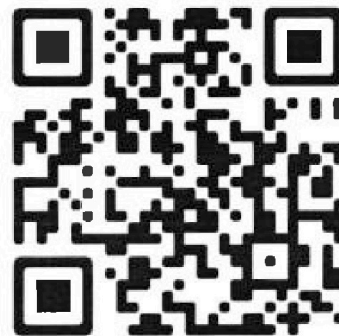




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен  $6 - 9x$ , шестой член равен  $(x^2 - 2x)^2$ , а десятый равен  $9x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $3y + 6x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$  и  $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$  равно  $11p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 6$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $10 \times 10$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 4$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $\{a_n\}$  — данная в условии прогрессия,  $d$  — шаг прогрессии  
 Тогда  $\begin{cases} a_6 - a_4 = 2d \\ a_{10} - a_6 = 4d \end{cases} \begin{cases} (x^2 - 2x)^2 - (6 - 9x) = 2d \\ 9x^2 - (x^2 - 2x)^2 = 4d \end{cases} \begin{cases} 5(x^2 - 2x)^2 - 2(6 - 9x) = 4d \\ 9x^2 - (x^2 - 2x)^2 = 4d \end{cases} \ominus$

$$2(x^2 - 2x)^2 - 2(6 - 9x) - 9x^2 + (x - 2x)^2 = 0$$

$$3(x^2 - 2x)^2 - 9x^2 + 2(9x - 6) = 0$$

$$3(x^2 - 2x)^2 - 9x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$(x^2 - 2x)^2 - 3(3x^2 - 6x + 4) = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - (3x^2 - 6x + 4) = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 2x + 4x - 4 = 0$$

$$(x - 1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x - 1)(x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 4x + 4) = 0$$

$$(x - 1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$x = 1$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \quad (x - 1)^2 = 5 \quad x - 1 = \pm\sqrt{5} \quad x = 1 \pm \sqrt{5}$$

Проверка:

1)  $x = 1$   $a_4 = 6 - 9x = -3$   $a_6 = (x^2 - 2x)^2 = 1$   $a_{10} = 9x^2 = 9$   $a_7 = -9$   $d = 2$ , подходит

2)  $x = 1 - \sqrt{5}$   $a_4 = 6 - 9x = 6 - 9(1 - \sqrt{5}) = 9\sqrt{5} - 3$   $a_6 = (1 - \sqrt{5})^2 - 2(1 - \sqrt{5}) = (6 - 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5}) = 4 = 16$

$a_{10} = 9x^2 = 9(1 - \sqrt{5})^2 = 54 - 18\sqrt{5}$   $a_7 = \frac{25\sqrt{5}}{3} - 3$ ,  $d = 9,5 - 4,5\sqrt{5}$  подходит

3)  $x = 1 + \sqrt{5}$   $a_4 = 6 - 9x = 6 - 9(1 + \sqrt{5}) = -9\sqrt{5} - 3$   $a_6 = (1 + \sqrt{5})^2 - 2(1 + \sqrt{5}) = (6 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5}) = 4 = 16$

$a_{10} = 9x^2 = 9(1 + \sqrt{5})^2 = 54 + 18\sqrt{5}$   $a_7 = -22,5\sqrt{5} - 3$ ,  $d = 9,5 + 4,5\sqrt{5}$  подходит

Ответ:  $1, 1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}$

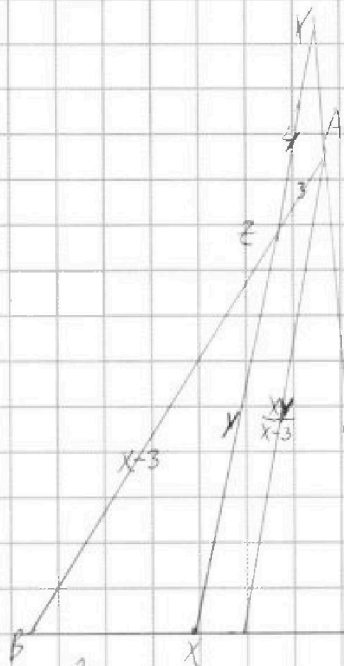


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

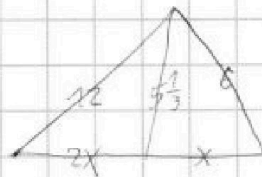
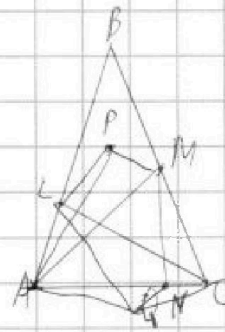
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$y \in (0; 7)$$

