



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\{a_n\}$ — данная в условии прогрессия, d — шаг прогрессии
 Тогда $\begin{cases} a_6 - a_4 = 2d \\ a_{10} - a_6 = 4d \end{cases} \begin{cases} (x^2 - 2x)^2 - (6 - 9x) = 2d \\ 9x^2 - (x^2 - 2x)^2 = 4d \end{cases} \begin{cases} 5(x^2 - 2x)^2 - 2(6 - 9x) = 4d \\ 9x^2 - (x^2 - 2x)^2 = 4d \end{cases} \ominus$

$$2(x^2 - 2x)^2 - 2(6 - 9x) - 9x^2 + (x - 2x)^2 = 0$$

$$3(x^2 - 2x)^2 - 9x^2 + 2(9x - 6) = 0$$

$$3(x^2 - 2x)^2 - 9x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$(x^2 - 2x)^2 - 3(3x^2 - 6x + 4) = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - (3x^2 - 6x + 4) = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 2x + 4x - 4 = 0$$

$$(x - 1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x - 1)(x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 4x + 4) = 0$$

$$(x - 1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$x = 1$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \quad (x - 1)^2 = 5 \quad x - 1 = \pm\sqrt{5} \quad x = 1 \pm \sqrt{5}$$

Проверка:

1) $x = 1$ $a_4 = 6 - 9x = -3$ $a_6 = (x^2 - 2x)^2 = 1$ $a_{10} = 9x^2 = 9$ $a_7 = -9$ $d = 2$, подходит

2) $x = 1 - \sqrt{5}$ $a_4 = 6 - 9x = 6 - 9(1 - \sqrt{5}) = 9\sqrt{5} - 3$ $a_6 = (1 - \sqrt{5})^2 - 2(1 - \sqrt{5}) = (6 - 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5})^2 = 4^2 = 16$

$a_{10} = 9x^2 = 9(1 - \sqrt{5})^2 = 54 - 18\sqrt{5}$ $a_7 = \frac{25\sqrt{5}}{3} - 3$, $d = 9,5 - 4,5\sqrt{5}$ подходит

3) $x = 1 + \sqrt{5}$ $a_4 = 6 - 9x = 6 - 9(1 + \sqrt{5}) = -9\sqrt{5} - 3$ $a_6 = (1 + \sqrt{5})^2 - 2(1 + \sqrt{5}) = (6 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5})^2 = 4^2 = 16$

$a_{10} = 9x^2 = 9(1 + \sqrt{5})^2 = 54 + 18\sqrt{5}$ $a_7 = -22,5\sqrt{5} - 3$, $d = 9,5 + 4,5\sqrt{5}$ подходит

Ответ: $1, 1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}$

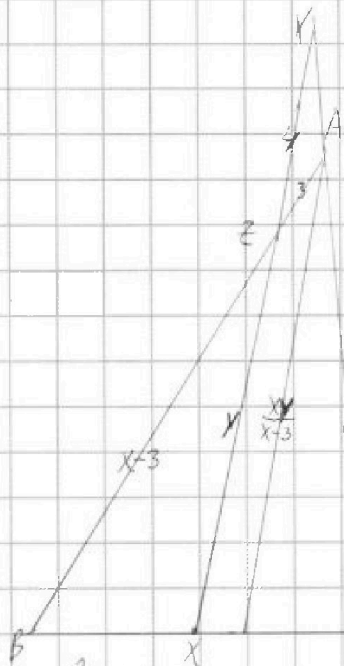


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

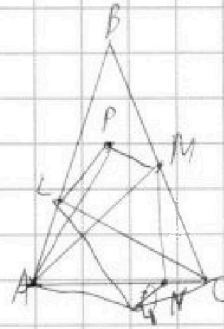
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



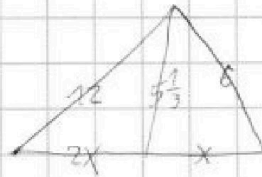
$$y \in (0; 7)$$

$$x \geq 0 \quad 1445x \geq y^2$$

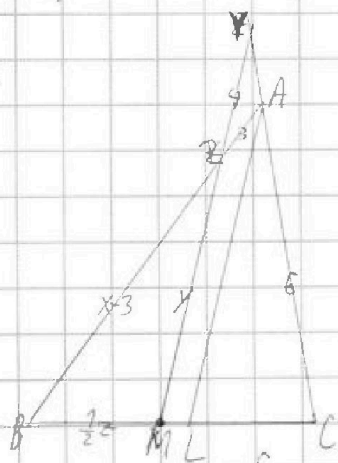
$$\frac{x}{x-3}$$



$$\begin{array}{r}
 89 \\
 \times 2 \\
 \hline
 178 \\
 81778 \\
 \hline
 64 \quad 145 \\
 \hline
 745 \quad 33
 \end{array}$$

