



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q - простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4\text{-ый член квадратного многочлена} = a+3b = 6-9x$$

$$\text{Квадратный член } 6 \neq 0 \Rightarrow a+5b = (x^2-2x)^2$$

$$10\text{-ый} = a+9b = 9x^2$$

$$a+9b + 2(a+3b) = 3(a+5b)$$

$$9x^2 - 18x + 12 = 3(x^2 - 2x)^2$$

$$3x^2 - 6x + 4 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 6 = (x-1)^2 (x^2 - 2x - 4) = (x-1)^2 (x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})$$

$$x = 1, 1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}$$

$$\text{Ответ: } x = 1, 1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3y + 6x = 3 \cdot (2x - y) - 3|x - 2y| \leq 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 9$$

Пример на 9: $x, y = 1 \Rightarrow |x - 2y| = 1 \leq 2$ $6x + 3y = 9$
 $|2x - y| = 1 \leq 1$

Ответ: 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

Заметим, что $(m+2n)$ и $(m+2n-7)$ — взаимно простые.
 Заметим, что A — четное $\Rightarrow A = 11 \cdot 4 = 44$ или $A = 300$

Докажем, что $A \neq 300$. $\Rightarrow 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

$(m+2n)$ и $(m+2n-7)$ одновременно не могут делиться на 5

$$(m+2n)(m+2n-7) \geq 25 \cdot (25-7) > 300$$

$$\Downarrow$$

$$A = 44$$

делится на 4

$$44 = 2 \cdot 2 \cdot 11 = 4 \cdot 11$$

$$(m+2n)(m+2n-7) = 44$$

Заметим, что разность 2 делителей

$$\Rightarrow \text{можно } 4 \cdot 11 \text{ и } 4$$

$$m+2n = 11; m+2n-7 = 4$$

$$11 - 4 = 44$$

\Downarrow

$$B = mn(m+2n+9) = mn(11+9) = 20mn - \text{четное} \Rightarrow B = 300$$

$$m+2n < 11 \text{ и } mn = 15$$

$$\Downarrow$$

$$mn = 15 \quad 1, 3, 5, 15$$

Из всех вариантов пары координат (m, n) подходит только пара $m=5, n=3$

$$5+2 \cdot 3 = 11, 3 \cdot 5 = 15$$

Ответ: 5; 3

$$m, n \in \mathbb{N}$$

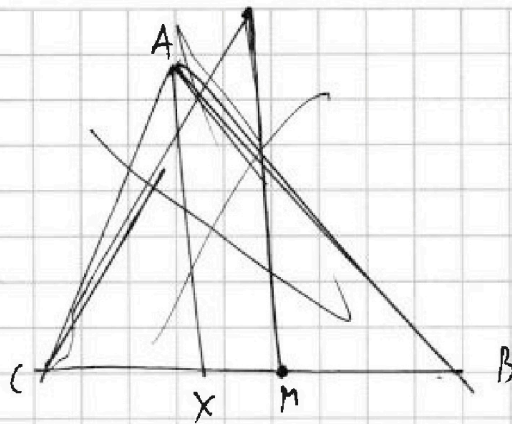


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

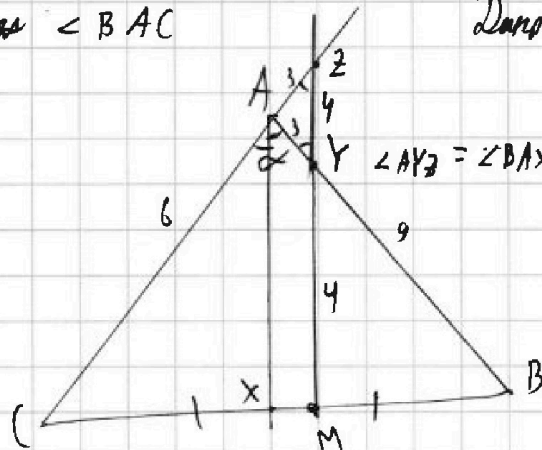
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\alpha = \angle BAC$