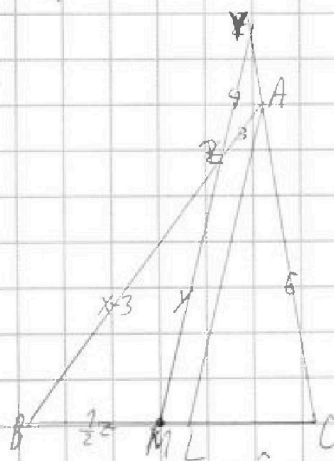
$$x \geq 0 \quad 1445x \geq y^2$$

$$\frac{x}{x-3}$$



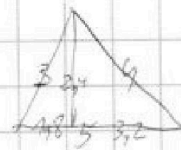
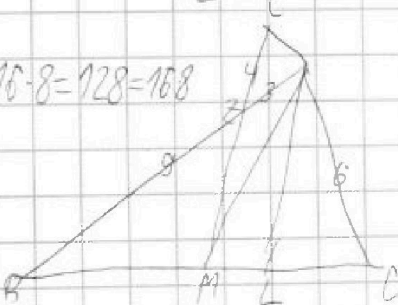
$$\begin{array}{r} 89 \\ \times 2 \\ \hline 178 \\ 81778 \\ \hline 64 \quad 145 \\ \hline 745 \\ \hline 33 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 16 \\ \hline 786 \end{array}$$



$$\frac{16}{3} \cdot 24$$

$$16 \cdot 8 = 128 = 168$$



$$\begin{aligned} 576 &= 3 \cdot 3.2 + 4 \cdot 1.8 \cdot 3.2 \\ &= 3^2 \cdot \frac{3.2}{1.8} + 4^2 \cdot \frac{3.2}{3.2} - 18 \cdot 3.2 = \\ &= \frac{9 \cdot 3.2}{1.8} + \frac{16 \cdot 3.2}{3.2} - \\ &= 3.2^2 \end{aligned}$$

$$144 = 16 \cdot 9$$

$$(x - \frac{5 - \sqrt{21}}{2})$$

$$\frac{(2 - \sqrt{21}) \cdot (57 \cdot 27)}{2} = \frac{25 - 39}{4}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 4 \\ \hline 148 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |2y-x| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y-x \leq 2 \\ 2x-y \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4y-5x \leq 20 \\ 8x-9y \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8y-4x \leq 8 \\ 10x-5y \leq 5 \end{cases} \oplus \quad 3y+6x \leq 13$$

$$x = \frac{1}{3} \quad y = \frac{2}{3} \quad |x-2y| = \left| \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \right| = 1 \leq 2$$
$$|2x-y| = \left| 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right| = 0 \leq 1$$
$$3y+6x = 3 \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 + 2 = 4 \leq 13$$

пример подходит

ответ: 13



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n-7)(m+2n)$$

$$B = m^2n + 2m^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

Пусть  $A \times 2 \Rightarrow \begin{cases} m+2n-7 \times 2 \\ m+2n \times 2 \end{cases} \Rightarrow m+2n-7+m+2n = 2 \Rightarrow 2(m+2n)-7=2$ , противоречие

Пусть  $B \times 2 \Rightarrow \begin{cases} m \times 2 \\ m+2n+9 \times 2 \end{cases} \Rightarrow m+m+2n+9 = 2 \Rightarrow 2(m+n)+9=2$ , противоречие

$$44p^2 = 2, 75 \begin{cases} 11p^2 = 2 \\ 75q^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow p=2; q=2 \text{ (н.к. } p, q \in \mathbb{P}) \quad \begin{cases} 11p^2 = 44 \\ 75q^2 = 300 \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая:

