



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12-12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x+4y^2}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 + a_9 = 12 - 12x \quad a_4 = (x^2 + 4x)^2 \quad a_8 = (-6x^2)$$

a_1 - первый член арифметической прогрессии, d - разность прогрессии

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 12 - 12x \\ a_4 = a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2 \\ a_8 = a_1 + 7d = (-6x^2) \end{cases} \quad \begin{cases} 2d = (x^2 + 4x)^2 + 12x - 12 \\ 4d = (-6x^2) - (x^2 + 4x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4d = 2(x^2 + 4x)^2 + 24x - 24 \\ 4d = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2 \end{cases}$$

	3	24	54	24	-24
	\downarrow	-6	-36	-36	+24
-2	3	18	18	-12	0
	\downarrow	-6	-24	+12	
-2	3	12	-6	0	

$$2(x^2 + 4x)^2 + 24x - 24 = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$3x^4 + 24x^3 + 48x^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$(x+2)(3x^3 + 18x^2 + 18x - 12) = 0$$

$$(x+2)^2(3x^2 + 12x - 6) = 0$$

$$x = -2 \quad 3(x^2 + 4x - 3) = 0$$

$$x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$D/4 = 4 + 3 = 7$$

$$x = -2 \pm \sqrt{7}$$

Проверка:

1) $x = -2$:

$$\begin{cases} a_2 = 36 = a_1 + d \\ a_4 = 16 = a_1 + 3d \end{cases} \Rightarrow 2d = -20 \Rightarrow d = -10$$

$$\begin{cases} a_8 = -24 = a_1 + 7d = a_4 + 4d = 16 - 40 = -24 = \text{итого} \\ a_1 = -24 + 70 = 46 \end{cases}$$

2) $x = -2 - \sqrt{7}$

$$\begin{cases} a_2 = 36 + 12\sqrt{7} = a_1 + d \\ a_4 = (11 + 4\sqrt{7} - 8 - 4\sqrt{7})^2 = 9 = a_1 + 3d \end{cases} \Rightarrow 2d = -27 - 12\sqrt{7} \Rightarrow d = -\frac{27}{2} - 6\sqrt{7}$$

$$\begin{cases} a_8 = -6(11 + 4\sqrt{7}) = -66 - 24\sqrt{7} = a_1 + 7d = a_4 + 4d = 9 - 54 - 24\sqrt{7} = -45 - 24\sqrt{7} = \text{итого} \end{cases}$$

3) $x = -2 + \sqrt{7}$

$$\begin{cases} a_2 = 36 - 12\sqrt{7} = a_1 + d \\ a_4 = (11 - 4\sqrt{7} - 8 + 4\sqrt{7})^2 = 9 = a_1 + 3d \end{cases} \Rightarrow 2d = -27 + 12\sqrt{7} \Rightarrow d = -\frac{27}{2} + 6\sqrt{7}$$

$$\begin{cases} a_8 = -6(11 - 4\sqrt{7}) = -66 + 24\sqrt{7} = a_1 + 7d = a_4 + 4d = 9 - 54 + 24\sqrt{7} = -45 + 24\sqrt{7} = \text{итого} \end{cases}$$

Ответ: $x = -2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases} \begin{cases} 2x-3y \leq 6 \\ 2x-3y \geq -6 \\ 3x-2y \leq 4 \\ 3x-2y \geq -4 \end{cases} \begin{cases} 4x-6y \leq 12 \quad (1) \\ 6y-2x \leq 12 \quad (2) \\ 9x-6y \leq 12 \quad (3) \\ 6y-9x \leq 12 \quad (4) \end{cases} \begin{cases} -5x \leq 24 \quad (1)+(4) \\ 5x \leq 24 \quad (2)+(3) \end{cases} \begin{cases} x \in [-\frac{24}{5}, \frac{24}{5}] \\ \Rightarrow 10x \in [-48, 48] \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6x-2y \leq 18 \\ 6x-4y \geq -8 \\ 6x-4y \geq -8 \\ 6x-4y \leq 8 \end{cases} \begin{cases} 6x-6y \geq -18 \quad (1) \\ 6x-9y \geq -18 \quad (2) \\ 6x-4y \geq -8 \quad (3) \\ 4y-6x \geq -8 \quad (4) \end{cases} \begin{cases} (1)+(3) \quad 5y \geq -26 \\ (2)+(4) \quad -5y \geq -26 \\ \quad \quad \quad 5y \leq 26 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -48 &\leq 10x \leq 48 \\ -26 &\leq 5y \leq 26 \\ -74 &\leq 10x + 5y \leq 74 \end{aligned}$$

