



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x+4y^2}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 1

] (a_n) - данная арифм. прогрессия с разностью d . Тогда:

$$\begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x \\ a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2 \\ a_1 + 7d = -6x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x \\ 2d = x^2(x+4)^2 + 12x - 12 \\ 6d = -6x^2 + 12x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x \\ d = -x^2x - 2 \\ x^2(x+4)^2 + 2x^2 - 4x + 4 + 12x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \\ a_1 + d = 12 - 12x \\ d = -x^2 + 2x - 2 \end{cases}$$

Схема Горнера:

1	8	18	8	-8	
-2	1	6	6	-4	0
-2	1	4	-2	0	

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -2 \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

Ответ: $\{-2; -2 + \sqrt{6}; -2 - \sqrt{6}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

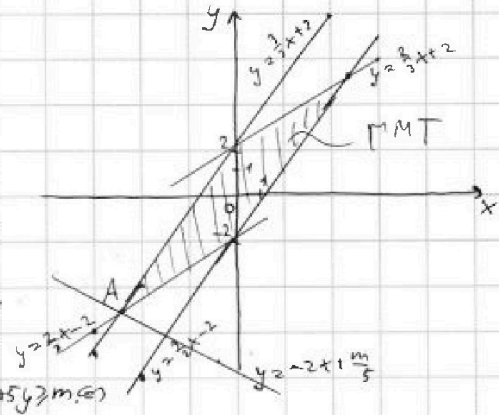
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y \leq 6 \\ 2x-3y \geq -6 \\ 3x-2y \leq 4 \\ 3x-2y \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{2}{3}x-2 \\ y \leq \frac{2}{3}x+2 \\ y \geq \frac{3}{2}x-2 \\ y \leq \frac{3}{2}x+2 \end{cases}$$



] m - наименьшее значение $10x+5y$ при данных условиях для x, y удовлетворяющих условиям.
Тогда ГМТ решения данных условий $10x+5y \geq m$

$\Leftrightarrow y \geq -2x + \frac{m}{5}$, то есть ГМТ, удовлетворяющее условиям лежит на линии $y = -2x + \frac{m}{5}$, и такая линия имеет с ГМТ одну общую точку.

Δ (·) A - точку пересечения $y = \frac{3}{2}x + 2$ и $y = \frac{3}{2}x - 2$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ y = \frac{3}{2}x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ 3x + 4 = 4x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{24}{5} \\ y = -\frac{26}{5} \end{cases} \quad A(-\frac{24}{5}; -\frac{26}{5})$$

Рассматривая прямую $y = -2x + c$, где c - параметр, ставимый в 0, что прямая $y = -2x + \frac{m}{5}$ пройдет тогда и только тогда, когда пройдет через A .

$$\begin{cases} y = -2x + \frac{m}{5} \\ x = -\frac{24}{5} \\ y = -\frac{26}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{26}{5} = 2 + \frac{48}{5} + \frac{m}{5} \Leftrightarrow m = -74$$

оставшиеся значения m имеют нецелые, и.и. значения единичной.

Ответ: -74.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$\begin{cases} A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n \\ B = m^2n - 2mn^2 - 2mn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = (m-2n)^2 + 13(m-2n) \\ B = mn(m-2n-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = (m-2n)(m-2n+13) \\ B = mn(m-2n-2) \end{cases}$$

I. Случай, когда $A = 17p^2$, $B = 15p^2$

$$(m-2n)(m-2n+13) = 17p^2$$

при $m-2n = 17p$: $m-2n+13 = p$, но $m-2n > 17p > p = m-2n+13 > m-2n$ (!)

при $m-2n = p$: $m-2n+13 = 17p > m-2n+16 = m-2n+16$ (!)

при $m-2n = 17$: $p^2 = m-2n+13 = 17+13=30$ — не п.кв.р!

при $m-2n+13 = 17$: $m-2n = 4$

$$mn(m-2n-2) = 15p^2 \stackrel{m-2n=4}{=} (n^2+4n)2 = 15p^2 \stackrel{m=2n+4}{=} n^2+2n = 15 \stackrel{n \geq 0}{\Rightarrow} n=3$$

$$m-2n=4 \stackrel{n=3}{\Rightarrow} m=10$$

найдем (3; 10)

II. Случай, когда $A = 15p^2$, $B = 17p^2$

при $m=1$: $B = n(-2n-1) < 0$, но $17p^2 > 0$ (!)

при $n=1$: $B = m(m-4)$

- 1) при $m = 17p > 16$
- 2) при $m = p$: $m-4 = 17p > p > m$ (!)