I случай:  $A=44; B=300$

$$m+2n > 0 \Rightarrow m+2n-7 = \frac{44}{m+2n} > 0$$

Делители числа 44 — 1, 2, 4, 11, 22, 44

1)  $\begin{cases} m+2n-7=1 \\ m+2n=44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 44-2n+2n-7 \\ -7=-43 \end{cases}$  не подходит

2)  $\begin{cases} m+2n-7=2 \\ m+2n=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7=-20 \end{cases}$  не подходит

3)  $\begin{cases} m+2n-7=4 \\ m+2n=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=11-2n \\ b=300 \end{cases}$

$$44(11-2n)(11-2n+9) = 300$$

$$(11-2n)n = 22 \cdot 15$$

$$2n^2 - 11n + 22 = 0$$

$$(n-3)(n-5) = 0 \quad \begin{cases} n = \frac{11}{2} \text{ не } n, n \in \mathbb{N} \\ n = 3 \quad m = 11 - 2n = 5 \end{cases}$$

$$A = (5+2 \cdot 3-7)(5+2 \cdot 3) = 44$$

$$B = 5 \cdot 3 \cdot (5+2 \cdot 3+9) = 300 \quad n=3; m=5 \text{ — решение}$$

II случай:  $A=300; B=44$

$$mn - (m+2n-7) = mn - m - 2n + 7 = m(n-1) - 2n + 7 = (n-2)(n-1) + 5 \quad n-2 \neq 1$$

$$m+2n-7 = \frac{300}{m+2n} > 0$$

1)  $m \geq 2 \quad mn - (m+2n-7) > 0 \Rightarrow mn > m+2n-7 \Rightarrow B > A \Rightarrow 44 > 300$ , противоречие  
 $m+2n+9 > m+2n$

2)  $m=1 \quad B = n(2n+10) = 44 \quad n=2 \Rightarrow B = 2(2+10) = 28 < 44 \quad n \geq 3 \Rightarrow B \geq 3(2+10) = 48 > 44$

$B \neq 44$ , противоречие

Ответ:  $n=3; m=5$

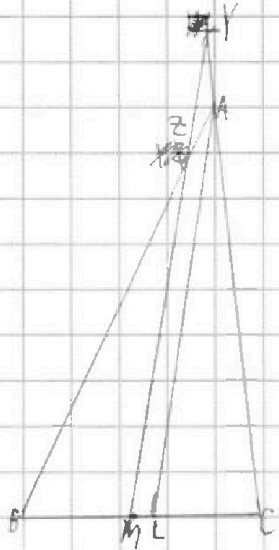
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $AL = z$  — медиана  $\triangle ABC$   
 Пусть  $AB = x$ ;  $BC = z$   
 $BM = CM = \frac{1}{2}z$ ,  $MZ = y$   
 $BL = \frac{AB}{AB+AC}z = \frac{x}{x+z}z$   $CL = z - BL = \frac{z}{x+z}z$   
 $ML = BL - BM = \frac{x}{x+z}z - \frac{1}{2}z = \frac{2x - x - z}{2(x+z)}z = \frac{x-z}{2(x+z)}z$   
 $MZ \parallel AL \Rightarrow \frac{MZ}{AZ} = \frac{BM}{ML}$   $\frac{x-3}{3} = \frac{\frac{1}{2}z}{\frac{x-z}{2(x+z)}z}$   
 $\frac{x-3}{3} = \frac{1}{\frac{x-z}{x+z}}$   
 $3(x+z) = (x-3)(x+z)$   
 $3x+9 = x^2+3x+9-9x+9$   
 $x^2-6x-36=0$   $x^2-72x=0$   
 $x(x-72)=0$   $x>0 \Rightarrow x=72$

