



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен  $12 - 12x$ , четвёртый член равен  $(x^2 + 4x)^2$ , а восьмой равен  $(-6x^2)$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $10x + 5y$  при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$  и  $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$  равно  $17p^2$ , а другое равно  $15q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x+4y^2}. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $7 \times 7$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 6$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 1

]  $(a_n)$  - данная арифм. прогрессия с разностью  $d$ . Тогда:

$$\begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x \\ a_1 + 3d = (x^2 + 4x)^2 \\ a_1 + 7d = -6x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x \\ 2d = x^2(x+4)^2 + 12x - 12 \\ 6d = -6x^2 + 12x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = 12 - 12x \\ d = -x^2x - 2 \\ x^2(x+4)^2 + 2x^2 - 4x + 4 + 12x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \\ a_1 + d = 12 - 12x \\ d = -x^2 + 2x - 2 \end{cases}$$

Схема Горнера:

1	8	18	8	-8	
-2	1	6	6	-4	0
-2	1	4	-2	0	

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2 + 4x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -2 \pm \sqrt{6} \end{cases}$$

Ответ:  $\{-2; -2 + \sqrt{6}; -2 - \sqrt{6}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

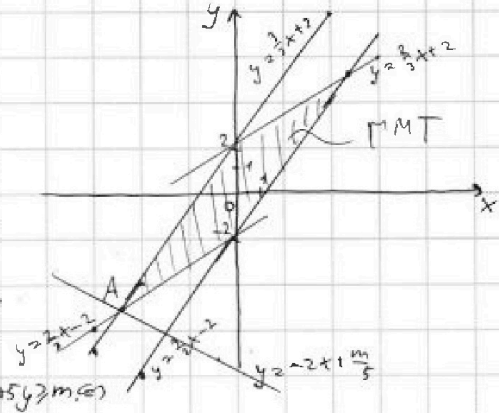
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~2

$$\begin{cases} |2x-3y| \leq 6 \\ |3x-2y| \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y \leq 6 \\ 2x-3y \geq -6 \\ 3x-2y \leq 4 \\ 3x-2y \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{2}{3}x-2 \\ y \leq \frac{2}{3}x+2 \\ y \geq \frac{3}{2}x-2 \\ y \leq \frac{3}{2}x+2 \end{cases}$$



]  $m$  - наименьшее значение  $10x+5y$  при данных условиях для  $x, y$  удовлетворяющих условиям.  
Тогда ГМТ решения данных условий  $10x+5y \geq m$

$\Leftrightarrow y \geq -2x + \frac{m}{5}$ , то есть ГМТ, удовлетворяющее условиям лежит на линии  $y = -2x + \frac{m}{5}$ , и такая линия имеет с ГМТ одну общую точку.

$\Delta$  (·)  $A$  - точку пересечения  $y = \frac{3}{2}x + 2$  и  $y = \frac{2}{3}x - 2$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ 3x + 12 = 4x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{24}{5} \\ y = -\frac{26}{5} \end{cases} \quad A(-\frac{24}{5}; -\frac{26}{5})$$

Рассматривая прямую  $y = -2x + c$ , где  $c$  - параметр, становится ясно, что прямая  $y = -2x + \frac{m}{5}$  пройдет тогда и только тогда, когда пройдет через  $A$ .

$$\begin{cases} y = -2x + \frac{m}{5} \\ x = -\frac{24}{5} \\ y = -\frac{26}{5} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{26}{5} = 2 + \frac{48}{5} + \frac{m}{5} \Leftrightarrow m = -74$$

оставшиеся значения  $m$  имеют нецелые, и.и. значения единичной.

Ответ: -74.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$\begin{cases} A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n \\ B = m^2n - 2mn^2 - 2mn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = (m-2n)^2 + 13(m-2n) \\ B = mn(m-2n-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = (m-2n)(m-2n+13) \\ B = mn(m-2n-2) \end{cases}$$

I. Случай, когда  $A = 17p^2$ ,  $B = 15p^2$

$$(m-2n)(m-2n+13) = 17p^2$$

при  $m-2n = 17p$ :  $m-2n+13 = p$ , но  $m-2n > 17p > p = m-2n+13 > m-2n$  (!)

при  $m-2n = p$ :  $m-2n+13 = 17p > m-2n+16 = m-2n+16$  (!)

при  $m-2n = 17$ :  $p^2 = m-2n+13 = 17+13=30$  — не п.кв.р!

