



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1.

$$a + K \cdot 4 = 6x + 18 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5a + 20K = 30x + 18 \cdot 5 \\ 2a + 20K = -6x^2 \end{cases}$$

$$a + K \cdot 6 = x^2 \cdot (x-4)^2$$

$$a + K \cdot 10 = -3x^2 \quad 3a = 30x + 18 \cdot 5 + 6x^2$$

$$a = 10x + 30 + 2x^2$$

$$2K = \frac{1}{2}(6x + 18 - 10x - 30 - 2x^2)$$

$$2K = -2x - 6 - x^2$$

$$10x + 30 + 2x^2 + (-3x^2 - 18 - 6x) = x^2 \cdot (x-4)^2$$

$$-x^2 + 12 + 4x = x^2 \cdot (x-4)^2$$

$$-(x-2)^2 + 16 = x^2 \cdot (x-4)^2 = (x^2 - 4x)^2$$

$$-(x-2)^2 + 16 = 9$$

$$(x^2 - 4x)^2 = 9$$

$$(x-2+4)^2 = 9$$

$$x-2 = \pm\sqrt{9}$$

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{9} \\ x = 2 - \sqrt{9} \end{cases}$$



Какой подходит?

$2 + \sqrt{9}$ подходит, ведь $6x + 18 > 0$

$2 - \sqrt{9}$ не подходит

ведь $6x + 18 > 0$ т.к. $2 \cdot 5\sqrt{9} + 18 > 0$, т.к. $30 - 6\sqrt{9} > 0$, т.к. $5 > \sqrt{9}$

$$x^2 - 4x = 3$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$x^2 - 4x = -3$$

$$x = 2 \pm 1$$

не подходит, ведь $(x-2)^2 + 16 = 9$

Если нарисовать график, видно, что пересечения будут между $x = 4$ и $x = 5$ (сложно)

предположили

$$-(x-2)^2 + 16 = 9$$

ответ: $x = 2 + \sqrt{9}$ или $x = 2 - \sqrt{9}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

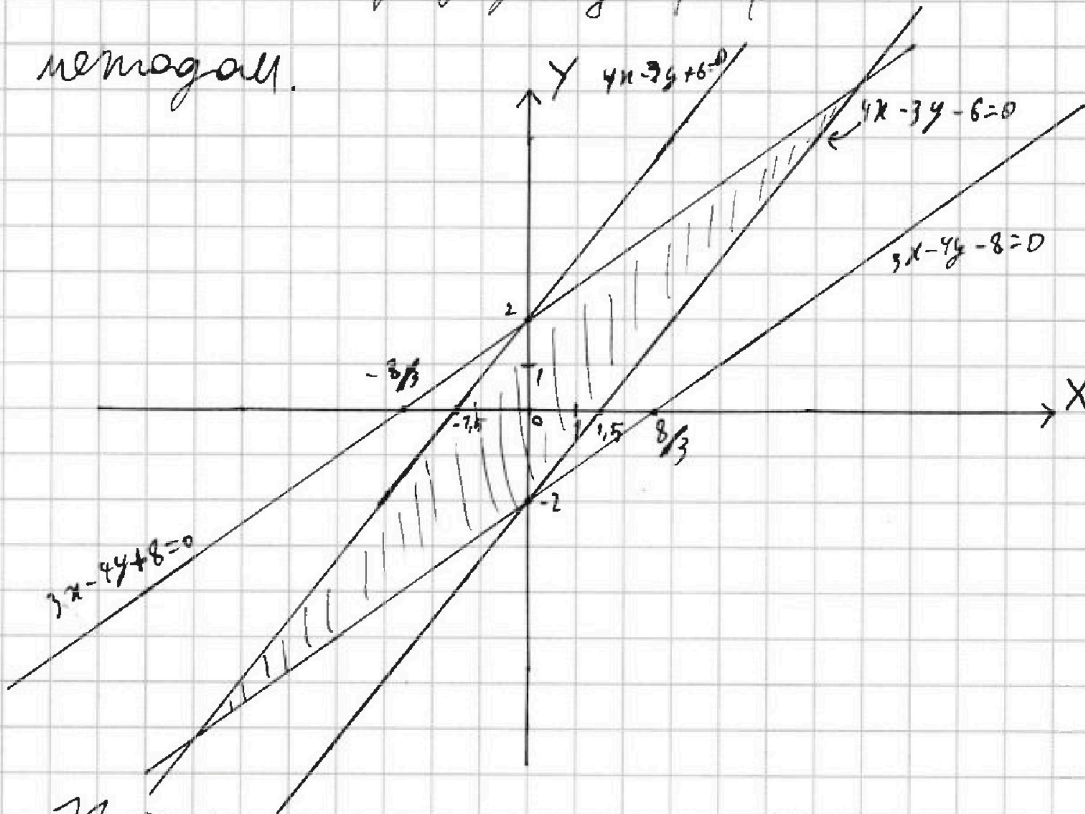
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2.