3) при $m = 17$: $p^2 = 17-4 = 13$ (!)

4) при $m-4 = 17$: $m = 21 = p^2$ (!)

при $m=17$: $n =$

$$m-2n-2=1:$$



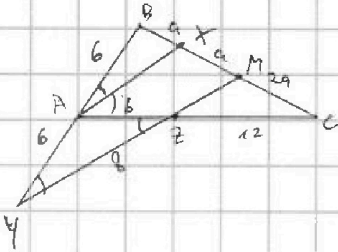
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

24



$$AX \parallel YM \Rightarrow \angle AZY = \angle AX$$

равноуг. с к

$$\Rightarrow AY = AZ = 6$$

$$\angle ZYA = \angle XAD$$

$$AX \parallel YM \Rightarrow \frac{CM}{XM} = \frac{YC}{AZ} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} BM = M \\ CM = \frac{1}{2} \\ XM = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow BT: XM: MC = 1:1:2$$

св-во син

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{CX} = \frac{1}{3} \Rightarrow AB = 8$$

$\triangle MZC \sim \triangle AZZ$ *Треугольн:*



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sim 5$$

$$2x^5 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y = 2y^5 - 4\sqrt{3}x + 4y^2 \Leftrightarrow 2x^5 + 4x^2 + 3\sqrt{3}x = 2y^5 + 4y^2 + 3\sqrt{3}y \Leftrightarrow x = y$$

т.к. $90 - 8\sqrt{3} < 0$
 $f(x) = 2x^5 + 4x^2 + 3\sqrt{3}x$ отпр. т.к. нестр.р.
 и убывает (из-за макс.)

условие равенства сторонней т.е. т.е.:

$$\begin{cases} x=y \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+4)(3-x)} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = 4(x+4)(3-x) - 20\sqrt{(x+4)(3-x)} + 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2(x+4)(3-x) - 9\sqrt{(x+4)(3-x)} + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 9 \cdot 8}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = 6 \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2 + x - 12 = -36 \\ x^2 + x - 12 = -9 \\ (x+4)(3-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-4 \\ x \in 3 \\ x=y \\ x^2 + x + 24 = 0 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \\ x=2-4 \\ x=3 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=2 \\ x=3 \\ x=2-4 \\ x=3 \end{cases}$$

$$-4 < \frac{-1-4}{2} < \frac{-1-\sqrt{13}}{2} < 0 < 3$$

$$-4 < 0 < \frac{-1+\sqrt{13}}{2} < \frac{-1+4}{2} < 3$$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right); \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \right) \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

В квадрате 7×7 64 узла сетки
(т.е. границы)

Всего случаев перекрытия узлов (см. условие) ^{с учётом} без учёта ориентации C_{64}^2 .
 Без учёта ориентации C_{64}^2 перекрытия симметричны относительно центра перекрытия.
 Зададимся вопросом (т.е. если такую перекрыть как-либо поворачивать, получится
 ещё одна симм. перекрытия, а остальных - ветверо (т.е. при поворачивании
 можно получить ещё 3 не симм. перекрытия).

32 Антис. перекрытия 32 (один узел в нижней половине квадрата, второй
 восстанавливаем симм.)

$$\frac{C_{64}^2 - 32}{4} + \frac{32}{2} = \frac{64 \cdot 63}{2} - \frac{32}{4} + \frac{32}{2} = 8 \cdot 63 - \frac{32}{4} = 480 + 24 - 8 = 496$$