Ответ: 74



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-2h)^2 + 13(m-2h) = (m-2h)(m-2h+13)$$

Если $m-2h$ - четное, то $m-2h+13$ - нечетное $\Rightarrow A$ - четное
 Если $m-2h$ - нечетное, то $m-2h+13$ - четное $\Rightarrow A$ - четное

$$B = mn(m-2h-2)$$

1) $A = 17p^2$, $B = 15q^2$
 A - четное $\Rightarrow 17p^2$ - четное $\Rightarrow p^2$ - четное $\Rightarrow p$ - четное $\Rightarrow p = 2$,
 т.р. 2-единичное простое четное число $\Rightarrow A = 17 \cdot 4 = 68$
 Пусть $m-2h = x \Rightarrow A = x(x+13) = 68$

$$x^2 + 13x - 68 = 0$$

$$(x+17)(x-4) = 0$$

$$x = -17 \quad x = 4$$

1) $m-2h = 4 \Rightarrow m-2h$ - четное \Rightarrow
 $\Rightarrow m-2h-2$ - четное $\Rightarrow B$ - четное $\Rightarrow 15q^2$ - четное $\Rightarrow q^2$ - четное $\Rightarrow q$ - четное
 $\Rightarrow q = 2$, т.р. 2-единичное простое четное число $\Rightarrow B = 15 \cdot 4 = 60$
 $B = mn \cdot 2 = 60$ $\begin{cases} m-2h=4 \\ mn=30 \end{cases}$ $\begin{cases} m=2h+4 \\ 2h^2+4h-30=0 \end{cases}$
 $mn=30$ $2(h+5)(h-3)=0$

$$h = -5 \quad h = 3, \text{ т.р. } h = 3 \Rightarrow m = 10$$

т.р. h - натуральное число

2) $m-2h = -17 \Rightarrow m-2h-2 = -19$

$$B = -19mn = 15q^2 > 0 \Rightarrow mn < 0 \Rightarrow \text{либо } m, \text{ либо } n < 0 -$$

противоречит условию, т.р. m и n - натуральные

2) $A = 15q^2$, $B = 17p^2$. A - четное $\Rightarrow 15q^2$ - четное $\Rightarrow q^2$ - четное $\Rightarrow q$ - четное
 $\Rightarrow q = 2$, т.р. 2-единичное простое четное число $\Rightarrow A = 15 \cdot 4 = 60$
 Пусть $m-2h = x \Rightarrow A = x(x+13) = 60$

$$x^2 + 13x - 60 = 0$$

$$D = 169 + 240 = 409 = (\sqrt{409})^2; \sqrt{409} - \text{не натуральное число}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{409}}{2} - \text{не целые целые числа} \Rightarrow$$

\Rightarrow не удовлетв. условию, т.р. m и n - натуральные числа $\Rightarrow m-2h$ (т.е. x) -
 точно целое число

Ответ: (10; 3)

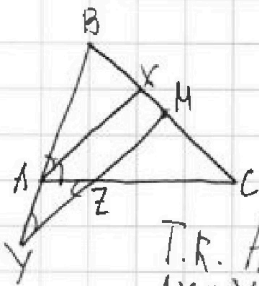


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: AX - медиана, $AC=18$; $AZ=6$; $YZ=8$;
 $Y \in AB$; $Z \in AC$; $YZ \parallel AX$; M - пер. BC
Найти: BC