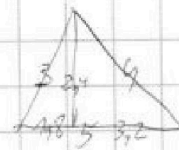


$$\begin{array}{r}
 39 \\
 \times 16 \\
 \hline
 786
 \end{array}$$



$$\frac{16}{3} \cdot 24$$

$$16 \cdot 8 = 128 = 168$$



$$144 = 16 \cdot 9$$

$$(x - \frac{5 - \sqrt{21}}{2})$$

$$\frac{(2 - \sqrt{21}) \cdot (\sqrt{21} - 2)}{4} = \frac{25 - 39}{4}$$

$$\begin{array}{r}
 37 \\
 \times 4 \\
 \hline
 148
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 576 &= 3 \cdot 32 + 4 \cdot 18 \cdot 32 \\
 &= 3^2 \cdot \frac{32}{18} + 4^2 \cdot \frac{36}{32} - 18 \cdot 32 = \\
 &= \frac{9 \cdot 32}{18} + \frac{16 \cdot 36}{32} - \\
 &= 3,2^2
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |2y-x| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y-x \leq 2 \\ 2x-y \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4y-5x \leq 20 \\ 8x-9y \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8y-4x \leq 8 \\ 10x-5y \leq 5 \end{cases} \oplus \quad 3y+6x \leq 13$$

$$x = \frac{1}{3} \quad y = \frac{2}{3} \quad |x-2y| = \left| \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \right| = 1 \leq 2$$
$$|2x-y| = \left| 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right| = 0 \leq 1$$
$$3y+6x = 3 \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 + 2 = 4 \leq 13$$

пример подходит

ответ: 13



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n-7)(m+2n)$$

$$B = m^2n + 2m^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

Пусть $A \times 2 \Rightarrow \begin{cases} m+2n-7 \times 2 \\ m+2n \times 2 \end{cases} \Rightarrow m+2n-7+m+2n = 2 \Rightarrow 2(m+2n)-7=2$, противоречие

Пусть $B \times 2 \Rightarrow \begin{cases} m \times 2 \\ m+2n+9 \times 2 \end{cases} \Rightarrow m+m+2n+9 = 2 \Rightarrow 2(m+n)+9=2$, противоречие

$$44p^2 = 2, 75 \begin{cases} 11p^2 = 2 \\ 75q^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow p=2; q=2 \text{ (н.к. } p, q \in \mathbb{P}) \quad \begin{cases} 11p^2 = 44 \\ 75q^2 = 300 \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая:

I случай: $A=44; B=300$

$$m+2n > 0 \Rightarrow m+2n-7 = \frac{44}{m+2n} > 0$$

Делители числа 44 — 1, 2, 4, 11, 22, 44

1) $\begin{cases} m+2n-7=1 \\ m+2n=44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 44-2n+2n-7 \\ -7=-43 \end{cases}$ не подходит

2) $\begin{cases} m+2n-7=2 \\ m+2n=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7=-20 \end{cases}$ не подходит

3) $\begin{cases} m+2n-7=4 \\ m+2n=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=11-2n \\ b=300 \end{cases}$

$$44(11-2n)(11-2n+9) = 300$$

$$(11-2n)n = 22 \cdot 15$$

$$2n^2 - 11n + 225 = 0$$

$$(n-3)(n-5) = 0 \quad \begin{cases} n = \frac{7}{2} \text{ не } n, n \in \mathbb{N} \\ n = 3 \quad m = 11 - 2n = 5 \end{cases}$$

$$A = (5+2 \cdot 3-7)(5+2 \cdot 3) = 44$$

$$B = 5 \cdot 3 \cdot (5+2 \cdot 3+9) = 300 \quad n=3; m=5 \text{ — решение}$$

II случай: $A=300; B=44$

$$mn - (m+2n-7) = mn - m - 2n + 7 = m(n-1) - 2n + 7 = (n-2)(n-1) + 5 \quad n-2 \neq 1$$