Ответ: 496

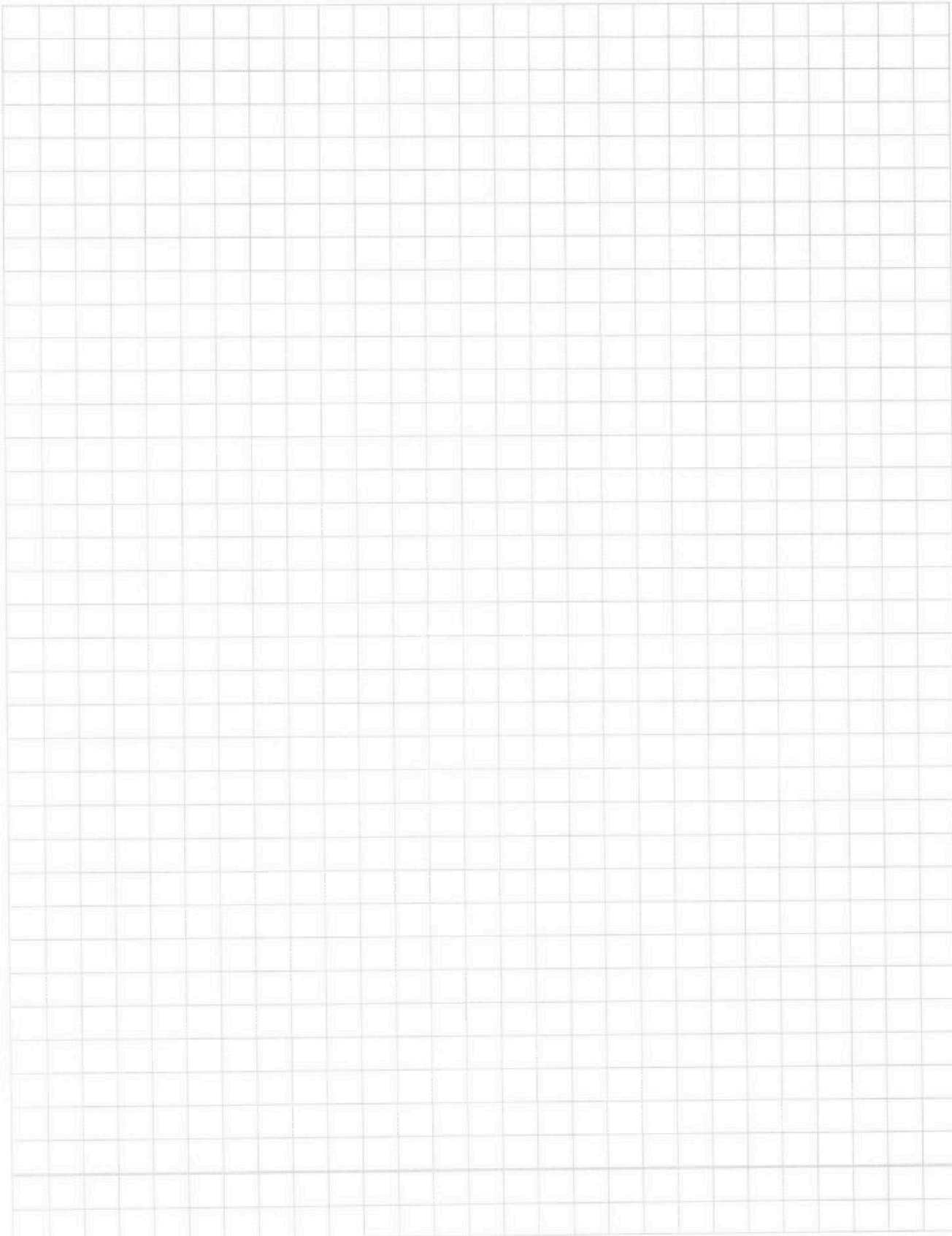


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



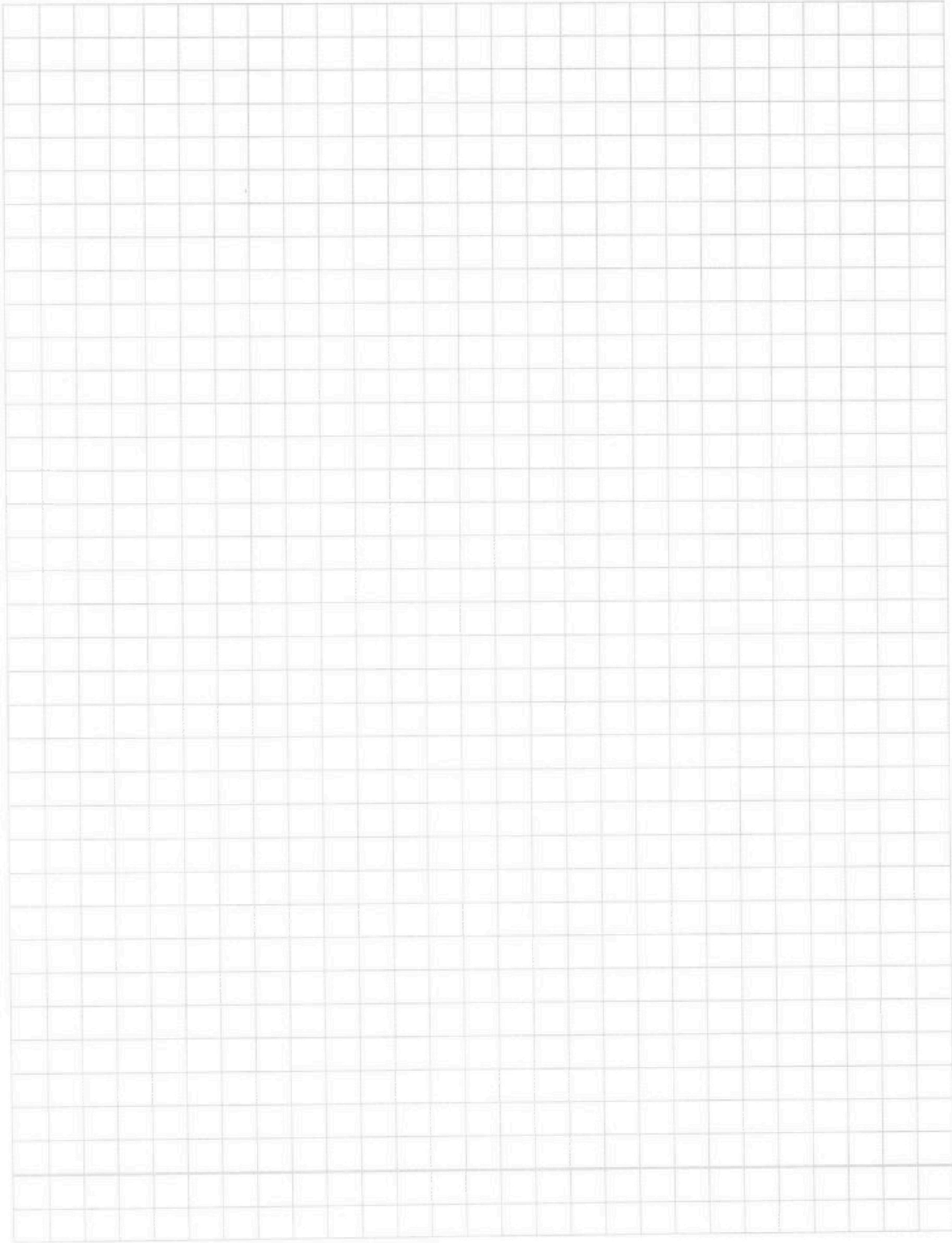


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13)$$

$$B = mn(m-2n-2)$$

$$A = 179^2$$

$$x(2x+3) = 179 \cdot 179$$

$$4 \cdot 17$$

$$m-2n=4$$

$$B = mn \cdot 2$$

$$mn = 30$$

$$m-2n=4$$

$$m = 2n+4$$

$$2n^2 + 4n - 30 = 0$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$n = -5$$

$$n = 3$$

$$m = 10$$

$$mn(m-2n-2) = 179^2$$

$$n(1-2n)$$

$$m(m-4) = 179^2$$

$$179$$

$$179 \cdot 9$$

$$mn(m-2n-2)$$

$$99$$

$$179 \cdot 9$$

$$17+29-2 \cdot 29 = 1/9 = 5/3$$

$$m=17$$

$$9 \cdot 17 \cdot 9$$

$$9 - 34 - 2 \cdot 9$$

$$\frac{24}{2} + \frac{C_{49}}{4}$$

$$12 + \frac{49 \cdot 48}{8} = 12 + 294$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{3x+5} = 2\sqrt{x}$$

$$2x^5 + 4x^2 + \sqrt{3x} = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt{3y}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+5} + 5 = 2\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+5} = 2\sqrt{x} - 5$$