Дано: $AC = 6, AZ = 3, YZ = 4, AX \perp BC, MY \parallel AX$

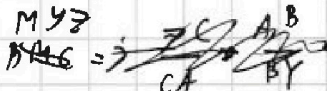


$\angle AYZ = \angle BAX = \angle CAZ = \angle AZY \Rightarrow AZ \parallel AY$
($AX \perp BC$ и $AX \parallel YZ$)

$$\frac{AZ}{AC} \cdot \frac{CB}{BM} \cdot \frac{MY}{YZ} = 1 \text{ (т. Менелая в } \triangle CMB \text{ по } AY)$$

$$\frac{3}{6} \cdot 2 \cdot \frac{MY}{YZ} = 1 \Rightarrow MY = YZ$$

Т. Менелая в $\triangle ABC$ по MY



$$\frac{AZ}{ZC} \cdot \frac{CM}{BM} \cdot \frac{BY}{YZ} = 1 \Rightarrow \frac{3}{9} \cdot 1 \cdot \frac{BY}{3} = 1 \Rightarrow BY = 9$$

по т. косинусов $\sqrt{AZ^2 + AY^2 - 2AZ \cdot AY \cdot \cos(180 - \alpha)} = YZ$

$$\sqrt{9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos(180 - \alpha)} = 4 \Rightarrow 18 - 2 \cdot 9 \cdot \cos(180 - \alpha) = 16$$

$$\Rightarrow \cos(180 - \alpha) = \frac{1}{9}$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{9}$$

$$BC = \sqrt{12^2 + 6^2 + 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{1}{9}} = 14$$

Ответ: 14



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + 3x - \sqrt{2}y = y^3 - \sqrt{2}x + 3y$$

$$x^3 + 3x + \sqrt{2}x = y^3 + 3y + \sqrt{2}y \quad \text{Зам.}$$

$$f(x) = x^3 + 3x + \sqrt{2}x - \text{монотонная возрастающая}$$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{24+5x-y^2}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(x+2)(7-x)}$$

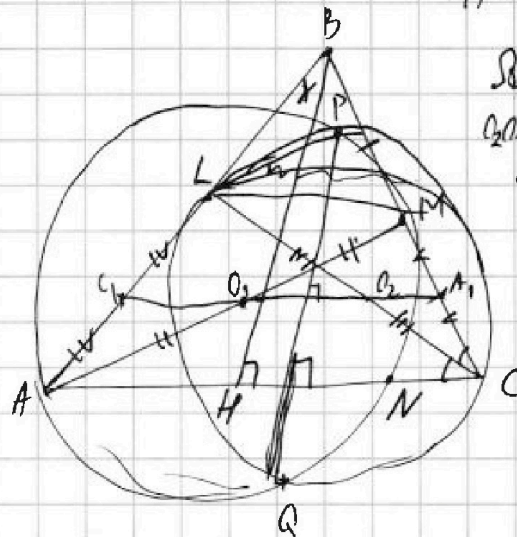


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



O_1, O_2 - центры окружностей

PO и CO перпендикулярны.

$O_1 O_2 \perp AC$, т.к. PO - радиусы

осей окружностей, $O_1 O_2 \perp PO$,

$PO \perp AC$, т.к. $PO \perp$ плоскости

P на AC .

Прямые $O_1 O_2$ до пересечения $O_1 O_2 \cap AB = C_1$

$O_1 O_2 \cap BC = A_1$

$C_1 O_2 \parallel AC$, $\angle O_2 = \alpha$, т.к. O_2 центр окр. и AC - диаметр.

\parallel
 $AC_1 = C_1 L$, следовательно $\angle A_1 = \angle M A_1$

BH - высота

$BC = AC \Leftrightarrow \angle C = 2\gamma \Leftrightarrow \angle M \parallel AC$, т.к. $AC \parallel A_1 C_1$ и $\angle A_1 C_1 M = \angle A_1 M C_1$
 $\angle C = 2\gamma$ $\angle C$ - востр. угол. M - середина BC

Найдём $\frac{AN}{NC}$ $BL = 2 \cdot \sin \gamma \cdot a \Rightarrow AB = 2 \sin \gamma \cdot a$

$MN \perp AC$, т.к. $\angle MNB$ - отрезок на диаметре.