Т.р. AX - медиана $\angle BAC$, то $\angle BAX = \angle CAX = \frac{1}{2} \angle BAC$
 $AX \parallel YZ \Rightarrow \begin{cases} \angle BAX = \angle BYM, \text{ как соответств. } \angle \text{ при } \parallel AX \text{ и } YM \text{ секущей } YB \\ \angle CAX = \angle AZY, \text{ как соответств. } \angle \text{ при } \parallel AX \text{ и } YZ \text{ секущей } AC \end{cases}$

$\Rightarrow \angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow \triangle AYZ - \text{р/б} \Rightarrow AY = AZ = 6$

$AX \parallel MZ$
 $CZ : AZ = 2 : 1 = 2 : 1$
 $MZ \cap BC = M, AX \cap BC = X$ } $\Rightarrow CM : MX = CZ : AZ = 2 : 1$

В $\triangle AYZ$ по теореме косинусов: $\cos \angle AYZ = \frac{AY^2 + YZ^2 - AZ^2}{2 \cdot AY \cdot YZ} = \frac{6^2 + 8^2 - 6^2}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{2}{3}$

$\angle AYZ = \angle BAX \Rightarrow \cos \angle AYZ = \cos \angle BAX = \frac{2}{3}$, $\angle BAX = \frac{1}{2} \angle BAC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \cos \angle BAC = 2 \cos^2 \angle BAX - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$

Т.р. M - середина BC $\Rightarrow CM = BM = \frac{1}{2} BC$ } $\Rightarrow MX = \frac{1}{4} BC \Rightarrow BX = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) BC = \frac{1}{4} BC$

Рассмотрим $\triangle BAX$ и $\triangle BYM$

1. $\angle BAX = \angle BYM$ } по I-по-ку подобия } $\frac{AB}{BY} = \frac{BX}{BM} = \frac{1}{2}$
2. $\angle B$ - общий } $\triangle BAX \sim \triangle BYM$

$\frac{AB}{BY} = \frac{AB}{AB+AY} = \frac{AB}{AB+6} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2AB = AB + 6 \Rightarrow AB = 6$

В $\triangle ABC$; по Т. кос: $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2 \cos \angle C \cdot AB \cdot AC} = \sqrt{324 + 36 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 6 \cdot 18}$
 $= \sqrt{384} = 2\sqrt{96} = 4\sqrt{24} = 8\sqrt{6}$

Ответ: $8\sqrt{6}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+4} = \frac{1}{2} + \sqrt{13}/2$$

$$x+4 = \frac{1}{4} + \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{13}/2$$

$$x = \frac{1/4 + 13/4 - 4}{2} = \frac{1/4 + 13/4 - 16/4}{2} = \frac{-2/4}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$$

$$0 < \frac{\sqrt{13}-1}{2} < 3 \Rightarrow \text{корень}$$

$$\sqrt{3-x} = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$3-x = 1 + \frac{10}{4} + \sqrt{10}$$

$$x = -1/2 - \sqrt{10} < 0 \Rightarrow \text{не корень}$$

Ответ: $(-\frac{1}{4})$

Ответ: $(\frac{\sqrt{13}-1}{2}, \frac{\sqrt{13}-1}{2})$

$$1) a=b-2$$

$$b^2 - 4b + 4 + b^2 = 7$$

$$2b^2 - 4b - 3 = 0$$

$$D/4 = 4 + 6 = 10$$

$$b = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2} = \left[\frac{1 - \sqrt{10}}{2} < 0 \Rightarrow \text{не корень} \right]$$