$AL \parallel MY \Rightarrow \frac{CL}{CM} = \frac{AL}{MY}$   $\frac{\frac{z}{x+z}z}{\frac{1}{2}z} = \frac{AL}{y}$   $\frac{72}{x+z} = \frac{AL}{y+4}$   $\frac{z}{3} = \frac{AL}{y+4}$   $AL = \frac{z(y+4)}{3}$   
 $MZ \parallel AL \Rightarrow \frac{BM}{BZ} = \frac{AL}{MZ}$   $\frac{72}{9} = \frac{\frac{z}{3}(y+4)}{y}$   $\frac{y+4}{y} = \frac{72}{9} \cdot \frac{z}{3} = \frac{72 \cdot z}{9 \cdot 3} = 2$   $y+4=2y$   $y=4$   
 $AL = \frac{z}{3}(y+4) = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$

Пусть  $AL = z$  — медиана  $\triangle ABC$   
 $\cos \triangle BAL$   $BL^2 = AB^2 + AL^2 - 2AB \cdot AL \cos \alpha = 144 + \frac{25z^2}{9} - 2 \cdot 12 \cdot \frac{5z}{3} \cos \alpha = \frac{16 \cdot 89}{9} - 16 \cdot 8 \cos \alpha$   
 $\cos \triangle CAL$   $CL^2 = AC^2 + AL^2 - 2AC \cdot AL \cos \alpha = 36 + \frac{25z^2}{9} - 2 \cdot 6 \cdot \frac{5z}{3} \cos \alpha = \frac{4 \cdot 79}{9} - 8 \cdot 8 \cos \alpha$   
 $BL = \frac{x}{x+z}z$   $BC = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}z$   $CL = \frac{1}{3}z$   
 $BL^2 - 2CL^2 = \frac{2}{9}z^2$   
 $\frac{16 \cdot 89}{9} - 16 \cdot 8 \cos \alpha = \frac{8 \cdot 79}{9} + 16 \cdot 8 \cos \alpha = \frac{2}{9}z^2$   
 $8(2 \cdot 89 - 79) = 2z^2$   
 $z^2 = 4 \cdot 33$   $z = 2\sqrt{33}$

Ответ:  $2\sqrt{33}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{4+5x-x^2}$$

$$x^3 + 3x - \sqrt{2}\sqrt{x} = y^3 + 3y = 2x + 3y$$

$$x^3 + 3x - \sqrt{2}\sqrt{x} = y^3 + 3y - 2x - 3y = 0 \quad a = \sqrt{x} \quad b = \sqrt{y} \quad a, b \geq 0$$

$$(a^6 - b^6) + 3(a^2 - b^2) + \sqrt{2}(a - b) = 0$$

$$(a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 + 3(a+b) + \sqrt{2}) = 0$$

$$a, b \geq 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a = b \quad \sqrt{x} = \sqrt{y} \quad x = y$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{4+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$$

$$a = \sqrt{x+2} \quad b = \sqrt{7-x} \quad a, b \geq 0$$

$$a = \sqrt{x+2} \quad a = \sqrt{7-x}$$

$$u = \sqrt{x+2} \quad v = \sqrt{7-x} \quad u, v \geq 0$$

$$a - b + 7 = 2ab$$

$$a + 7 = b(2a + 1)$$

$$u - v + 7 = 2uv$$

$$u + 7 = v(2u + 1) \quad 2u + 1 > 0 \quad v = \frac{u+7}{2u+1}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{(7-x)(x+2)} - 7$$

$$x+2+7-x-2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 4(7-x)(x+2) - 28\sqrt{(x+2)(7-x)} + 49$$

$$26\sqrt{(x+2)(7-x)} = 4(7-x)(x+2) + 49 \quad t = \sqrt{(x+2)(7-x)}$$

$$4t^2 - 26t + 49 = 0$$

$$2t^2 - 13t + 24.5 = 0$$

$$(t-4)(2t-5.5) = 0$$

$$t = 4 \quad (x+2)(7-x) = t^2 = 16 \quad 14+5x-x^2 = 16 \quad x^2-5x+2=0 \quad D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 = 9 \quad x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t = 5.5 \quad (x+2)(7-x) = t^2 = \frac{25}{4} \quad 14+5x-x^2 = \frac{25}{4} \quad x^2-5x+\frac{31}{4}=0 \quad 4x^2-20x-31=0$$

