МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7

1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6-9x$, шестой член равен $(x^2-2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y+6x$ при условии

$$\begin{cases} |x-2y| \leqslant 2 \\ |2x-y| \leqslant 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC=6$, $AZ=3$, $YZ=4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2}-\sqrt{7-y}+7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3+3x-\sqrt{2y} = y^3-\sqrt{2x}+3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB=4$, $AN=5$.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

4-ый член последовательности $= a+3b = 6-9x$

Аналогично 6-ой $\Rightarrow a+5b = (x^2-2x)^2$

10-ый $= a+9b = 9x^2$

$a+9b+2(a+3b) = 3(a+5b)$

$9x^2-18x+12 = 3(x^2-2x)^2$

$3x^2-6x+4 = x^4-4x^3+4x^2$

$x^4-4x^3+x^2-4x+6=0$

$x^4-4x^3+x^2-4x+6 = (x-1)^2(x^2-2x-4) = (x-1)^2(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})$

$x = 1,\ 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}$, ~~[illegible]~~

Ответ: $x = 1,\ 1-\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5}$

$3y+6x = 3\cdot(2x-y) - 3(x-2y| \leq 3\cdot 1 - 3(-2) = 9$

Пример на 9: $x, y = 1 \Rightarrow |x-2y| = 1 \leq 2$ $\quad 6x+3y = 9$

$|2x-y| = 1 \leq 1$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$

$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$

$(m+2n)$ и $(m+2n-7)$ - разной чётности

заметим, что A - чётное $\Rightarrow$ $A = 11 \cdot 4 = 44$ или $A = 300$

Докажем что $A \neq 300$. $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

$(m+2n)$ и $(m+2n-7)$ одновременно не могут делиться на 5

$(m+2n)(m+2n-7) \geq 25 \cdot (25-7) > 300$

$\Downarrow$

$A = 44$ делители 44: 44 22 11 4 2 1

$(m+2n)(m+2n-7) = 44$

заметим, что разность 2 делителей $= 7$ только у 11 и 4

$m+2n = 11$; $m+2n-7 = 4$

$11 \cdot 4 = 44$

$B = mn(m+2n+9) = mn(11+9) = 20mn$ - чётное $\Rightarrow B = 300$

$\Downarrow$

$m+2n < 11$ и $mn = 15$ $mn = 15$ 1, 3, 5, 15

Из всех вариантов пар и подходящих под условие верно только $m=5, n=3$

$5+3 \cdot 2 = 11$, $3 \cdot 5 = 15$

$m, n \in \mathbb{N}$

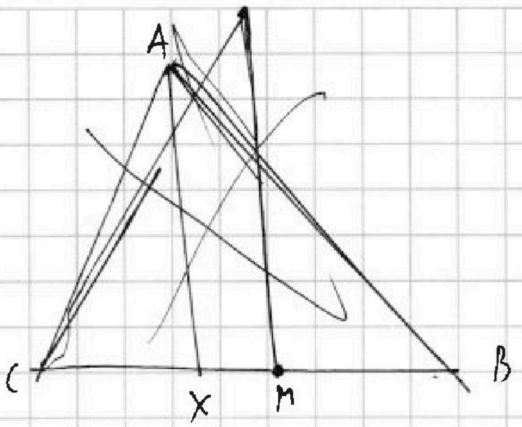
Ответ: 5; 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

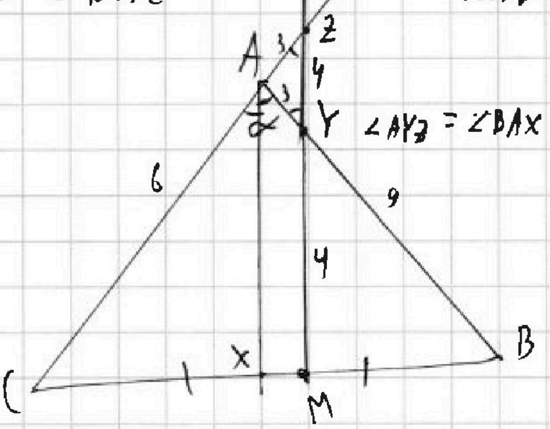
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



α - ~~угол~~ ∠BAC

Дано: AC = 6, AZ = 3, YZ = 4, Ax - бисс.
MY ∥ AX



$\angle AYZ = \angle BAX = \angle CAX = \angle AZY$ (Ax - бисс. и $AX \parallel YZ$) $\Rightarrow AZ = AY$

$\frac{ZA}{AC} \cdot \frac{CB}{BM} \cdot \frac{MY}{YZ} = 1$ т. мен. △CMZ и пр. AYB