$$b = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$$

$$a = \frac{2 + \sqrt{10}}{2} - 2 = \frac{2 + \sqrt{10} - 4}{2} = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-xy} & (1) \\ 2x^5 + 4x^2 - 4\sqrt{3y} = 2y^2 - 4\sqrt{3x} + 4y^2 & (2) \end{cases} \quad * \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 3-y \geq 0 \\ 12-xy \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq -4 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 12-y^2 \end{cases}$$

$$(2) \quad 2(x^5 - y^5) + 4(x^2 - y^2) + 4\sqrt{3}(\sqrt{4x} - \sqrt{4y}) = 0$$

$$2((4x)^{20} - (4y)^{20}) + 4((4x)^2 - (4y)^2) + 4\sqrt{3}(\sqrt{4x} - \sqrt{4y}) = 0$$

$$2((4x)^{10} + (4y)^{10})((4x)^5 - (4y)^5) + 4((4x)^2 + (4y)^2)(4x - 4y) + 4\sqrt{3}(\sqrt{4x} - \sqrt{4y}) = 0$$

$$4\sqrt{3}(\sqrt{4x} - \sqrt{4y}) \left(\frac{2((4x)^{10} + (4y)^{10})}{\sqrt{4x} + \sqrt{4y}} + \frac{4((4x)^2 + (4y)^2)}{\sqrt{4x} + \sqrt{4y}} + \sqrt{3} \right) = 0$$

$$\sqrt{4x} = \sqrt{4y}$$

$$x = y$$

$$* \begin{cases} x \geq -4 \\ y \leq 3 \\ x \in [-4, 3] \end{cases} \Rightarrow x = -4, x = 3 \quad \begin{cases} x \in [-4, 3] \\ x \in [0, 3] \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -4 \\ x \leq 3 \\ x^2 + y^2 \leq 12 \\ (x+4)(y+3) \leq 0 \end{cases}$$

Проверка:

- $x = -4$: $\sqrt{7} + 5 = 2\sqrt{12 - (-4)(3)} = 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6} \neq \sqrt{7} + 5$
- $x = 3$: $\sqrt{7} + 5 = 2\sqrt{12 - 3(3)} = 2\sqrt{9} = 6 \neq \sqrt{7} + 5$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-xy}$$

Пусть $\sqrt{x+4} = a, \sqrt{3-x} = b, a > 0, b > 0$

$$10 \text{ тогда } 2\sqrt{(a^2-4)(3-b^2)} = 2ab, 5 = a^2 + b^2 - 2, a^2 + b^2 = 7$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ a - b + 5 = 2ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ a - b - 2ab = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ a^2 - 2ab + b^2 + a - b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases}$$

$$(a-b+2)(a-b-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = b - 2, a = b + 1 \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases}$$

- $a = b - 2$: $b^2 - 4b + 4 + b^2 = 7 \Rightarrow 2b^2 - 4b - 3 = 0 \Rightarrow D/4 = 1 + 6 = 7 \Rightarrow b = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{2} \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{2} - 2 = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{2}$
- $a = b + 1$: $b^2 + 2b + 1 + b^2 = 7 \Rightarrow 2b^2 + 2b - 6 = 0 \Rightarrow b^2 + b - 3 = 0 \Rightarrow b = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} + 1 = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

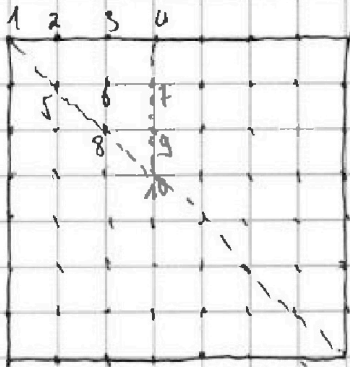
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего узлов - $8^2 = 64$

Рассмотрим варианты покраски первого узла в белую из 1-й (верхней половины сетки), т.е. узлы с 1 по 32, т.к. для покраски узлов из нижней сетки варианты будут идентичными

- 1) Раскрасим узел 1 в белый. Для покраски 2-го по выбору узла есть 34 варианта (каждый из узлов, не считая узел 1, без учета того, в первой половине сетки)
- 2) Для узла 2 будет 30 вариантов (без узла 1, т.к. этот вариант мы посчитали, и без второго узла в верхней половине)

Рассмотрим варианты покраски только узлов половины одной четверти квадрата (четверть делится по диагонали) (см. рис.)