$CM = MB$ $\Rightarrow CN = \frac{a \cdot \cos 2\gamma}{2}$

$AN = AH + HN = AH + \frac{a \cdot \cos 2\gamma}{2}$ $\Rightarrow \frac{AN}{CN} = 1 + \frac{AM}{CN} = \frac{AB \cdot \cos(90-\gamma)}{a \cdot \cos 2\gamma}$
 $AH = \frac{AB \cdot \cos(90-\gamma)}{2}$
 $= \frac{2 \sin^2 \gamma}{\cos 2\gamma} + 1 = \frac{\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma} = \frac{1}{\cos 2\gamma} = \frac{a \cdot \cos 2\gamma}{a \cdot \cos 2\gamma} = 1$

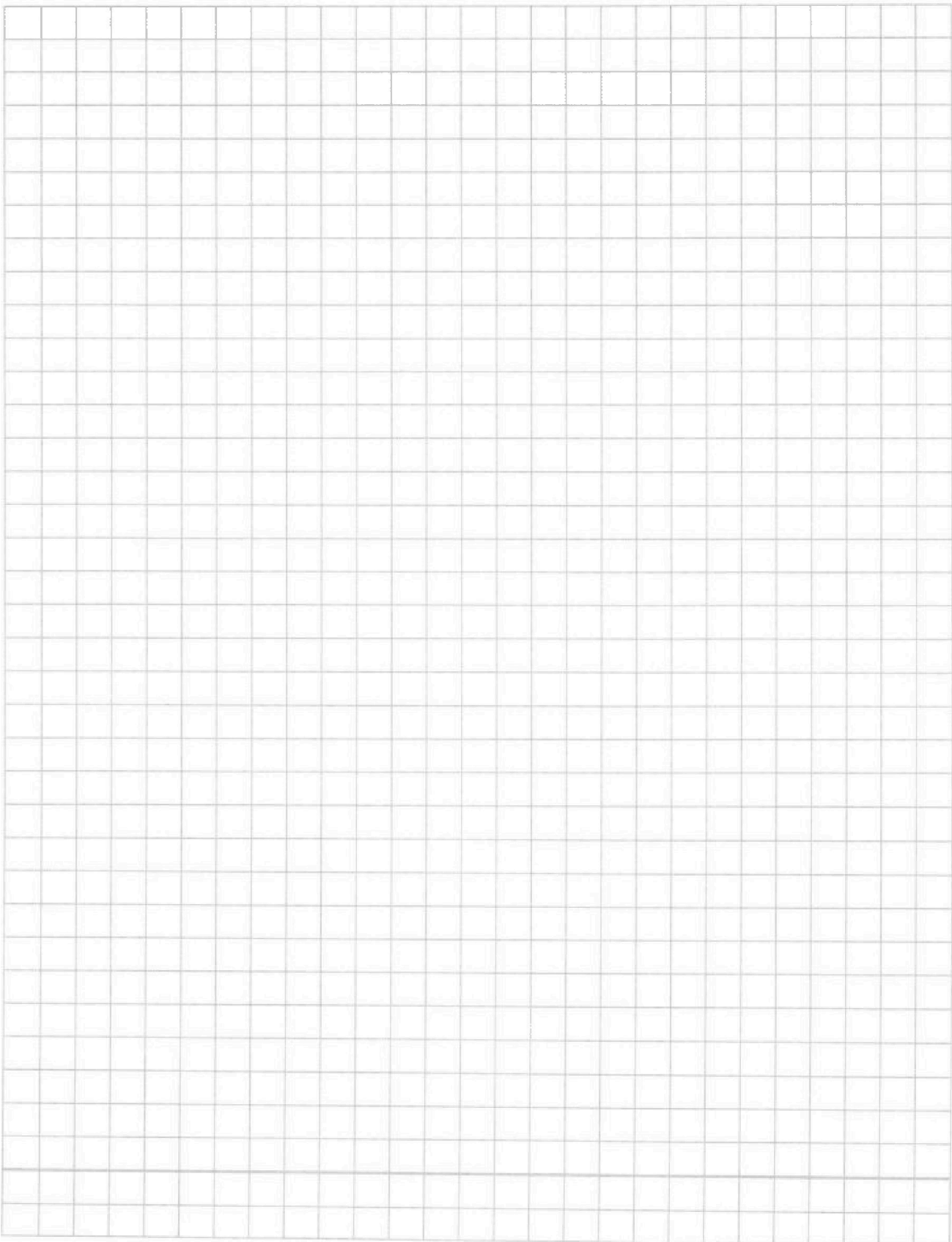


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a+3b, a+5b, a+9b$
 $(x+3) = 6(a+1)49 = 4-x$
 $51+x+14\sqrt{x+2} = (7-x)(3+2\sqrt{x+2}+x)$
 $6-9x \quad (x^2-2x)^2 \quad 9x^2$
 $9x^2 - 27x + 18 = 3(x^2-2x)$
 $6-9x \quad x^2-4x^3+4x^2 \quad 9x^2$
 $3x^2 - 18x + 12 = (x^2-2x)^2$
 $\sqrt{x+2} - \sqrt{7-4} \quad x(x-2)^2 < 9x^2$
 $3x^2 - 6x + 4 = (x^2-2x)^2$
 $(x-2)^2 < 9$
 $x, y \geq 0 \quad 3 \quad 2x-4 \quad 6$
 $2x-4$
 $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$
 $9-21 = -12 \quad 2y-x \quad 4 \cdot 4,5$
 $mn = 1$
 $A = (m+2n)^2 - 7m - 14n$
 $A \cdot \text{ёмнас} \Rightarrow A = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot A = 300$
 $\frac{2}{12} = 18-7$
 $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+4+9)$
 $44 =$
 $\sqrt{x+2} + 7 = 2\sqrt{2(\sqrt{x+2}+1)}$