$$m+2n-7 = \frac{300}{m+2n} > 0$$

1) $m \geq 2 \quad mn - (m+2n-7) > 0 \Rightarrow mn > m+2n-7 \Rightarrow B > A \Rightarrow 44 > 300$, противоречие

$$m+2n+9 > m+2n$$

2) $m=1 \quad B = n(2n+10) = 44 \quad n=2 \Rightarrow B = 2(2 \cdot 2+10) = 28 < 44 \quad n \geq 3 \Rightarrow B \geq 3(2 \cdot 3+10) = 48 > 44$

$B \neq 44$, противоречие

Ответ: $n=3; m=5$

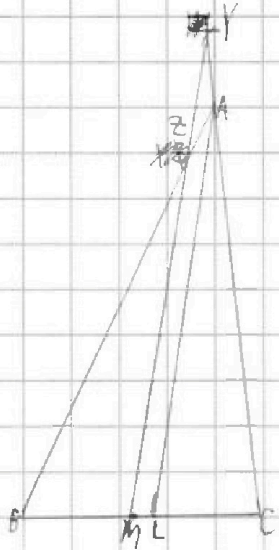
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AL = z$ — медиана $\triangle ABC$
 Пусть $AB = x$; $AC = y$; $BC = z$
 $BM = CM = \frac{1}{2}z$, $MZ = y$
 $BL = \frac{AB}{AB+AC}z = \frac{x}{x+y}z$ $CL = z - BL = \frac{y}{x+y}z$
 $ML = BL - BM = \frac{x}{x+y}z - \frac{1}{2}z = \frac{2x - x - y}{2(x+y)}z = \frac{x-y}{2(x+y)}z$
 $MZ \parallel AL \Rightarrow \frac{MZ}{AZ} = \frac{BM}{ML}$ $\frac{x-3}{3} = \frac{\frac{1}{2}z}{\frac{x-y}{2(x+y)}z}$
 $\frac{x-3}{3} = \frac{x+y}{x-y}$
 $3(x+y) = (x-3)(x+y)$
 $3x+9 = x^2+3x+9-9x+9$
 $x^2-6x-36=0$ $x^2-72x=0$
 $x(x-72)=0$ $x>0 \Rightarrow x=72$

$AL \parallel MY \Rightarrow \frac{CL}{CM} = \frac{AL}{MY}$ $\frac{\frac{y}{x+y}z}{\frac{1}{2}z} = \frac{AL}{y}$ $\frac{72}{x+y} = \frac{AL}{y}$ $\frac{2}{3} = \frac{AL}{y+4}$ $AL = \frac{2(y+4)}{3}$
 $MZ \parallel AL \Rightarrow \frac{BM}{BZ} = \frac{AL}{MZ}$ $\frac{72}{9} = \frac{\frac{2(y+4)}{3}}{y}$ $\frac{y+4}{y} = \frac{72}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{72 \cdot 2}{9 \cdot 3} = 2$ $y+4=2y$ $y=4$
 $AL = \frac{2}{3}(y+4) = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$

Пусть $AL = z$ — медиана $\triangle ABC$
 $\cos \triangle BAL$ $BL^2 = AB^2 + AL^2 - 2AB \cdot AL \cos \alpha = 144 + \frac{256}{9} - 2 \cdot 12 \cdot \frac{5\frac{1}{3}}{3} \cos \alpha = \frac{16 \cdot 89}{9} - 16 \cdot 8 \cos \alpha$
 $\cos \triangle CAL$ $CL^2 = AC^2 + AL^2 - 2AC \cdot AL \cos \alpha = 36 + \frac{256}{9} - 2 \cdot 6 \cdot \frac{5\frac{1}{3}}{3} \cos \alpha = \frac{4 \cdot 79}{9} - 8 \cdot 8 \cos \alpha$
 $BL = \frac{x}{x+y}z$ $CL = \frac{y}{x+y}z$ $CL = \frac{1}{2}z$
 $BL^2 - 2CL^2 = \frac{2}{9}z^2$
 $\frac{16 \cdot 89}{9} - 16 \cdot 8 \cos \alpha = \frac{8 \cdot 79}{9} + 16 \cdot 8 \cos \alpha = \frac{2}{9}z^2$
 $8(2 \cdot 89 - 79) = 2z^2$
 $z^2 = 4 \cdot 33$ $z = 2\sqrt{33}$