Решим эту задачу графическим методом.



Найдём на координатной плоскости

места, где выполняются $|4x - 3y| \leq 6$

$$\text{или} \begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \\ 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 4y| \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 6 \\ 4x - 3y \geq -6 \end{cases} \text{ между прямыми } 4x - 3y + 6 = 0 \text{ и } 4x - 3y - 6 = 0$$

$$\begin{cases} 3x - 4y \leq 8 \\ 3x - 4y \geq -8 \end{cases} \text{ между прямыми } 3x - 4y + 8 = 0 \text{ и } 3x - 4y - 8 = 0$$

Надо найти $\min(x \cdot (2x + y))$ в заштрихованной области



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2. (медаль)

Очевидно, что min будет в точке

пересечения $\begin{cases} 4x - 3y + 6 = 0 \\ 3x - 4y - 8 = 0 \end{cases}$, все на границах

замкнутой области. Находим координаты точки, у которой была минимальная функция x возрастает и y

$$\begin{cases} 4x - 3y + 6 = 0 \\ 3x - 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 9y + 18 = 0 \\ 12x - 16y - 32 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18 + 32(16-9)y = 0 \\ 7y = -18 - 32 = -50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16x - 12y + 24 = 0 \\ 9x - 12y - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x - 9x + 48 = 0 \\ 7x + 48 = 0 \\ 7x = -48 \end{cases}$$

$$14x + 7y = 2 \cdot (-50) + (-48) = -148$$

Ответ: -148

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + k \cdot 4 = 6x + 18$$

$$a + k - 6 = (x^2 - 4x)^2$$

$$a + k - 10 = -3x^2$$

$$-6k = 6x + 18 + 3x^2$$

$$-2k = 2x + 6 + x^2$$

$$5a + k \cdot 20 = 30x + 18 \cdot 5$$

$$2a + k \cdot 20 = -6x^2$$

$$3a = 30x + 18 \cdot 5 - 6x^2$$

$$a = 10x + 30 - 2x^2$$

$$4x - 3y \leq 6$$

$$4x - 3y \geq -6$$

$$3x - 4y \leq 9$$

$$3x - 4y \geq 9$$

$$\frac{8}{3} =$$

$$6x + 18 - x^4 - 16x^2 + 8x^3 =$$

$$= x^4 + 16x^2 - 8x^3 + 3x^2$$

$$x^4 - 16x^3 + 35x^2 - 6x + 18 \geq 0$$

$$16 - 128 + 140 - 12 + 18 = 2$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 16 \\ \hline 128 \\ \times 140 \\ \hline 238 \\ \hline 190 \end{array}$$