при  $m-2n+13 = 17$ :  $m-2n = 4$

$$mn(m-2n-2) = 15p^2 \stackrel{m-2n=4}{=} (n^2+4n)2 = 15p^2 \stackrel{p=2}{=} n^2+2n = 15 \Rightarrow n=3$$

$$m-2n=4 \stackrel{n=3}{\Rightarrow} m=10$$

найдем (3; 10)

II. Случай, когда  $A = 15p^2$ ,  $B = 17p^2$

при  $m=1$ :  $B = n(-2n-1) < 0$ , но  $17p^2 > 0$  (!)

при  $n=1$ :  $B = m(m-4)$

- 1) при  $m = 17p > 16$
- 2) при  $m = p$ :  $m-4 = 17p > p > m$  (!)

3) при  $m = 17$ :  $p^2 = 17-4 = 13$  (!)

4) при  $m-4 = 17$ :  $m = 21 = p^2$  (!)

при  $m=17$ :  $n =$

$$m-2n-2=1:$$





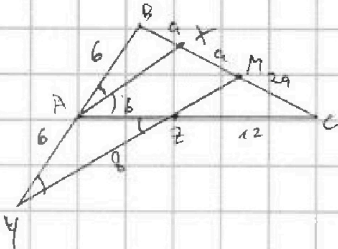
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

24



$$AX \parallel YM \Rightarrow \angle AZY = \angle AX$$

*равноуг. с к*

$$\left. \begin{array}{l} \angle XAZ \\ \angle ZYA = \angle XAD \end{array} \right\} \Rightarrow AY = AZ = 6$$

$$AX \parallel YM \Rightarrow \text{Т. ФАЛЕСА}$$

$$\frac{CM}{XM} = \frac{YC}{AZ} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} BM = M \\ CM = \frac{1}{2} \\ XM = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow BT: XM: MC = 1:1:2$$

св-во сик

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{CX} = \frac{1}{3} \Rightarrow AB = 8$$

$\triangle MZC = \triangle AZZ$  *Т. ФАЛЕСА*



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sim 5$$

$$2x^5 + 4x^2 - 4\sqrt{3}y = 2y^5 - 4\sqrt{3}x + 4y^2 \Leftrightarrow 2x^5 + 4x^2 + 3\sqrt{3}x = 2y^5 + 4y^2 + 3\sqrt{3}y \Leftrightarrow x = y$$

т.к.  $90 - 8\sqrt{3} < 0$   
 $f(x) = 2x^5 + 4x^2 + 3\sqrt{3}x$  отпр. т.к. нестр.р.  
 и убывает (из-за макс.)

условие равенства сторонней т.е. т.е.:

$$\begin{cases} x=y \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+4)(3-x)} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = 4(x+4)(3-x) - 20\sqrt{(x+4)(3-x)} + 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2(x+4)(3-x) - 9\sqrt{(x+4)(3-x)} + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 9 \cdot 8}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = 6 \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2 + x - 12 = -36 \\ x^2 + x - 12 = -9 \\ (x+4)(3-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-4 \\ x \in 3 \\ x=y \\ x^2 + x + 24 = 0 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=2-4 \\ x=2-4 \\ x \in 3 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2} \end{cases}$$

$$-4 < \frac{-1-4}{2} < \frac{-1-\sqrt{13}}{2} < 0 < 3$$

$$-4 < 0 < \frac{-1+\sqrt{13}}{2} < \frac{-1+4}{2} < 3$$

Ответ:  $\left\{ \left( \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right); \left( \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \right) \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

В квадрате  $7 \times 7$  64 узла сетки  
(т.е. границы)

Всего случаев перекрытия узлов (см. условие) <sup>с учётом</sup> без учёта ориентации  $C_{64}^2$ .  
 Без учёта ориентации  $C_{64}^2$  перекрытия симметричны относительно центра перекрытия  
 делятся на две (т.е. если такую перекрыть как-либо поворачивать, получится  
 ещё одна симм. перекрытия), а остальные - ветверо (т.е. при поворачивании  
 можно получить ещё 3 не симм. перекрытия).