Для 1-го узла - 9 узлов в этой части + 1 узел в нижней - 10 вариантов

Для 2-го узла - 8 узлов (без 1-го) + 1 узел в нижней - 9 вариантов

Для 3-го узла - 7 вариантов (без 1-го и 2-го) + 3-й справа по той же линии - 8 вариантов

Для 4-го - 7 вариантов (узлы без 1-3-го) + 4-й справа по той же линии - 8 вариантов

Для 10-го - 1 вариант - 4-й узел справа по той же линии

3) Сумма получается $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$

Рассмотрим квадрат, разбитый по диагонали. В верхней половине 36 узлов. Для 1-го узла - 35 различных вариантов (36-1 узел в этой части), для 2-го - 34 варианта (36-2 узла), т.е. для каждого узла в этой половине 36-номер узла вариантов. Это арифметическая прогрессия, первый член которой = 35, а разность = -1; в ней 36 членов

$$S_{36} = \frac{35 + 1}{2} \cdot 36 = \frac{70 - 35}{2} \cdot 36 = \frac{70 - 35}{2} \cdot 36 = 35 \cdot 18 = 630 \text{ вариантов}$$

Ответ: 630 вариантов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases} \begin{cases} 2x-3y \leq 6 \\ 2x-3y \geq -6 \\ 3x-2y \leq 4 \\ 3x-2y \geq -4 \end{cases} \begin{cases} 5x-5y \leq 10 \\ 5x-5y \geq -10 \end{cases} \begin{cases} 5x \leq 10+5y \\ 5x \geq -10+5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \leq 6+3y \\ 2x \geq -6+3y \\ 3x \leq 4+2y \\ 3x \geq -4+2y \end{cases} \begin{cases} -3+3/2y \leq x \leq 9+3/2y \\ -4/3+2/3y \leq x \leq 4/3+2/3y \end{cases} \begin{cases} -30+15y \leq 10x \leq 30+15y \\ -40/3+20/3y \leq 10x \leq 40/3+20/3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y \geq 5x-10 \\ 5y \leq 5x+10 \end{cases} \quad 15x-10 \leq 10x+5y \leq 15x+10$$

$$4x^2+9y^2-12xy+4x^2-12xy+4y^2-9x^2-9y^2-4x^2-9y^2-13x^2-24xy+18y^2 \leq 52$$

$$3. A = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13) - \text{целое число, П.Р.}$$

$$B = mn(m-2n-2) \quad (m-2n) \text{ и } (m-2n+13) - \text{пары целочисленности}$$

1) $A = 17p^2 - \text{целое} \Rightarrow p^2 - \text{целое} \Rightarrow p - \text{целое} \Rightarrow p = 2, \text{ П.Р. } 2 - \text{единственное простое число} \Rightarrow 17p^2 = 17 \cdot 4 = 68$

$$68 = (x+13)x = x^2 + 13x \Rightarrow x^2 + 13x - 68 = 0$$

$$(x+17)(x-4) = 0 \Rightarrow x = -17 \text{ или } x = 4$$

$$1) m-2n = 4 - \text{цел.} \Rightarrow 13 - \text{цел.} \Rightarrow 9 = 2 \quad \begin{cases} m-2n = 4 \Rightarrow n = 2h+4 \\ mn = 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = 60 = mn = 80 \quad \begin{cases} 2h^2+4h-30=0 \\ h^2+2h-15=0 \\ (h+5)(h-3)=0 \\ h = -5 \text{ или } h = 3 \\ \text{так } m = 10 \end{cases}$$