$$x^4 + 16x^2 - 8x^3 = x^2 \cdot (x - 4)^2$$

$$= 10x + 30 - 2x^2$$

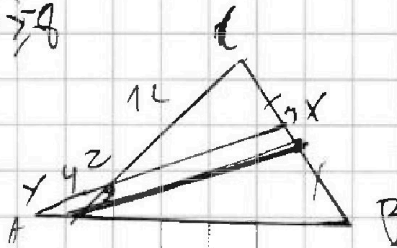
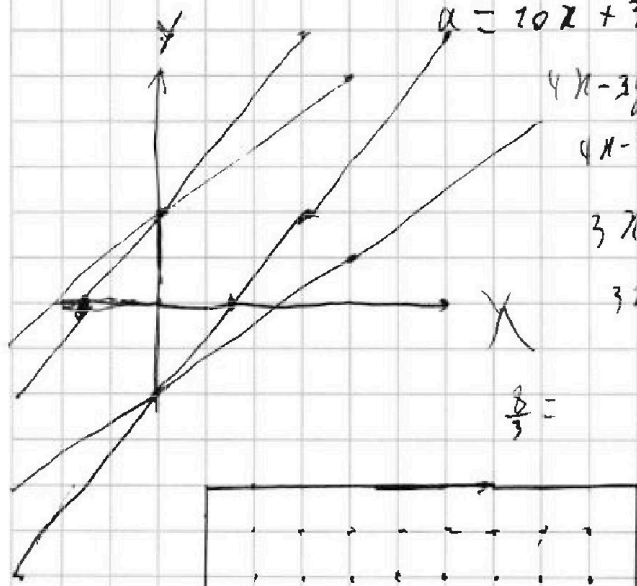
$$+ 9x + 18 + 3x^2$$

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 = x^2 + 19x + 48$$

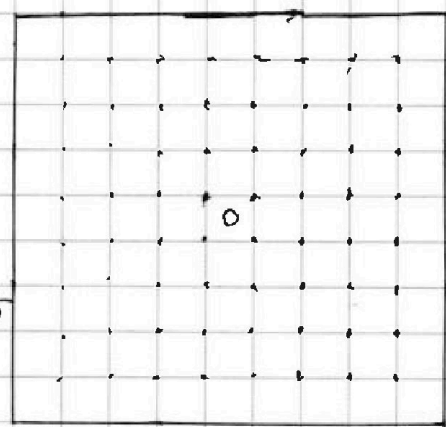
$$x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 19x - 48 = 0$$

$$1 + 8 + 15 + 19 - 48 = 9 + 15 - 28 = 2$$

$$16 - 64 + 60 - 38 - 48 =$$



$$\begin{array}{r} x^2 5 \\ 50 \\ \hline 1250 \end{array}$$



$$8A \text{ BУЖ} 200$$

$$200 \cdot 99 / 4$$

$$99$$

$$\frac{100 \cdot 99}{2} = 50$$

$$50 \cdot 99 - 50 =$$

$$= 50 \cdot 98$$

$$\frac{50 \cdot 98}{4}$$

$$4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3.

$$A = m^2 - 2mh + h^2 + 9m - 9h$$

$$A = (m-h)^2 + 9(m-h) = (m-h+9)(m-h)$$

$$B = m^2h - mn^2 + 3mh = mh(m-h+3)$$

заменим, что если $m-h$ - НОД, то $m-h+9$ - ~~целое~~,
и и находим

~~$$A = 13 \cdot 4 = 52$$~~

$$A = 13 \cdot 4 = 52$$

~~тогда m и h должны быть ~~целыми~~,
иначе B - ~~целое~~ \Rightarrow ~~$mp+q=2$~~~~

~~иначе B - ~~целое~~ \Rightarrow ~~$mp+q=2$~~~~

Также можно заметить, что A должно

представляться в виде $13p^2$, пусть $13p^2$, пусть $13p^2$,

тогда $A = 3q^2 \Rightarrow$ т.к. у $m-h+9$ и $m-h$ ~~статок~~

но ~~тогда~~ 3 ~~делит~~, то I) ~~делит~~ ~~делит~~ \Rightarrow ~~не~~ $3q^2$

II) ~~делит~~ ~~делит~~ \Rightarrow $3q^2 : 9 \Rightarrow q^2 : 3 \Rightarrow q = 3$, тогда