Ответ: $2\sqrt{33}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{4+5x-x^2}$$

$$x^3 + 3x - \sqrt{2}\sqrt{x} = y^3 + 3y \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \quad x=y$$

$$x^3 + 3x - \sqrt{2}\sqrt{x} = y^3 + 3y - \sqrt{2}\sqrt{y} - 3y = 0 \quad a = \sqrt{x} \quad b = \sqrt{y} \quad a, b \geq 0$$

$$(a^5 - b^5) + 3(a^2 - b^2) + \sqrt{2}(a - b) = 0$$

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 3(a+b) + \sqrt{2}) = 0$$

$$a, b \geq 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a = b \quad \sqrt{x} = \sqrt{y} \quad x = y$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{4+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$a = \sqrt{x+2} \quad b = \sqrt{7-x} \quad a, b \geq 0$$

$$a = \sqrt{x+2} \quad a = \sqrt{7-x}$$

$$u = \sqrt{x+2} \quad v = \sqrt{7-x} \quad u, v \geq 0$$

$$a - b + 7 = 2ab$$

$$a + 7 = b(2a + 1)$$

$$u - v + 7 = 2uv$$

$$u + 7 = v(2u + 1) \quad 2u + 1 > 0 \quad v = \frac{u+7}{2u+1}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{(7-x)(x+2)} - 7$$

$$x+2+7-x-2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 4(7-x)(x+2) - 28\sqrt{(x+2)(7-x)} + 49$$

$$26\sqrt{(x+2)(7-x)} = 4(7-x)(x+2) + 49 \quad t = \sqrt{(x+2)(7-x)}$$

$$4t^2 - 26t + 49 = 0$$

$$20^2 - 73t + 20 = 0$$

$$(t-4)(2t-5) = 0$$

$$t = 4 \quad (x+2)(7-x) = t^2 = 16 \quad 14+5x-x^2 = 16 \quad x^2-5x+2 = 0 \quad D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 = 17 \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$t = \frac{5}{2} \quad (x+2)(7-x) = t^2 = \frac{25}{4} \quad 14+5x-x^2 = \frac{25}{4} \quad x^2-5x+\frac{31}{4} = 0 \quad 4x^2-20x-31 = 0$$

$$x = v \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5-\sqrt{17}}{2} < 0 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

$$x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5+\sqrt{17}}{2} < 7$$

Ответ: нет решений



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2x-5)^2 = 56$$

$$2x = 5 \pm 2\sqrt{14}$$

$$x = \frac{5 \pm 2\sqrt{14}}{2}$$

$$C=4 \quad (x+2)(7-x) = C^2 = 16 \quad 14+5x-x^2 = 16 \quad x^2-5x+2=0 \quad D=(-5)^2-4 \cdot 2 = 17 \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$C=2,5 \quad (x+2)(7-x) = C^2 = \frac{25}{4} \quad 14+5x-x^2 = \frac{25}{4} \quad (x-2,5)^2 = 14 \quad x = 2,5 \pm \sqrt{14} = \frac{5 \pm 2\sqrt{14}}{2}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \quad \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{17}}{2}} - \sqrt{\frac{9 - \sqrt{17}}{2}} + 7 = \frac{\sqrt{17} - \sqrt{17 - 2\sqrt{17}}}{2} + 7 = \frac{\sqrt{17} + 1 - \sqrt{17} - 1}{2} + 7 = 8$$

$$2\sqrt{(x+2)(7-x)} = \sqrt{16} = 4 \quad \frac{2\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17} \neq 4 \quad \text{не подходит}$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{аналогично, } x+2 \text{ и } 7-x \text{ не являются квадратами}$$

$$x = \frac{5 + 2\sqrt{14}}{2} \quad \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = \sqrt{\frac{9 + 2\sqrt{14}}{2}} - \sqrt{\frac{9 - 2\sqrt{14}}{2}} + 7 = \frac{\sqrt{18 + 4\sqrt{14}} - \sqrt{18 - 4\sqrt{14}}}{2} + 7 = \frac{(\sqrt{14} + 2) - (\sqrt{14} - 2)}{2} + 7 = 9$$

$$2\sqrt{(x+2)(7-x)} = \sqrt{25} = 5 \quad \frac{2\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14} \neq 5 \quad \text{не подходит}$$

$$x = \frac{5 - 2\sqrt{14}}{2} \quad \text{аналогично, } x+2 \text{ и } 7-x \text{ не являются квадратами}$$

Для $x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ и $x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$ второе правило, очевидно, верно ($x \geq 0$)

Ответ: $(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}), (\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{5 - \sqrt{17}}{2})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть при некотором повороте обе белые точки переходят в себя. Тогда они обе находятся в центре поворота, противоречие.