2) $m-2n = -17 \Rightarrow mn \cdot (-10) = 159^2 > 0$

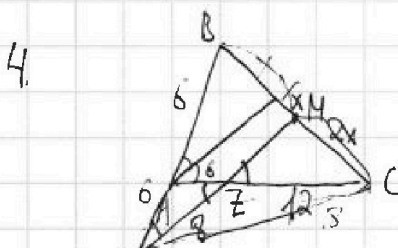
$$mn < 0 \Rightarrow \text{или } m < 0, \text{ или } n < 0 \Rightarrow \text{не ут.}$$

2) $A = 15q^2 - \text{целое} \Rightarrow q = 2 \Rightarrow A = 60$

$$60 = x(x+13) \quad x^2 + 13x - 60 = 0$$

$$D = 169 + 240 = 409$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{409}}{2} - \text{не целое} \Rightarrow \text{не ут.}$$



$$AC = 18 \quad AZ = 6 \quad YZ = 8$$

$$\cos \alpha = \frac{6^2 + 36 - 36}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9}$$

$$BC = \sqrt{36 + 324 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 18 \cdot 6} = \sqrt{384} = 2\sqrt{66}$$

$$5. \begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{2-x-y} \\ 2x^5 + 4x^2 - 4\sqrt{3y} + 2y^5 - 4\sqrt{3x} + 4y^2 \end{cases}$$

$$2 \left(\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \right)^{10} + \frac{4\sqrt{2y}}{\sqrt{2}} + 4 \left(\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \right)^8 + \frac{4\sqrt{2y}}{\sqrt{2}} + 4 \cdot 3 \left(\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$+ 4(x+y)(\sqrt{x+y}) \left(\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right) + 4 \cdot 3 \left(\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \right) \quad X=Y$$