$\frac{3}{6} \cdot 2 \cdot \frac{MY}{YZ} = 1 \Rightarrow MY = YZ$

T-Менелая △AZC и пр. MYZ ~~BAC~~ $\Rightarrow$ ~~$\frac{ZC}{CA} \cdot \frac{AB}{BY}$~~

$\frac{AZ}{ZC} \cdot \frac{CM}{BM} \cdot \frac{BY}{YZ} = 1 \Rightarrow \frac{3}{9} \cdot 1 \cdot \frac{BY}{3} = 1 \Rightarrow BY = 9$

по T косинусов $\sqrt{AZ^2 + AY^2 - 2\cos(180-\alpha) \cdot AZ \cdot YA} = YZ$

$\sqrt{9 + 9 - 2\cos(180-\alpha) \cdot 9} = 4 \Rightarrow 18 - 2\cos(180-\alpha)\, 9 = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(180-\alpha) = \frac{1}{9}$

$\cos\alpha = -\frac{1}{9}$

$BC = \sqrt{12^2 + 6^2 + 2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 6 \cdot 12} = 14$

Ответ: 14

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$x^3+3x-\sqrt{2}y = y^3-\sqrt{2}x+3y$$

$$x^3+3x+\sqrt{2}x = y^3+3y+\sqrt{2}y$$

$f(x) = x^3+3x+\sqrt{2}x$ — монотонно возрастающая

$$f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{7-y}+7=2\sqrt{14+5x-y^2}$$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{7-x}+7=2\sqrt{(x+2)(7-x)}$$

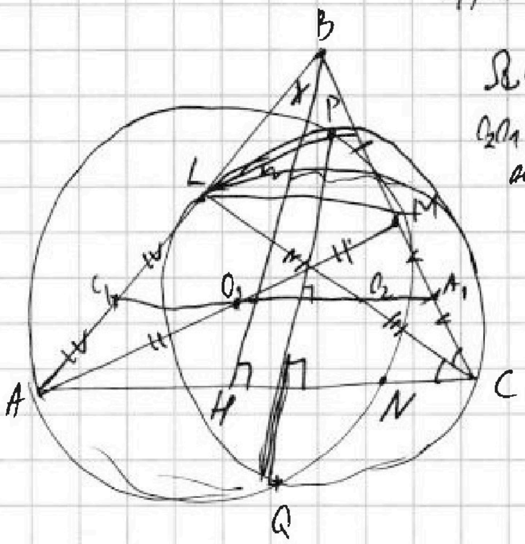
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

O_1, O_2 - центры окружностей



Ω и ω соответственно.

$O_2O_1 \parallel AC$, т.к. PQ - радикальная ось окружностей, $O_1O_2 \perp PQ$, $PQ \perp AC$, т.к. $PQ \parallel$ высоте из B на AC.

Продлим $O_1 O_2$ до пересечений $O_1O_2 \cap AB = C_1$

$O_1O_2 \cap BC = A_1$

$C_1 \quad O_2 \parallel AC$, $LO_2 = O_2C$, т.к. O_2 центр окр. и LC - диаметр.

$\Downarrow$

$\underline{AC_1 = C_1L, \text{ аналогично } CA_1 = MA_1}$

BH - высота

C_1O_1 ср. линия $\triangle LAM$

$\Downarrow$

$BC = AC \Leftarrow |AL = LB \Leftarrow \left|\begin{array}{l} LM \parallel AC, \text{ т.к. } AC \parallel A_1C_1 \text{ и } (\cancel{AC_1 = C_1L \text{ и } CA_1 = A_1M}) \\ M - \text{середина } BC \end{array}\right.$

$\angle C = 2\gamma$ $\qquad$ CL - выс. медиан.

~~$\triangle AMC$ правильный~~

M-

Найдём $\dfrac{AN}{NC}$ $\qquad BL = \cancel{2} \cdot \sin\gamma \cdot a \Rightarrow AB = 2\sin\gamma \cdot a$

$MN \perp AC$, т.к. $\angle MNA$ - опирается на диаметр

$CM = MB$ $\Big/ \Rightarrow CN = \dfrac{a \cdot \cos 2\gamma}{2}$

$AN = AH + HN = AH + \dfrac{a \cdot \cos 2\gamma}{2}$

$AH = \dfrac{AB \cdot \cos(90-\gamma)}{}$

$\Big/ \Rightarrow \dfrac{AN}{CN} = 1 + \dfrac{AH}{CN} = \dfrac{AB \cdot \cos(90-\gamma)}{\frac{a \cdot \cos 2\gamma}{2}} = \dfrac{4 \cdot \sin\gamma \cdot a \cdot \cos(90-\gamma)}{a \cdot \cos 2\gamma} + 1 =$