$$x = v \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5-3}{2} = 1 < 7 \quad \frac{5+3}{2} = 4 < 7$$

$$x = v \Rightarrow 0 \leq x < 7 \quad \frac{5 \pm \sqrt{25-31}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-6}}{2} \quad \frac{5 \pm 2.5\sqrt{-1}}{2} \quad x = \frac{5 \pm 2.5\sqrt{-1}}{2}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{25-31}}{2} > 0 \quad \sqrt{x+2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{-6}}{2}+2} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{-6}}{2}} = \frac{\sqrt{18+\sqrt{-6}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18+1}\sqrt{1+\sqrt{-6}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{19}\sqrt{1+\sqrt{-6}}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{7-x} = \sqrt{7-\frac{5+\sqrt{-6}}{2}} = \sqrt{\frac{9-\sqrt{-6}}{2}} = \frac{\sqrt{18-\sqrt{-6}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18-1}\sqrt{1-\sqrt{-6}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{17}\sqrt{1-\sqrt{-6}}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 8 \quad \text{не подходит}$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{25-31}}{2} \quad \text{не подходит аналогично}$$

Ответ: нет решений



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2x-5)^2 = 56$$

$$2x = 5 \pm 2\sqrt{14}$$

$$x = \frac{5 \pm 2\sqrt{14}}{2}$$

$$C=4 \quad (x+2)(7-x) = C^2 = 16 \quad 14+5x-x^2 = 16 \quad x^2-5x+2=0 \quad D=(-5)^2-4 \cdot 2 = 17 \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$C=2,5 \quad (x+2)(7-x) = C^2 = \frac{25}{4} \quad 14+5x-x^2 = \frac{25}{4} \quad (x-2,5)^2 = 14 \quad x = 2,5 \pm \sqrt{14} = \frac{5 \pm 2\sqrt{14}}{2}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \quad \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{17}}{2}} - \sqrt{\frac{9 - \sqrt{17}}{2}} + 7 = \frac{\sqrt{18+2\sqrt{17}} - \sqrt{18-2\sqrt{17}}}{2} + 7 = \frac{(\sqrt{17}+1) - (\sqrt{17}-1)}{2} + 7 = 8$$

$$2\sqrt{(x+2)(7-x)} = \sqrt{16} = 4 \quad \sqrt{\frac{9 + \sqrt{17}}{2}} - \sqrt{\frac{9 - \sqrt{17}}{2}} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{не подходит}$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{аналогично, } x+2 \text{ и } 7-x \text{ не являются квадратами}$$

$$x = \frac{5 + 2\sqrt{14}}{2} \quad \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = \sqrt{\frac{9 + 2\sqrt{14}}{2}} - \sqrt{\frac{9 - 2\sqrt{14}}{2}} + 7 = \frac{\sqrt{18+4\sqrt{14}} - \sqrt{18-4\sqrt{14}}}{2} + 7 = \frac{(\sqrt{14}+2) - (\sqrt{14}-2)}{2} + 7 = 9$$

$$2\sqrt{(x+2)(7-x)} = \sqrt{25} = 5 \quad \sqrt{\frac{9 + 2\sqrt{14}}{2}} - \sqrt{\frac{9 - 2\sqrt{14}}{2}} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{не подходит}$$

$$x = \frac{5 - 2\sqrt{14}}{2} \quad \text{аналогично, } x+2 \text{ и } 7-x \text{ не являются квадратами}$$

Для  $x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$  и  $x = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$  второе правило, очевидно, верно ( $x \geq 0$ )

Ответ:  $(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}), (\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{5 - \sqrt{17}}{2})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть при некотором повороте обе белые точки переходят в себя. Тогда они обе находятся в центре поворота, противоречие.

Пусть при повороте на  $90^\circ$  точка 1 переходит в точку 2, а точка 2 в точку 1. Ни одна из этих точек не центр, т.к. центр переходит в себя. Точки  $A_1$  и  $A_2 \Rightarrow \angle(OA_1, OA_2) = 90^\circ$ ,  $\angle(OA_2, OA_1) = 90^\circ \Rightarrow \angle(OA_2, OA_1) = 180^\circ$ , противоречие. Таких точек нет.