 $7 - \sqrt{7-4} = 2\sqrt{2}A = \frac{(m+2n)^2}{2} - m - 2n$
 $|x-2y| \leq 2$
 $|2x-4y| \leq 1$
 $9 \cdot 9 - 2 \cos \alpha \cdot 9 = 16$
 $\frac{1}{9}$
 $144 + 36 + 16 = 196$
 14^2
 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 $x^4 - 4x^3 + x^2 = 3x^2 - 9x + 6$
 $(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$
 $x^4 - 4x^3 + x^2 + 9x + 6 = 0$
 $(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$
 $-3 \pm 9\sqrt{5}$
 $8(2a+1) = a+7$
 $\frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \quad \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
 $6 \pm \sqrt{5} \neq 2\sqrt{5}$
 $16 \quad 9 + \sqrt{5} - 18\sqrt{5}$
 $2ab \geq a+7$
 $2ab - a - 7 \geq 0$
 $1 \quad x \geq 0$
 $6 > \frac{a+7}{2a}$
 $19 \quad 16 \quad 33 \quad 54 \quad 6 = \frac{a+7}{2a-1}$
 $a \geq \frac{7-6}{26-1}$
 $2x+19 \leq 1 \quad y \leq 0$
 $2x-9 \leq 7 \quad 6x+34 \leq 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

У нас есть квадрат 11×11 .

Конфигурация - набор покрашенных
клеток в квадрате

Всего способов выбрать покрашенные клетки (черный цвет, квадрат) = $C_{121}^2 = 121 \cdot 60$

Заметим, что две конфигурации, которые мы не считаем при повороте, т.е.

только 1 клетка не пересекается при повороте на 90° , а две пересекаются 2.

и 1-я клетка не может перейти во 2-ю и наоборот 2-я клетка в 1-ю.