Пусть при повороте на 90° точка 1 переходит в точку 2, а точка 2 в точку 1. Ни одна из этих точек не центр, т.к. центр переходит в себя. Тогда A_1 и $A_2 \Rightarrow \angle OA_1, OA_2 = 90^\circ$, $\angle OA_2, OA_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle OA_2, OA_1 = 180^\circ$, противоречие. Таких точек нет.

Пусть при повороте на 180° точки меняются местами. Значит, они симметричны относительно центра.

Всего узлов $(10+1)^2 = 121$, значит, таких пар $\frac{121-1}{2} = 60$ (белые) (центр)
Каждую такую пару можно выбрать 2 способами

Всего пар $\frac{121-120}{2} = 121-60 = 7260$, каждую $\pm 7260-60 = 7200$ белых пар, каждую такую пару можно выбрать 4 способами

$$\frac{7200}{4} + \frac{60}{2} = 1800 + 30 = 1830 - \text{всего различных пар}$$

Ответ: 1830

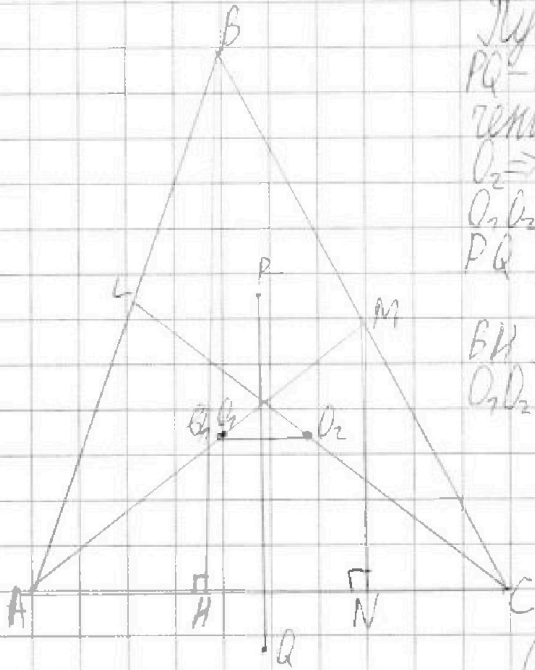
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O_1 — середина AM , O_2 — середина AN
 PQ — прямая, соединяющая точки пересечения окружностей с центрами O_1 и O_2
 $O_1O_2 \perp PQ$

$O_1O_2 \perp PQ \Rightarrow O_1O_2 \perp BH$
 $PQ \parallel BH$

$BH \perp AC \Rightarrow O_1O_2 \parallel AC$
 $O_1O_2 \perp BH$

$N \in \Omega \Rightarrow \angle ANM = 90^\circ$

$O_1O_2 \parallel AC \Rightarrow d(L, AC) = 2d(O_2, AC)$
 $LC = 2O_2C$

$O_2 \parallel AC \Rightarrow d(L, AC) = 2d(O_2, AC)$
 $LC = 2O_2C$

$O_2 \parallel AC$ аналогично $d(M, AC) = 2d(O_2, AC)$
 $d(O_2, AC) = d(O_2, AC) \Rightarrow d(L, AC) = d(M, AC) \Rightarrow LM \parallel AC \Rightarrow L$ — середина $AB \Rightarrow AC = BC$

$AL = BL = 2$ $MN = BH = 2MN =$

$AM = \sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2} = \sqrt{32 + BC^2}$ $AC = x$ $AM = \sqrt{\frac{32 + x^2}{2}}$

$BC = x \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{x^2 - 4} = 2\sqrt{x^2 - 4}$