32 Антис. перекрытия 32 (один узел в нижней половине квадрата, второй  
 восстанавливаем симм.)

$$\frac{C_{64}^2 - 32}{4} + \frac{32}{2} = \frac{64 \cdot 63}{2} - \frac{32}{4} + \frac{32}{2} = 8 \cdot 63 - \frac{32}{4} = 480 + 24 - 8 = 496$$

Ответ: 496



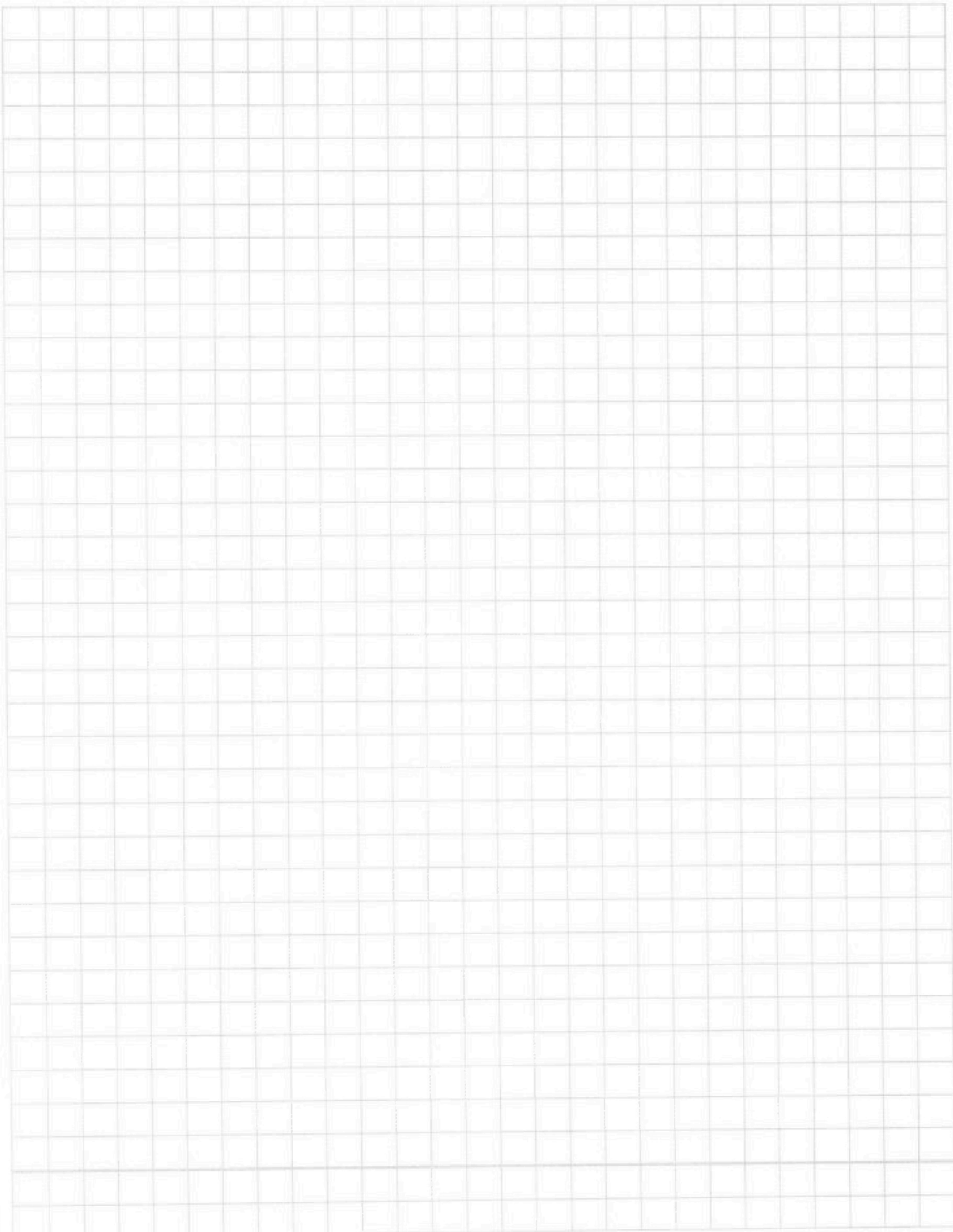


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





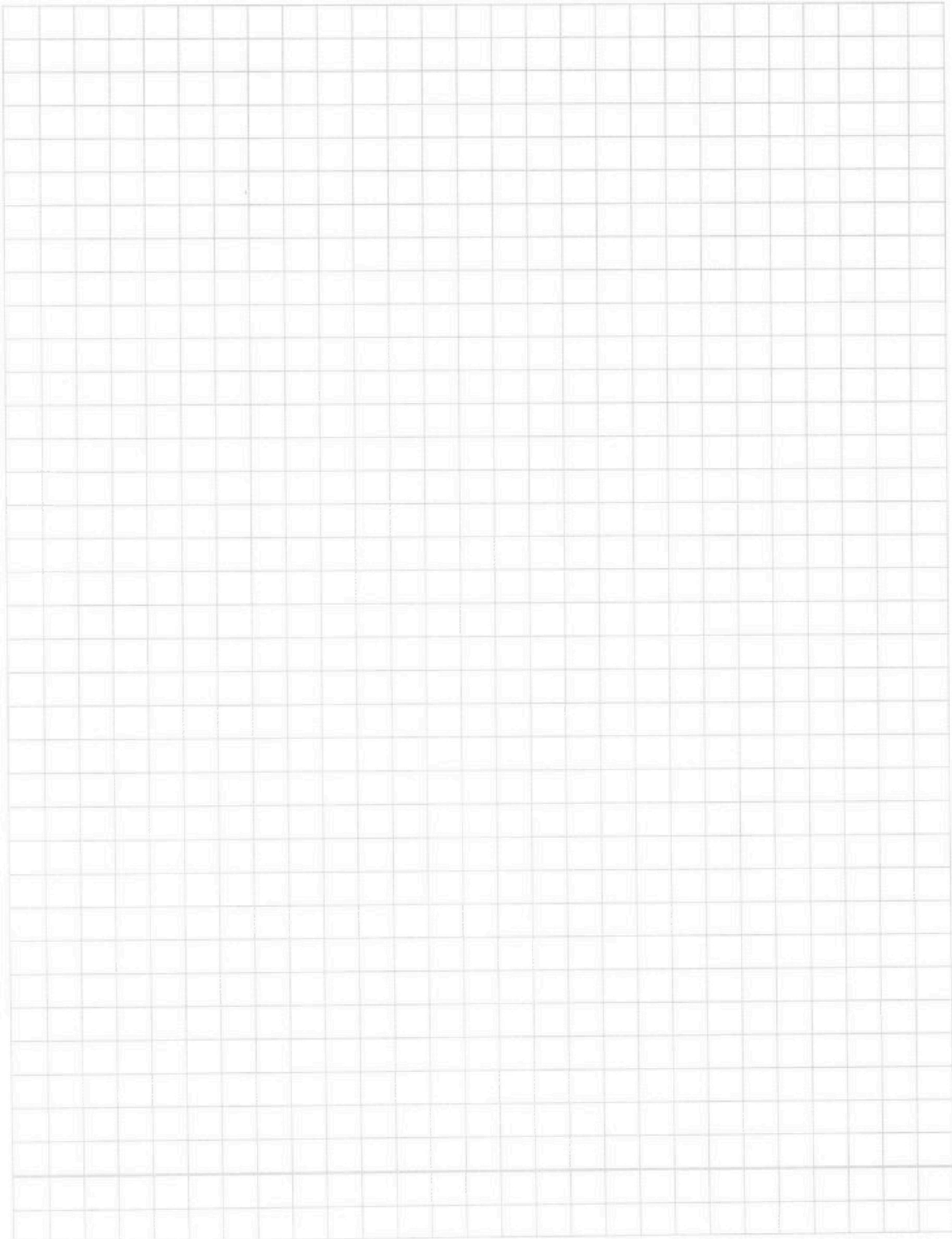


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A = (m-2n)^2 + 13(m-2n) = (m-2n)(m-2n+13)$   
 $B = mn(m-2n-2)$