Тогда при повороте на 90° каждая конфигурация \rightarrow другая. (не исключены =)

Каждая конфигурация соответствует двум конфигурациям, при повороте на 90° .

Мы доказали, что конфигурации, которые не пересекаются при повороте на 90° нет.

2 клетки не могут перейти в друг друга, т.е.

разделить квадрат на 4 симметричные 5×5 и центральную клетку, она не

деляется при повороте, и клетки из каждого симметричного переходят

по кругу, т.е. из $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ и клетка из 2 при повороте на 90° не может

перейти в 1-ю симметричную. Заметим, что если покрашены клетки,

переходящие квадрат на 180° , то клетка переходит в клетку симметричную

ей относительно центра квадрата. Значит, клетки перейдут в друг друга

при повороте на 180° если она симметрична относительно центра. Тогда

$$\text{конфигураций} \frac{121-1}{2} = 60 \quad 121 \cdot 60 - 60 = 120 \cdot 60 - \text{конфигурации, которые}$$

$$120 \cdot 60 : 4 = 30 \cdot 60 = 1800$$

повторяются 4 раза. Ответ: $30 \cdot 60 = 1800$ способов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 + 3y - \sqrt{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - 2\sqrt{x} = y^3 + 3y + 2\sqrt{y} \end{cases}$$

Заметим что функция $f(x) = x^3 + 3x + \sqrt{2x}$ монотонно возрастает, т.к. $x^3, x, \sqrt{2x}$ - малые
то возрастание функции $\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ 25.18

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{-x^2+5x+14} \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \sqrt{5-2} + 7 = 2\sqrt{-9}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{-x^2+5x+14} = 2\sqrt{(x+2)(7-x)}$$

$$7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)} - \sqrt{x+2} + \sqrt{7-x} = 2\left(\sqrt{7-x} \cdot \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{x+2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$14 - \sin \alpha \cdot a^2$$



$$a - b + c > 2ab$$

$$13 = (2\sqrt{7-x} - 1)(2\sqrt{x+2} + 1)$$

$$75 = 3 \cdot 25$$

$$a - b + c = 2ab$$

$$14 + 2,5^2$$

$$6,25$$

$$2,25 + 1,5 = 3$$

$$(m+2n)^2 - 7m - 14n$$

$$44$$

$$mn(m+2n+9)$$

$$15$$

$$29$$

$$4\sqrt{5}$$

$$(m+2n)^2 - 7m - 14n$$

$$14 = 4ab - 2a + 2b$$

$$-2m + n$$

$$13 = (2b-1)(2a+1)$$

$$mn(m+2n+9)$$

$$15$$

$$29$$

$$4\sqrt{5}$$

1	2	3	1
2	4	1	2
3	1	4	3
4	3	1	4



$$\cos 60^\circ \cdot 4$$

$$m - 7m$$

$$\frac{YA \cdot BC \cdot MP}{YC \cdot BM} \geq 1$$

$$\frac{1}{3} \cdot 2$$

$$4 - \sqrt{5} + 7 = 4\sqrt{5}$$

$$(m+2n) - 7(m+2n)$$

$$\frac{a - \cos 90^\circ \cdot 4}{a \cdot \cos \alpha} \cdot 4$$

$$[\sqrt{2}-1]\sqrt{3}$$

$$(m+2n)(m+2n-7)$$

$$\cdot 2 \geq 3$$

$$300$$

$$25$$

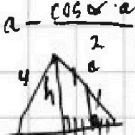
$$10$$

$$75 \cdot 4$$

$$mn(m+2n+9) \geq 4$$

$$300$$

$$m = mn$$



$$\frac{\cos 90^\circ \cdot 4}{\cos 2\alpha \cdot AC} \cdot 4$$

$$\frac{YM}{M2} \geq \frac{B}{AB} = 1$$

$$a - \cos \alpha \cdot a$$

$$a \cdot \sin \alpha = 4 \cdot \frac{2}{CY}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{10}{6}$$

$$\frac{20}{9}$$

$$\frac{a}{a \cdot \cos \alpha} = 1$$