Пусть при повороте на  $180^\circ$  точки меняются местами. Значит, они симметричны относительно центра.

Всего узлов  $(10+1)^2 = 121$ , значит, таких пар  $\frac{121-1}{2} = 60$  (белые) (центр)  
Каждую такую пару можно выбрать 2 способами

Всего пар  $\frac{121-120}{2} = 121-60 = 7260$ , каждую  $\pm 7260-60 = 7200$  белых пар, каждую такую пару можно выбрать 4 способами

$\frac{7200}{4} + \frac{60}{2} = 1800 + 30 = 1830$  - всего различных пар

Ответ: 1830

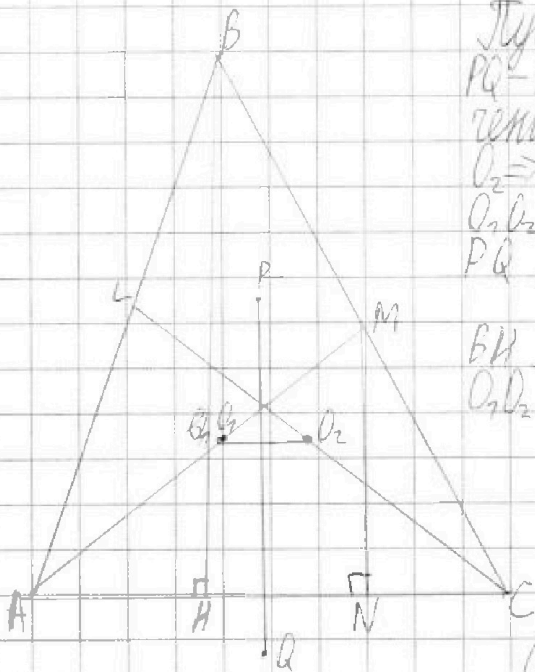
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $O_1$  — середина  $AH$ ,  $O_2$  — середина  $CL$   
 $PQ$  — прямая, соединяющая точки пересечения окружностей с центрами  $O_1$  и  $O_2$   
 $O_1O_2 \perp PQ$

$O_1O_2 \perp PQ \Rightarrow O_1O_2 \perp BH$   
 $PQ \parallel BH$

$BH \perp AC \Rightarrow O_1O_2 \parallel AC$   
 $O_1O_2 \perp BH$

$N \in \Omega \Rightarrow \angle ANM = 90^\circ$

$O_1O_2 \parallel AC \Rightarrow d(L, AC) = 2d(O_2, AC)$   
 $LC = 2O_2C$

$O_1O_2 \parallel AC \Rightarrow d(L, AC) = 2d(O_2, AC)$   
 $LC = 2O_2C$

$O_2 \parallel AC$  аналогично  $d(M, AC) = 2d(O_2, AC)$   
 $d(O_2, AC) = d(O_2, AH) \Rightarrow d(L, AC) = d(M, AC) \Rightarrow LM \parallel AC \Rightarrow L$  — середина  $AB \Rightarrow AC = BC$

$AL = BL = 2$   $MN \parallel BH = 2MN =$

$AM = \sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2} = \sqrt{32 + BC^2}$   $AC = x$   $AM = \sqrt{\frac{32 + x^2}{2}}$

$BC = x \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{x^2 - 4} = 2\sqrt{x^2 - 4}$

$AC = x$   $\frac{AC \cdot BH}{2} = \frac{x \cdot BH}{2} = S_{ABC} = 2\sqrt{x^2 - 4}$   $BH = \frac{4\sqrt{x^2 - 4}}{x}$   $MN = \frac{BH}{2} = \frac{2\sqrt{x^2 - 4}}{x}$