$AC = x$ $\frac{AC \cdot BH}{2} = \frac{x \cdot BH}{2} = S_{ABC} = 2\sqrt{x^2 - 4}$ $BH = \frac{4\sqrt{x^2 - 4}}{x}$ $MN = \frac{BH}{2} = \frac{2\sqrt{x^2 - 4}}{x}$

$AM^2 = AN^2 + MN^2$ $\frac{32 + x^2}{2} = 5^2 + \frac{4(x^2 - 4)}{x^2}$

$(32 + x^2)x^2 = 100x^2 - 16(x^2 - 4)$

$x^4 - 32x^2 + 100x^2 - 4x^2 = 16 \neq 0$

$x^4 + 72x^2 - 16 = 0$

$x^4 + 32x^2 + 100x^2 + 16x^2 - 64 = 0$

$x^4 + 84x^2 - 64 = 0$ $d = x^2$

$d^2 + 84d - 64 = 0$ $D = 84^2 + 64 \cdot 4 = 2^8 \cdot 16(21^2 + 16) = 16 \cdot 437457$

$d = \frac{-84 \pm \sqrt{437457}}{2} = -42 \pm 2\sqrt{457}$ $d > 0$ $d = 2\sqrt{457} - 42$

$x = \sqrt{2\sqrt{457} - 42}$

ответ: $\sqrt{2\sqrt{457} - 42}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

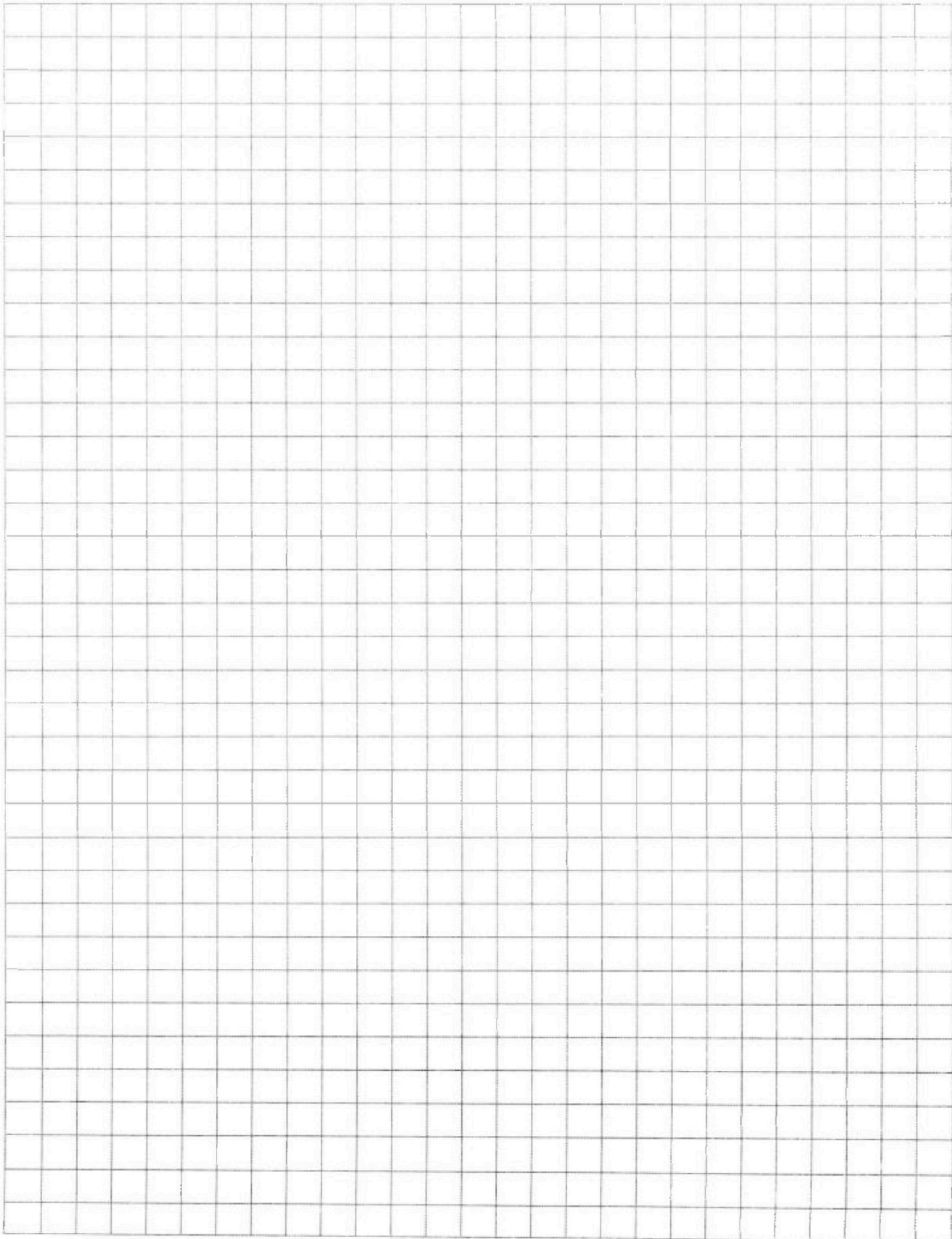
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



