 5x = 3z + y \Rightarrow 25x^2 = 9z^2 + y^2 + 6yz.$$

$$5x = 3z + y \Rightarrow x = \frac{3z + y}{5}$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Rightarrow 8yz + xz = 15xy \Rightarrow 8yz = x(15y - z) \Rightarrow 8yz = \frac{3z + y}{5}(15y - z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40yz = 15y^2 - 3z^2 + 4yz \Rightarrow 3z^2 - 4yz - 15y^2 = 0$$

$$z = 3y,$$

$$z = -\frac{5y}{3}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{9z^2 + y^2 + 6yz - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6yz}{y^2 + 3z^2} = \frac{2z(4z + 3y)}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{203y \cdot 15y}{y^2 + 9y^2} = \frac{3045y^2}{10y^2} = 304.5$$

$$\frac{15x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{-2 \cdot \frac{5y}{3} \cdot \left(1 - \frac{10z}{3} + 3y\right)}{y^2 + 2 \cdot \frac{25y^2}{3}} = \frac{100}{84} = \frac{55}{42} < 9$$

Ответ:  $\frac{55}{42}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

276

Пусть  $v_1$  - скорость самолета,  $v_2$  - скорость двигателя,  $S$  - путь от А до В,  $v_1 \neq v_2$ ,  $v_1 \neq 0$ ,  $v_2 \neq 0$ ,  $S \neq 0$ ,  $v_1 \neq v_2$

Тогда, по условию:

$$\begin{cases} \frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1, & (1) \\ \frac{d_1 S}{v_2} = \frac{d_2 S}{v_1} - 49, & (2) \\ \frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6. & (3) \end{cases}$$

$$(1) \frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1 \Rightarrow S v_2 = S v_1 + v_1 v_2 \Rightarrow S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1}$$

$$(2) \frac{d_1 S}{v_2} = \frac{d_2 S}{v_1} - 49 \Rightarrow d_1^2 S = d_2^2 S - 49 d_1 v_2 \Rightarrow S = \frac{49 d_1 v_2}{(d_2 - d_1)(v_2 + v_1)}$$

$$(3) \frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6 \Rightarrow S v_2 + 7S = S v_1 + 7S + 0,6 v_1 v_2 + 0,6 \cdot 49 + 4,2(v_1 + v_2) \Rightarrow \frac{5 v_1 v_2 + 21(v_1 + v_2) + 147}{5(v_2 - v_1)}$$

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{49 d_1 v_2}{(d_2 - d_1)(v_2 + v_1)} = \frac{3 v_1 v_2 + 2(v_1 + v_2) + 147}{5(d_2 - d_1)} \Rightarrow v_1 v_2 = 49 \frac{d_1 v_2}{d_2 - d_1} = \frac{3 v_1 v_2 + 2(v_1 + v_2) + 147}{5}$$

$$v_1 v_2 = \frac{49 d_1 v_2}{d_2 - d_1} \Rightarrow v_1 + v_2 = 49.$$

$$v_1 \cdot v_2 = \frac{3 v_1 v_2 + 2(v_1 + v_2) + 147}{5} \Rightarrow 2 v_1 v_2 = 21 \cdot 49 + 147 = 1176 \Rightarrow v_1 v_2 = 588$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 49, \\ v_1 v_2 = 588. \end{cases}$$

По формуле корней квадратного уравнения,  $v_1, v_2$  - корни уравнения  $x^2 - 49x + 588 = 0$

П.к.  $v_1 < v_2$ , то  $v_1 = 21$ ,  $v_2 = 28$ .

$$S = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{588}{7} = 84.$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$E_X = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2} = 2r, \omega = \omega_0, Y_X = r\sqrt{2}$$

$$E_Y \cdot Y_D = Y_X \cdot Y_F \text{ — по с-выделению,}$$

$$E_Y \cdot Y_D / (Y_D + E_D) = r\sqrt{2} \cdot 2r\sqrt{2};$$

$$Y_D^2 + Y_D E_D = 4r^2$$

$$E_D = \frac{-Y_D^2 + 4r^2}{Y_D}$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{Y_D}{E_D} = \frac{Y_D^2}{-Y_D^2 + 4r^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$v_1$   $v_2$