$AM^2 = AN^2 + MN^2$   $\frac{32 + x^2}{2} = 5^2 + \frac{4(x^2 - 4)}{x^2}$

$(32 + x^2)x^2 = 100x^2 - 16(x^2 - 4)$

$x^4 - 32x^2 + 100x^2 - 4x^2 = 16 \neq 0$

$x^4 + 72x^2 - 16 = 0$

$x^4 + 32x^2 + 100x^2 + 16x^2 - 64 = 0$

$x^4 + 84x^2 - 64 = 0$   $d = x^2$

$d^2 + 84d - 64 = 0$   $D = 84^2 + 64 \cdot 4 = 2^8 \cdot 16(21^2 + 16) = 16 \cdot 437457$

$d = \frac{-84 \pm \sqrt{437457}}{2}$   $-42 \pm 2\sqrt{437457}$   $d > 0$   $d = 2\sqrt{437457} - 42$

$x = \sqrt{2\sqrt{437457} - 42}$

ответ:  $\sqrt{2\sqrt{437457} - 42}$

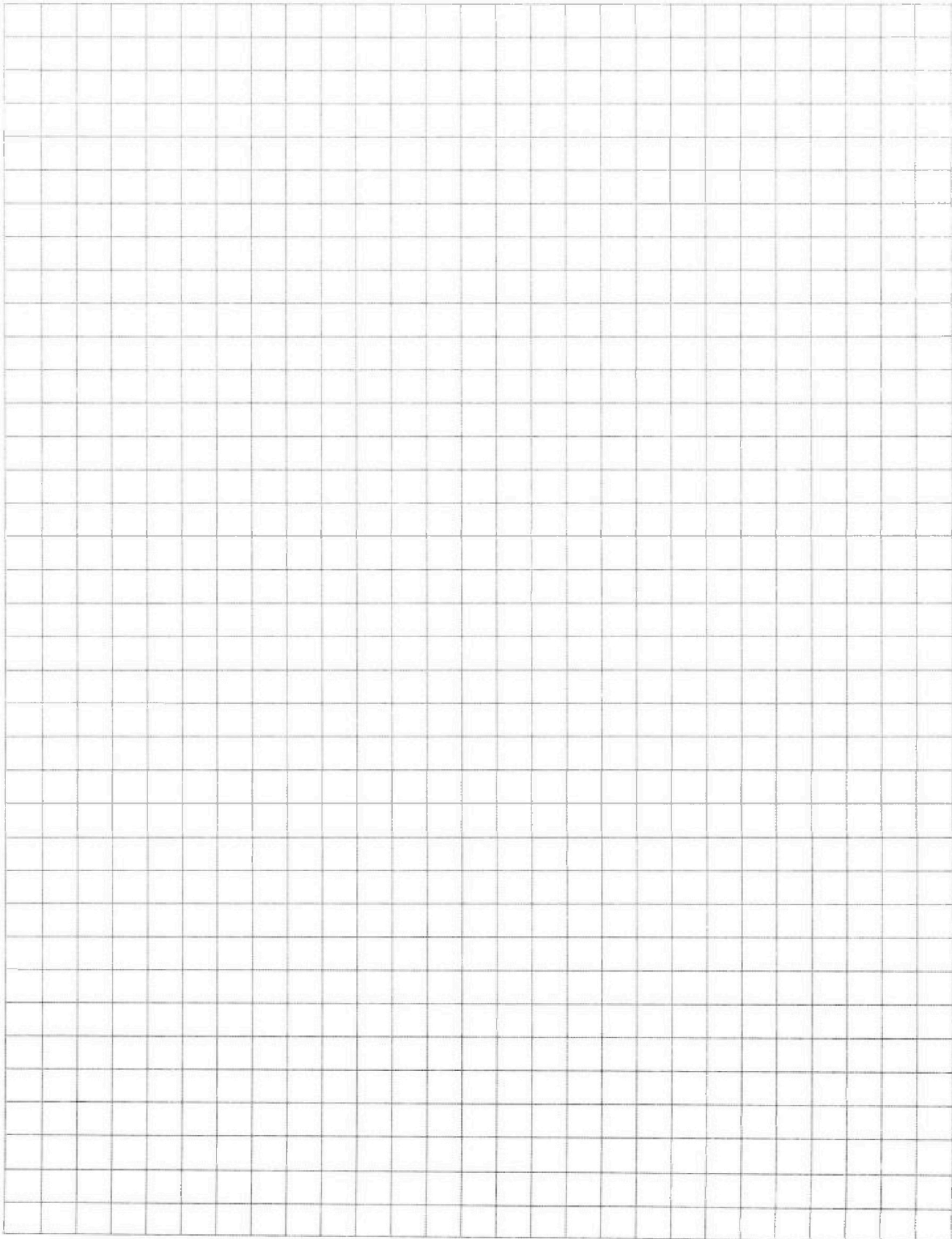


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



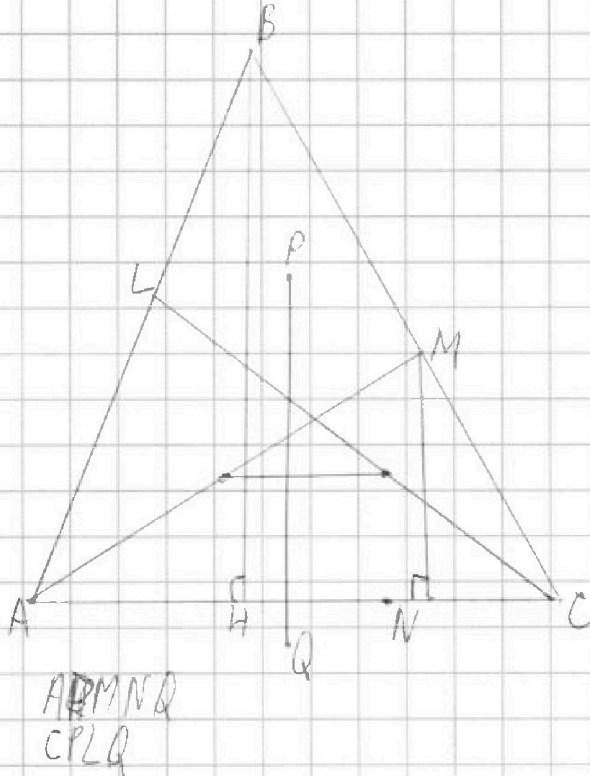


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$9\sqrt{5}-3-3(9,5-4,5\sqrt{5})=9\sqrt{5}-3-28,5+13,5\sqrt{5}=18,5\sqrt{5}-31,5$$