$A = 27$ - ~~не~~ \Rightarrow ~~не~~ $3q^2 \Rightarrow$ ~~доказываем~~, что

$$A = 13p^2 \Rightarrow B = 3q^2$$

$$A = 13 \cdot 4 = 52 \Rightarrow (m-h+9)(m-h) = 52 \Rightarrow x^2 + 9x - 52$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 208}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-9 + 17}{2} \\ x = \frac{-9 - 17}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-h = 4 \\ m-h = 13 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3. (по 3 балла)

$$A = 52 = 13 \cdot 2^2; \quad B = 39^2 = m \cdot n \cdot (m+n+3)$$

$$\begin{cases} m-n = 4 \\ m-n = -13 \end{cases}$$

$$m-n = -13 \Rightarrow m \cdot n \cdot (m-n+3) < 0, \text{ так как } m, n > 0$$

$$\Downarrow$$

$$m-n = 4$$

$$B = m \cdot n \cdot (4+3) = 7mn$$

$$B = m \cdot n \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\Downarrow$$

$$T.K. 39^2 = 7, \text{ тогда } 7$$

$$\begin{cases} m \cdot n = 27 \\ m-n = 4 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$T.K. B = 3 \cdot 7 \cdot 7, \text{ тогда } m=7, n=3$$

$$n=3 \Rightarrow m=7$$

~~Ответ: $(m; n) = (7; 3)$~~
~~Ответ: $(n; m) = (3; 7)$~~

Ответ: есть одна пара значений $(n=3; m=7)$

$$(n; m) = (3; 7)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4.

$$AC = 12 \quad AZ = 3 \quad YZ = 4$$

$$AX - \text{высота} \quad MB = MC$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC}$$

$$AX \parallel YM$$

$$\begin{aligned} & \text{т.к. } \angle YBM = \angle ABX \\ & \angle BAX = \angle MYM \Rightarrow \triangle ABX \sim \triangle MYM \\ & \frac{BA}{MY} = \frac{BX}{YM} = \frac{AX}{AM} \end{aligned}$$

$$\text{ТМен: } \frac{BA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{MC}{CB} = 1 \quad | \quad \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YB} = 1$$

$$\frac{BA}{AY} \cdot \frac{4}{ZM} \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad | \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{CZ}{3} \cdot \frac{AY}{YB} = 1$$

$$\frac{BA}{AY} = \frac{ZM}{2} \quad | \quad \frac{3}{CZ} = \frac{AY}{YB}$$

$$ZC = 9, \text{ тогда } ZC = AC - AZ$$

$$\frac{AY}{YB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BY}{AB} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{XM}{MB} = \frac{B \cdot \left(\frac{AB+AC}{2} \right)}{(AB+AC) \cdot MB} = \frac{B \cdot (AC-AB)}{2(AB+AC) \cdot MB} = \frac{2}{2} \cdot \frac{AC-AB}{AC+AB}$$

$$\frac{AB}{AY} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{AC-AB}{AC+AB} = \frac{XM}{MB} = \frac{1}{2} \quad \left(\because \frac{BX}{XC} = \frac{2}{1} \right)$$

$$2AC - 2AB = AC + AB$$

$$4AC - 4AB = AC + AB$$

$$3 \cdot AB = AC$$

$$3AC = 9AB \Rightarrow AB = \frac{36}{9}$$

$$\frac{AB}{AY} = 2 \Rightarrow AY = 2$$

$$BX = \frac{1}{3} BC$$

$$\triangle ACX \sim \triangle ZCM$$

$$AX = \sqrt{48 - BX \cdot XC} = \frac{ZM \cdot 2}{1,5 \cdot \frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{4}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$2M \cdot \frac{4}{3} = AX$$

$$\frac{AX \cdot 3}{2} = 2M + 4$$

$$AX \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} AX + 4$$

$$\frac{3}{4} AX = 4 \Rightarrow AX = \frac{16}{3} = \sqrt{48 - BC \cdot KC}$$

$$\frac{256}{9} = 48 - BC \cdot \frac{1}{3} \cdot BC \cdot \frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 46 \\ \hline 432 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 432 \\ - 256 \\ \hline 176 \end{array}$$

$$BC^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{176}{9}$$

$$BC^2 = 88$$

$$BC = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$$

Ответ: $BC = 2\sqrt{22}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6.

В данном квадрате помечены ровно 100 закрашенных узлов.

Углов поворота квадрата было бы $\frac{100 \cdot 99}{2}$

возможных раскладок.