$$7+25 = 20\sqrt{ab} = 4ab \Rightarrow 2ab + 10\sqrt{ab}$$

$$52 \cdot 4 = 20\sqrt{ab} + 4ab + 10\sqrt{ab}$$

$$a-b = 2ab+5 \Rightarrow 2ab+5\sqrt{ab} - 16 = 0$$

$$2ab+5\sqrt{ab} - 16 = 0$$

$$25 + 4 \cdot 6 \cdot 8 = 25 + 2 \cdot 4 \cdot 8 = 25 + 64 = 89$$

$$7 = 4ab - 10\sqrt{ab} + 25 = 1$$

$$(2a+1)(b-1) = 0$$

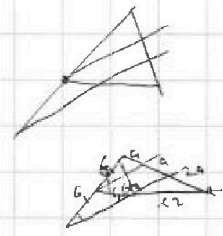
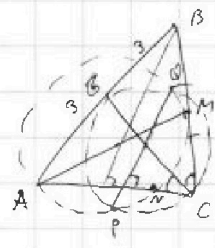
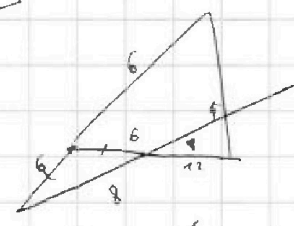
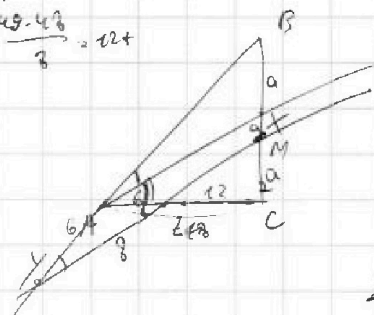
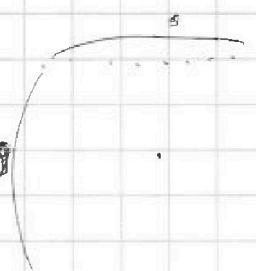
$$(2a+1)(b+\frac{1}{2}) = 0$$

$$\sqrt{9} - \sqrt{6} = 2\sqrt{ab} - 5$$

$$7 = 4ab - 10\sqrt{ab} + 25$$

$$2ab - 10\sqrt{ab} + 9$$

$$100 - 9 \cdot 2 \cdot 8 = 20$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

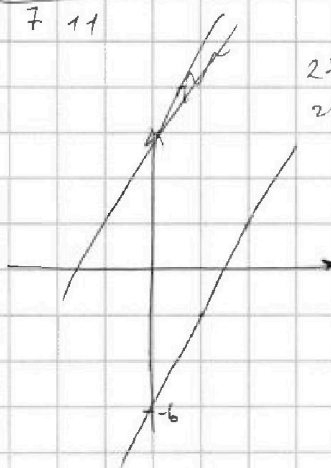
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 12-12x=9 \\ (x^2+4x)^2 = a+2d \\ -6x^2 = a+6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12-12x=9 \\ x^4+8x^3+16x^2+12x-12=2d \\ -6x^2=12-12x+6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2(2x+d) \\ d = x-1-x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^4+8x^3+16x^2+12x-12+2x^2+2-2x \\ x^4+8x^3+18x^2+10x-10=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2(x+4)^2+12-12x+2x^2+2-2x \\ \Leftrightarrow x^2(x+4)^2+2(x^2-4x+4)=0 \end{aligned}$$

	1	8	18	10	-10
-1	1	7	11		

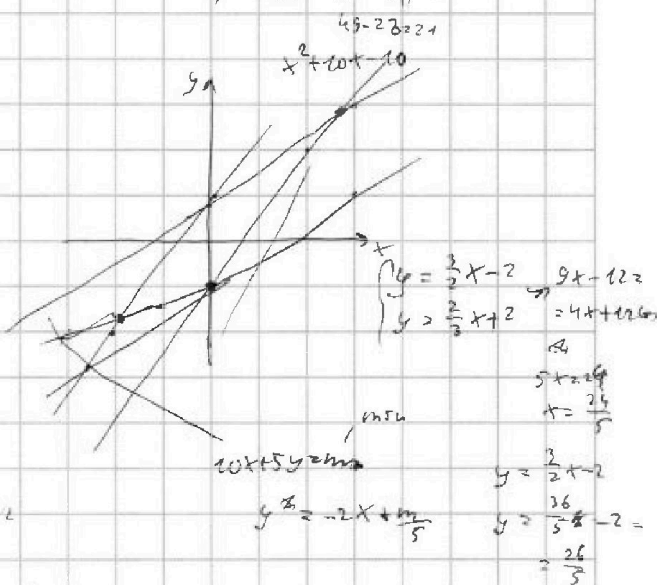


$$2x-3y \leq 6$$

$$y \geq \frac{2x-6}{3}$$

$$\begin{aligned} 3x-2y &\leq 4 \\ y &\geq \frac{3x-4}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12-12x &\leq 9 \\ 12-12x &\leq 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3}x - 2 \\ y &\geq \frac{3}{2}x + 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 9x - 12 &\geq 4x + 12 \\ 5x &\geq 24 \\ x &\geq \frac{24}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2(x+4)^2 &= a+2d \\ 12-12x+2d \end{aligned}$$

$$x^2(x+4)^2 = 12-12x+2d \Rightarrow x^2(x+4)^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4+8x^3+18x^2+10x-8=0$$

	1	8	18	10	-8
-1	1	7	11		
-2	1	6	6	-4	0
-2	1	4	-2	0	

$$x^2+4x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2}$$

$$\begin{aligned} y &\geq \frac{3}{5}x \\ \left(\frac{-2}{5}, \frac{26}{5}\right) \\ -4 \cdot 8 + 26 &= -74 \end{aligned}$$