$$\begin{cases} -2 \leq x-2y \leq 2 \\ -1 \leq 2x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y-x=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

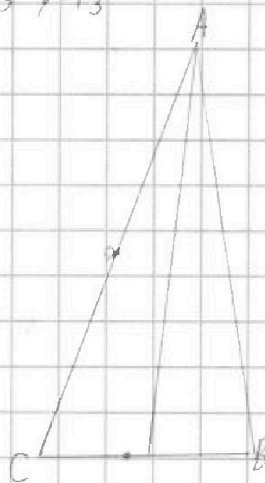
$$\begin{aligned} a(x-2y)+b(2x-y) &= 3y+6x \\ 7-2y(-2a-0)y+10a+20x &= 3y+6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2y-x=2 \\ 4y-2x+4x-2y=2 \end{cases} \\ 3x=4 \quad x=1\frac{1}{3} \quad y=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+2b=6 \\ 2-2a-b=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+4b=12 \\ 2-2a-b=3 \end{cases}$$

$$3b=15 \quad b=5 \quad a=-4$$



$$m^2+4mn+4n^2-7m-14n=(m+2n-7)(m+2n)$$

$$m^2n+2mn^2+9mn=mn(m+2n+9)$$

$$n(2n+9)$$

$$n \leq 9 \quad n(2n+9) \quad 9 \cdot 28 \quad 10 \cdot 30$$

$$\begin{aligned} n & \leq 8 \quad n \leq 10 \\ n(m+9) & \leq m \\ 92(9+9) & \leq m \cdot 12 \\ 13(13+9) & \leq m \cdot 12 \end{aligned}$$

$$(m+2n-7)$$