$A = 179^2$   
 $x(2x+3) = 179^2$   
 $4x+6 = 179$   
 $4x = 173$   
 $x = 43.25$

$m-2n=4$   
 $B = mn-2$   
 $mn=30$   
 $m-2n=4$   
 $m=2n+4$

$2n^2 + 4n - 30 = 0$   
 $n^2 + 2n - 15 = 0$   
 $(n-3)(n+5) = 0$   
 $n = 3$   
 $m = 10$

$mn(m-2n-2) = 179^2$

$n(1-2n)$

$m(m-4) = 179^2$

$179^2 = 32041$   
 $41 \cdot 179 = 7339$   
 $179 \cdot 9 = 1611$

$mn(m-2n-2)$

$99 \cdot 179$

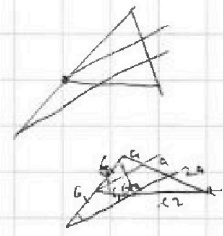
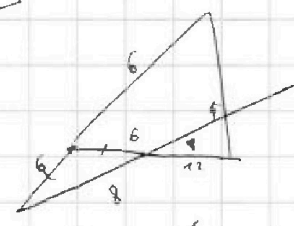
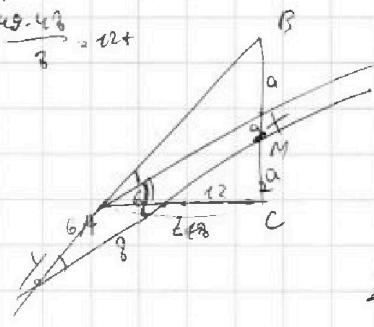
$179 \cdot 9$