Повороты квадрата:

Углов: если повернуть квадрат на 90° по часовой стрелке, то получится другая раскладка (если сравнивать (теперь) только до поворота)

Д-во: неподвижных узлов сетки не будет (ведь в сторону \odot длины \odot будет 10 узлов)

\Rightarrow если получим такую же раскладку, то закрашенные белые узлы переместятся др. 89%

Это невозможно при повороте на 90° , ведь можно рассмотреть начертание ^{узел} этой белой узел сетки относительно центра квадрата.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

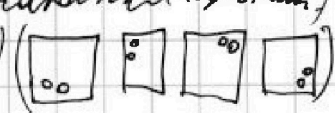
№6. (треуголь.)

Оба начертания угла изменятся в одну и ту же сторону на 90° \Rightarrow если первый перейдет во второй и наоборот, то повернув в эту же сторону ещё на 90° мы получим: первый \rightarrow второй \rightarrow первый, изменили угол на $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, но полный круг (360°) \Rightarrow переход в ту же сторону мы можем быть только после поворота на 180° (в другую сторону), таким образом 50 (выберем в верхней половине точку и изменим точку ей).

$$\frac{99 \cdot 100}{2} - 50$$

- кол-во парков (если три начертания поворачивать одинаково)

$$\text{и ещё } \frac{50}{2}$$

т.к. у таких будет по 4 начертания (290°) 

$$\text{Итого } \frac{99 \cdot 50 - 50}{4} + \frac{50}{2} = 49 \cdot 25 + 25 = 50 \cdot 25 = 1250$$

Ответ: 1250

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

-2

$$x^2 - 4x = 3$$

-1-3

~~(x-1)(x-3)~~

$$2\sqrt{2+3}$$

$$2+2^2$$

$$x^2 + 2x + 6 = 0$$

$$12 - 6\sqrt{3} + 19$$

$$30 - 6\sqrt{3}$$

$$5 - \sqrt{3}$$





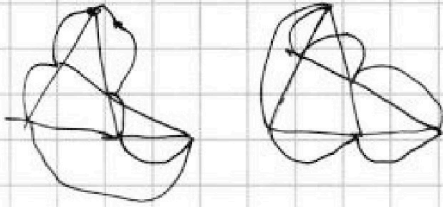
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{10}{9} + \frac{28}{32} = \frac{50}{50}$$



$$x^2 + 9x - 52 = 0$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 208}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{289}}{2}$$

$$m = h + 4$$

$$(h+4)h = 27$$

$$(m-h)(m-h)^2 + 9(m-h) = (m-h)(m-h+9)$$

$$\frac{13}{52}$$

$$m \cdot h \cdot (m-h+3)$$

$$13 \cdot 2 \cdot 3 = 78$$

$$(m-h)(m-h+9)$$

$$13 \cdot 2 = 26$$

$$\sqrt{13 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{78}$$

$$\frac{26}{13 \cdot 2} = 1$$

$$a + 5k = 6x + 7b$$

$$a + 7k =$$

$$a + 11k =$$

$$a = 6x + 7b$$

$$a + 2k = x^2 \cdot (x-4)^2$$

$$a + 6k = -3x^2$$

$$3a + 6k$$

$$-6x^2 + 2x^2(x-4)^2 =$$

$$x^2(x-4)^2 - 28x - 18 = -3x^2 - 6x - 18$$

$$x^2 \cdot (x^2 + 4x + 16 - 8x + 3) - 22x - 36 = 0$$

$$1 + 7(4 + 3 + 16 - 36) = 0$$

$$x^2 - 4x +$$

$$-(x-2)^2 + 16$$

$$3(x^2 \cdot (x-4)^2 - 6x + 18) =$$

$$= -9x^2 - 6x - 18$$

$$= -x^2 - 2x - 6 =$$

$$= x^2 \cdot (x-4)^2 - 6x + 18 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 8x) x^2 - 4x - 18 = 0$$

$$\frac{13}{52}$$

$$12 \cdot 4 + 19 \cdot 14 - 18 \cdot 7 =$$

$$x$$

$$1 + \frac{19}{4} + 1 - 2 = \frac{16}{16}$$

$$12 \cdot 4$$

$$19 \cdot 14$$

$$\frac{13}{52}$$