$= \dfrac{2\sin^2\gamma}{\cos 2\gamma} + 1 = \dfrac{\cos^2\gamma + \sin^2\gamma}{\cos^2\gamma - \sin^2\gamma} = \dfrac{1}{\cos 2\gamma}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$7+\sqrt{x+2}=\sqrt{7-x}(\sqrt{x+2}+1)$

$a+3b$, $a+5b$, $a+9b$ $(a+7)=b(a+1)$ $49 \geq 7-x$

$51+x+14\sqrt{x+2}=(7-x)(3+2\sqrt{x+2}+x)$

$6-9x$ $(x^2-2x)^2$ $9x^2$ $9x^2-27x+18=3(x^2-2x)$

$6-9x$ $x^4-4x^3+4x^2$ $9x^2$ $3x^2-18x+12=(x^2-2x)^2$

$a+7=b(a+1)$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{7-y}$ $x^2(x-2)^2<9x^2$ $3x^2-6x+4=(x^2-2x)^2$ $b(2a+1)$

3 2 $x-y$ 6

$(x-2)^2<9$ $x,y\geq 0$ -3 $x-2y$

$2x-y$

$A=m^2+4mn+4n^2-7m-14n$ $9-21=-12$ $2y-x$ $y\cdot 4{,}5$

$mn\neq 1$ $\frac{9}{2}=18-7$

$A=(m+2n)^2-7m-14n$ A. чётное => A = 44... A = 300 17

81 -21 -42 $44=$

$B=m^2n+2mn^2+9mn=mn(m+n+9)$ $2\sqrt{2+x^2}+1=\frac{13}{2\sqrt{2+x}\cdot 1}$

$\sqrt{x+2}+7=2b(2\sqrt{x+2}+1)$ $|x-2y|\leq 2$

$7-\sqrt{7+x}=a(2b$ $A=(m+2n)^2-m-2n$ $|2x-y|\leq 1$

$x^3+3x+\sqrt{2x}=y^3+\sqrt{2y}+3y$ $+2m+n$

$x=y$ $14-2b=2b(2b-1)^2$ $9+9-2\cos\alpha\cdot 9=16$

$13=(2a+1)(2b-1)$ $\frac{1}{9}$

$a-6+7=2ab$

-3 -1 1 3 5 7 9

$a+3b$ $a+5b$ $a+9b$ $144+36+16=196$

$6-9x$ $(x^2-2x)^2$ $9x^2$ 14^2

$x^4-4x^3+x^2+6x-4=0$

$\frac{1+\sqrt5}{2}$ $x^4-4x^3+4x^2=3x^2-9x+6$ $(x-1)(x^3-3x^2-2x+4)=0$

$x^4-4x^3+x^2+9x-6=0$ $(x-1)^2(x^2-2x-4)=0$

$-3\pm 9\sqrt5$ $+\cancel{2}$ $b(2a+1)=a+7$ $\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$ $\frac{1\pm\sqrt5}{2}$

$2ab\geq a+7$

$6\pm2\sqrt5\mp2\sqrt5$ 16 $9+45-18\sqrt5$ $2ab-a-7\geq 0$

$1.$ $x\geq 0$ $y\leq 0$

-3 $-4{,}5\sqrt3$ $b\geq\frac{a+7}{2a}$

19 16 38 54 $b=\frac{a+7}{2a-1}$ $a\geq\frac{7-b}{2b-1}$ $2x+|y|$ $y\leq 0$

$2x-y\leq 1$ $6x+3y\leq 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Узлы сетки образуют квадрат 11×11. Конфигурация – набор покрашенных клеток в квадрате

Всего способов его перекрасить его 2 клетки (узлы нач. квадрата) = $C_{121}^{2} = 121\cdot 60$

Заметим что нет конфигурации которая бы не менялась при повороте, т.к. только 1 клетка не перемещается при повороте на 90°, а мы перекрашиваем 2.
и 1-ая клетка не может перейти во 2-ую и одновременно 2-ая клетка в 1-ую.
Тогда при повороте на 90° 4 раза наша конфигурация ~~будет~~ не меняется =)