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 1$$

$$\frac{49v_1^2}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{49v_2^2}{v_2 - v_1} + 1$$

$$49 + \frac{v_1 S}{v_2} = \frac{S v_2}{v_1}$$

$$49v_2 = 49v_1 + v_2^2 - v_1^2$$

$$v_1(49 - v_1) =$$

$$\frac{S}{v_1 + 7} = \frac{S}{v_2 + 7} + 0,6$$

$$\frac{36}{60} = \frac{6}{10}$$

$$49v_1^2 + v_2^2 = 51v_2 - v_1^2$$

$$49v_1^2 + 5v_1^2 = 5v_2^2 + 0,6 \cdot 49v_2^2 / (v_2 - v_1) + 49$$

$$\frac{49v_1 v_2}{v_1 v_2 - v_1^2} = \frac{49v_1 v_2}{v_2^2 - v_1 v_2} + 1$$

$$v_2^2 - 49v_2 - v_1^2 = 0$$

$$49^2 + 4 \cdot v_1^2 - 4 \cdot 49v_2 - 49 \cdot 2v_1^2$$

$$\frac{49v_1 v_2^2}{v_2 - v_1} = \frac{49v_1}{v_2 - v_1} + 1$$

$$49 \pm (49 - 2v_1)$$

$$5v_2 + 7S = 5v_2^2 + 7S + 0,6 \cdot 49v_2^2 / (v_2 - v_1) + 49v_1 v_2$$

$$49v_2 = 49v_1 + v_2^2 - v_1^2$$

$$48v_2 = 46v_1$$

$$49v_1 + v_2$$

$$v_1 + v_2 = 49$$

$$v_2^2 = 5v_1^2 - 49v_1 v_2$$

$$\frac{v_1 v_2}{(v_1 + 7)(v_2 + 7)}$$

$$S = \frac{49(v_1 v_2)}{49(v_1 + v_2)}$$

$$49v_1 - v_1^2 = 49v_2 - v_2^2$$

$$v_1 - 49v_1 = 2v_2 - 49$$

$$5v_1 - 5(49 - v_1) = v_1(49 - v_1)$$

$$25v_1 - 495 = 49v_1 - v_1^2$$

$$v_1^2 - 49v_1 + 25v_1 - 495 = 0$$

$$v_1^2 - 24v_1 - 495 = 0$$

$$v_1(49 - v_1) = 54v_1$$

$$v_1^2 - 49v_1 + 25v_1 - 495 = 0$$

$$v_1^2 - 24v_1 - 495 = 0$$

$$v_1 = 33$$



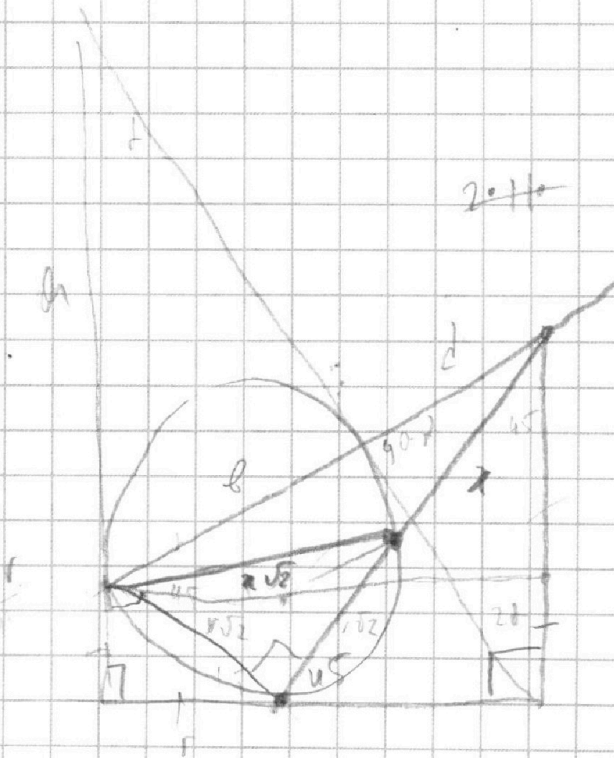
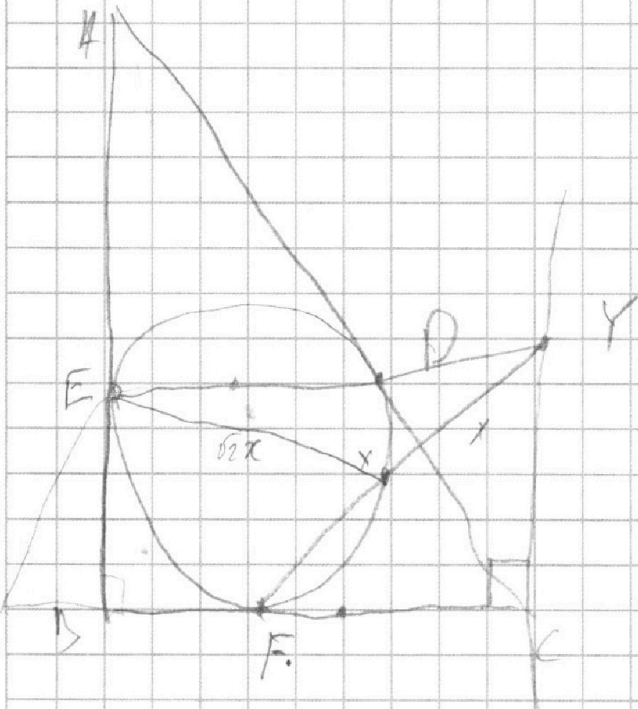
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$d^2 = bc =$$