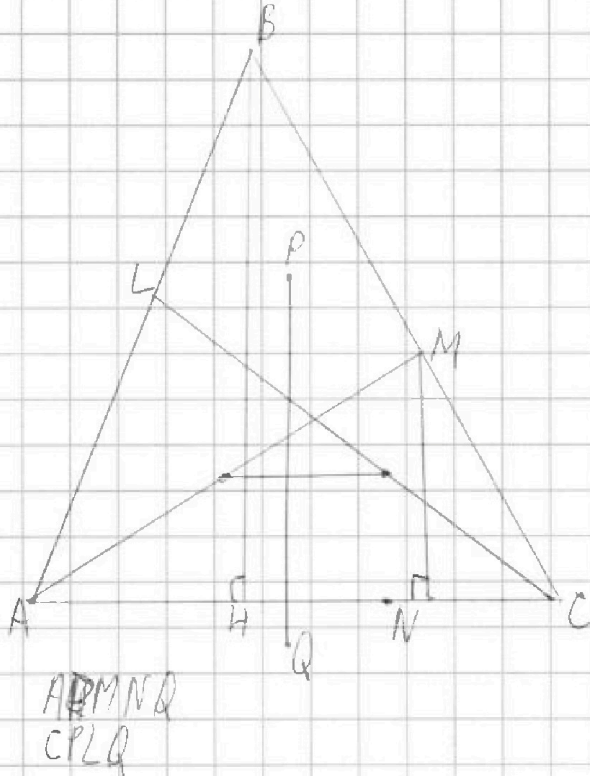


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$9\sqrt{5}-3-3(9,5-4,5\sqrt{5})=9\sqrt{5}-3-28,5+13,5\sqrt{5}=18,5\sqrt{5}-31,5$$

$$\begin{cases} -2 \leq x-2y \leq 2 \\ -1 \leq 2x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y-x=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

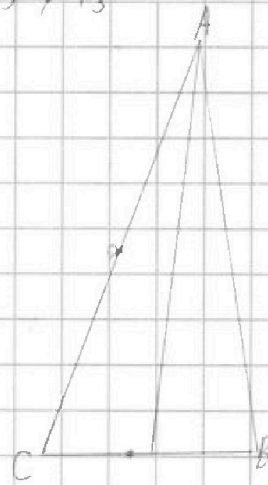
$$\begin{aligned} a(x-2y)+b(2x-y) &= 3y+6x \\ 7-2y(-2a-0)y+10a+20x &= 3y+6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2y-x=2 \\ 4y-2x+4x-2y=2 \end{cases} \\ 3x=4 \quad x=1\frac{1}{3} \quad y=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+2b=6 \\ 2-2a-b=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+4b=12 \\ 2-2a-b=3 \end{cases}$$

$$3b=15 \quad b=5 \quad a=-3$$



$$m^2+4mn+4n^2-7m-14n=(m+2n-7)(m+2n)$$

$$m^2n+2mn^2+9mn=mn(m+2n+9)$$

$$\begin{aligned} & \cancel{m(m+2n+9)} \\ & m \neq 9 \quad m \neq 0 \quad n(2n+9) \quad 9 \cdot 28 \quad 10 \cdot 30 \\ & m \neq 8 \quad n \neq 10 \\ & \cancel{m(m+9)} \quad m \neq \\ & 92(92+9) \quad m \neq 12 \\ & 73(73+9) \end{aligned}$$

$$(m+2n-7)$$