$17+29-2 \cdot 29 = 17-29 = -12$

$9 \cdot 179$

$9-34-2 \cdot 9 = -34-18 = -52$

$\frac{24}{2} + \frac{C_{49}^2}{4} = 12 + \frac{49 \cdot 48}{8} = 12 + 294 = 306$



$\sqrt{x+4} + \sqrt{3x-1} + 5 = 2\sqrt{x^2-x+1}$

$2x^5 + 4x^2 + \sqrt{3x} = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt{3y}$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{3x-1} + 5 = 2\sqrt{x^2-x+1}$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{3x-1} + 5 = 2\sqrt{(x+4)(x-1)}$

$7+25-20\sqrt{3x-1} = 2\sqrt{ab} \Rightarrow 2\sqrt{ab} = 32-20\sqrt{3x-1}$

$32 - 20\sqrt{3x-1} = 2\sqrt{ab}$

$a-b = 2ab+5=0$

$2ab+5\sqrt{ab}-16=0$

$25+16 \cdot 8 = 25+128 = 153$

$7 = 4ab - 20\sqrt{ab} + 25 = 1$

$(2a-1)(b-1) = 0$

$(2a+1)(b+\frac{1}{2}) = 0$

$\sqrt{9} - \sqrt{6} = 2\sqrt{ab} - 5$

$7 = 4ab - 20\sqrt{ab} + 25$

$2ab - 10\sqrt{ab} + 9$

$100 - 9 \cdot 2 \cdot 8 = 20$

$\sqrt{ab} = \sqrt{5} \pm \sqrt{25-18} = 5 \pm \sqrt{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

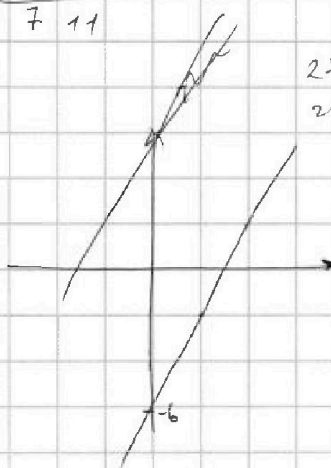
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 12-12x=9 \\ (x^2+4x)^2 = a+2d \\ -6x^2 = a+6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12-12x=9 \\ x^4+8x^3+16x^2+12x-12=2d \\ -6x^2=12-12x+6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2(2x+d) \\ d = x-1-x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^4+8x^3+16x^2+12x-12+2x^2+2-2x \\ x^4+8x^3+18x^2+10x-10=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2(x+4)^2+12-12x+2x^2+2-2x \\ \Leftrightarrow x^2(x+4)^2+2(x^2-10x+11)=0 \end{aligned}$$

	1	8	18	10	-10
-1	1	7	11		



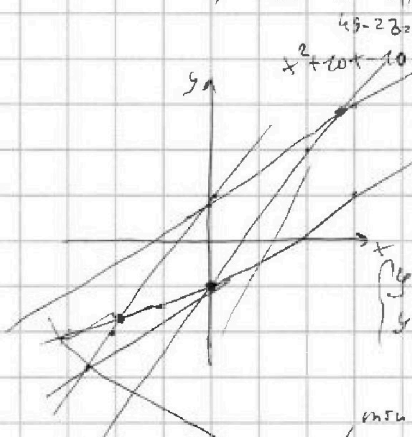
$$2x-3y \leq 6$$

$$y \geq \frac{2x-6}{3}$$

$$3x-2y \leq 4$$

$$y \geq \frac{3x-4}{2}$$

$$\begin{cases} 12-12x \leq 9 \\ -12-12x \leq 6 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 2 \\ y = \frac{3}{2}x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 12 = 4x + 12 \\ 5x = 24 \\ x = \frac{24}{5} \\ y = \frac{3}{2} \cdot \frac{24}{5} - 2 = \frac{36}{5} - 2 = \frac{26}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(x+4)^2 = a+2d \\ 12-12x+2d \end{cases}$$

$$x^2(x+4)^2 = 12-12x+2d \Rightarrow x^2(x+4)^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4+8x^3+18x^2+10x-8=0$$

	1	8	18	10	-8
-1	1	7	11		
-2	1	6	6	-4	0
-2	1	4	-2	0	

$$x^2+4x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 26 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$-48+26 = -22$$