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{b}$$

$$b/(b-d)$$

$$\frac{2r^2 + 2x^2 - 4r\sqrt{0.2x}}{\sqrt{r^2 - 2r\sqrt{0.2x}}} = x$$

$$\frac{1}{0.2} = \frac{r}{x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper. The page contains several diagrams and equations. At the top right, there is a diagram of a triangle with vertices A, B, and C, and various points and lines inside it, including a circle. The work includes numerous algebraic derivations, such as:

- $a = 3 \cdot a_1 \cdot a_2$
- $a_1 + b_1 = 14$
- $b_1 + c_1 = 19$
- $a_1 + c_1 = 23$
- $a_1 = 5, b_1 = 9, c_1 = 14$
- $a_2 + b_2 = 17$
- $a_2 + c_2 = 42$
- $a_2 = 17, b_2 = 1, c_2 = 30$
- $a_1 + b_1 - a = 105$
- $a - 10b = 105$
- $a^2 - 3ab - b^2 - ab - 3c^2$
- $a^2 - 10ab - a^2 - 10b^2$
- $3a^2 - 5a + 6$
- $a = 3x^2 + 1$
- $b = 5 - 6x$
- $a + b = a^2 + b^2 + 10ab$
- $b^2 + 2b + 1 = 0$
- $6 + 2b + 1 = 0$

The diagrams show geometric constructions with points labeled A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. Some diagrams include circles and lines connecting points.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

82

П.к. дробь  $\frac{a}{b}$  несократима, то  $\text{НОД}(a, b) = 1$ .

П.к. для любых целых  $a, b, m$ , при которых  $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$  является  
максимально  $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$  можно сократить на  $m$ , то  $m = \text{НОД}(a+b, a^2-9ab+b^2)$ .

П.к.  $(a+b) : m$ ,  $\text{НОД}(a, b) = 1$ , то  $\text{НОД}(a, m) = 1$ ,  $\text{НОД}(b, m) = 1$ .

П.к.  $(a+b) : m$ ,  $(a^2-9ab+b^2) : m$ , то  $(a^2-9ab+b^2 - (a+b)) : m$

$$a^2-9ab+b^2 - (a+b) = a^2-10ab = a(a-10b).$$

П.к.  $\text{НОД}(a, m) = 1$ , то  $(a-10b) : m$ .

П.к.  $(a+b) : m$ ,  $(a-10b) : m$ , то  $(a+b) - (a-10b) : m$

$$(a+b) - (a-10b) = 11b.$$

П.к.  $\text{НОД}(b, m) = 1$ , то  $11 : m$ . Сл-но,  $m \leq 11$ .

Таким образом, если  $a+b = 11k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то дробь  $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} = \frac{11k}{a^2-9(11k-a)+11k^2-9a^2}$   
 $= \frac{11k}{11a^2-99k+11k^2-21ak} = \frac{11k}{11(a^2-9k+11k^2-2ak)}$  сократима на 11.

Ответ: 11.

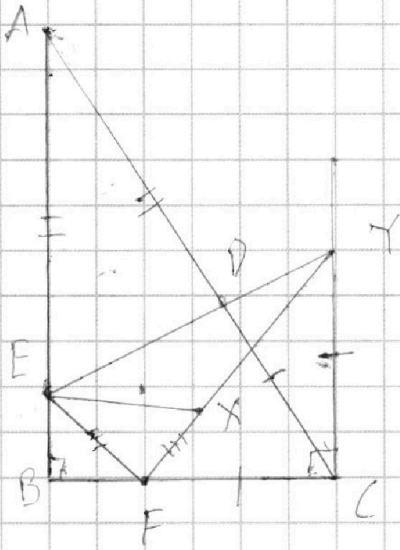
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 7  
ФЕ

Пусть  $AD = a$ ,  $\angle X Y = \alpha$ ,  $r$  - радиус  $\omega$ ,  $CF = c$

$EX = r\sqrt{2}$  - по теореме Пифагора.

$EB = BF = r$  - по свойству радиуса, проведенного к касательной.

~~по~~  $AE = a$ ,  $CF = c$  - по свойству касательных

Из  $\triangle AED \sim \triangle CYD$  - т.к.  $YC \parallel AE$

$$\text{по к.о. } \frac{ED}{DA} = \frac{YC}{CF} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{r}{a} \Rightarrow YC = r$$

по к.о,  $YC = FC = c$ . по к.о,  $\triangle YCF$  - прямоугольный и равнобедренный

по к.о,  $\angle YFC = 45^\circ$

$\angle FEY = \angle CFY = 45^\circ$  - угол между кас. и хордой

$\angle FEB = 45^\circ$ , т.к.  $\triangle EBF$  - прямоугольный равнобедренный.

$$\angle EFY = 180^\circ - \angle BFE - \angle YFC = 90^\circ$$

по к.о  $\triangle EFY$  - прямоугольный равнобедренный.

$$XF = EF = \sqrt{EB^2 + BF^2} = r\sqrt{2}$$