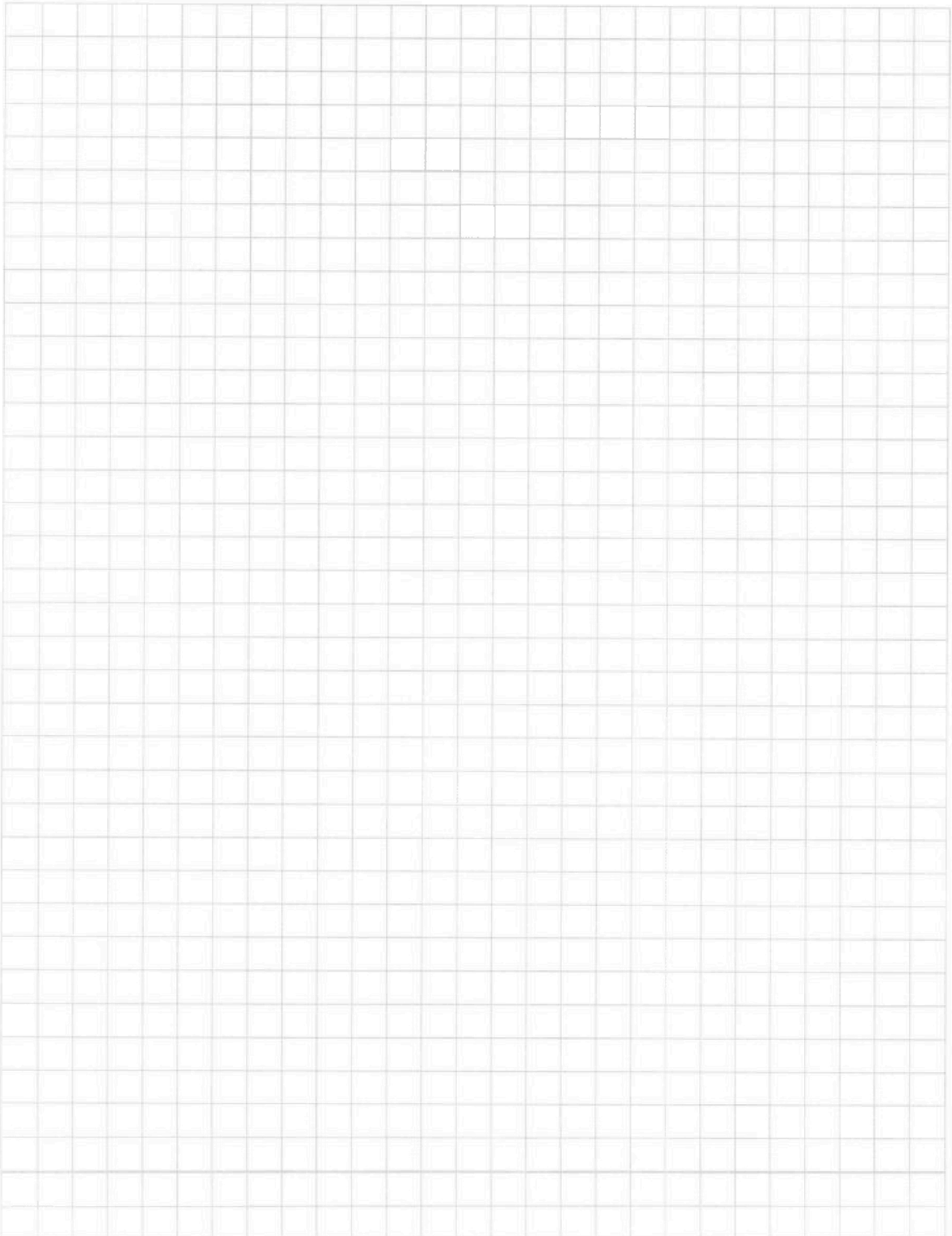


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



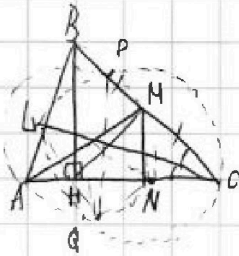


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: AM - медиана; CL - бис-са;
PQ || BH; BH - высота; N ∈ AC; AB=6; AM=5
Круги: AC, BC

Пусть O₁ - центр Ω, O₂ - центр ω.

Т.к. AM - диаметр Ω, то O₁ - середина AM; CL - диаметр ω ⇒ O₂ - середина CL

O₁P = O₁Q = A O₁ = O₁N = O₁M как радиусы окр-сти Ω

∠ANM - вписанный ∠ в Ω, опирающийся на диаметр ⇒ ∠ANM = 90° ⇒

⇒ MN ⊥ AC ⇒ MN || BH, M - середина BC ⇒ MN - средняя линия

△CBH ⇒ CN = NH ⇒ MN - медиана ⇒ △CMH - р/о ⇒ CH = 2MN
MN - высота

Пусть BC = x, ∠ACB = α ⇒ CH = BC · cos α, CN = 1/2 CH = 1/2 BC · cos α = MN = 1/2 x cos α

MN = 1/2 BC · sin α = 1/2 x √(1 - cos² α) ⇒ BH = x √(1 - cos² α), AH = 5 - 1/2 x · cos α

В △ABH по Т. Пифагора: AB² = BH² + AH²

$$36 = x^2(1 - \cos^2 \alpha) + 25 - 5 \cos \alpha x + \frac{1}{4} x^2 \cos^2 \alpha$$

$$11 - x^2 + \frac{3}{4} x^2 \cos^2 \alpha + 5 \cos \alpha x = 0$$

$$x^2 \left(\frac{3}{4} \cos^2 \alpha - 1 \right) + 5x \cos \alpha + 11 = 0$$

$$D = 25 \cos^2 \alpha - 93 \cos^2 \alpha + 44 = 44 - 68 \cos^2 \alpha$$

$$\begin{cases} 4x - 6y \leq 12 \\ 9x - 5y \geq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 6y \leq 12 \\ 6y - 9x \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x \leq 24 \\ x \geq 24/5 \end{cases}$$