либо 1 конфигурации соответствует 4 или 2 конфигурациям ~~90~~, при поворотах на 90°. Мы доказали что конфигурации которые не меняются при повороте на 90° нет. 2 клетки не могут перейти в друг друга, т.к. разделим квадрат на 4 прямоугольника 5×6 и центральную клетку, она не меняется при повороте, и клетки из каждого прямоугольника переходят по кругу, т.е. из 1→2→3→4→1 и клетка из 2 пр. при повороте на 90° не может попасть в 1-ый прямоугольник. Заметим что если перекрасить клетку, перевернуть квадрат на 180°, то клетка перейдёт в клетку симметричную ей относительно центра квадрата. Значит клетки перейдут в друг друга при повороте на 180° если они симметричны относительно центра. Таких конфигураций $\frac{121-1}{2}=60$ $121\cdot 60-60=120\cdot 60$ - конфигураций которые
$120\cdot 60:4=30\cdot 60=1800$
повторяются 4 раза. Ответ: $30\cdot 60=1800$ способов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3+3x-\sqrt{2y} = y^3+3y-\sqrt{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3+3x+2\sqrt{x} = y^3+3y+2\sqrt{y} \end{cases}$$

Заметим что функция $f(x) = x^3+3x+\sqrt{2x}$ - ~~возрастающая~~ монотонно возрастающая, т.к. $x^3, x, \sqrt{2x}$ - монотонно возрастающие функции $\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$25 \cdot 18$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{-x^2+5x+14} \\ x = y \end{cases}$$

$\left(\frac{121 \cdot 120}{2} - 120\right) = \frac{119 \cdot 60}{4}$

$\sqrt{5}-2+7 = 2\sqrt{}4$

$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{-x^2+5x+14} = 2\sqrt{(7-x)(x+2)}$

$7 = 2\sqrt{(7-x)(x+2)} - \sqrt{x+2} + \sqrt{7-x} = 2\left(\sqrt{7-x} - \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2+x} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$

$AB = 2 \cdot \sin\gamma \cdot a$

$\frac{\cos}{\sin\gamma} \cdot AB$

$\cos 2\gamma \cdot a$

$\sqrt{14 - \sin^2\alpha \cdot a^2} -$

$13 = (2\sqrt{7-x} - 1)(2\sqrt{x+2} + 1)$ 120 4,5

$(7-\sqrt{2})\sqrt{3}+7$ $\sqrt{3 \cdot 8} = 3\sqrt{2}$

$a - b + 7 = 2ab$ $75 = 3 \cdot 25$ $a - b + 7 = 2ab$

$14 + 2{,}5^2$ 6,25 $2{,}025 \cdot 1{,}5 = 3$

$\frac{\sin}{\sin 90 - 2\gamma}$

$(m+2n)^2 - 7m - 14n$ $14 = 4ab - 2a + 2b$ $(m+2n)^2 - 7m - 14n$ 44

$-2m+n$ $13 = (2b-1)(2a+1)$ $mn(m+2n+9)$

$3m+n$

1	2	3	1
2	4	1	2
3	1	4	3
4	3	1	4

$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ 55 15 24 29 20 $4\sqrt{5}$

$\vdots 4$ -7

$\frac{YA}{YC} \cdot \frac{BC}{BM} \cdot \frac{MZ}{ZY} = 1$

$m^2 - 7m$

$m \vdots 4$

$\frac{\cos(90-\alpha) \cdot 4}{a \cdot \cos(90-\alpha)}$ $(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}$

$\frac{7}{3} \cdot 2$

$(m+2n)^2 - 7(m+2n)$ $7 - \sqrt{7}$ 123456 12 $4 - \sqrt{3} + 7 = 4\sqrt{3}$

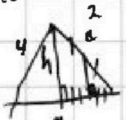
$(m+2n)(m+2n-7) \cdot n \geq 3$ 300 25 10 $75 \cdot 4$

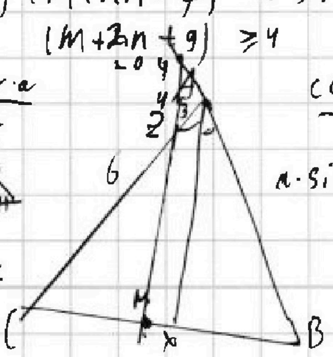
mn $(m+2n+9) \geq 4$ 300 $15 = mn$ 5 3

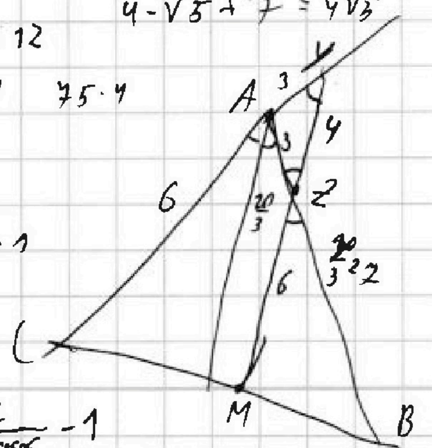
$a - \frac{\cos\alpha \cdot a}{2}$

$\frac{\cos 90-\alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \frac{4}{a}$ $\frac{AC}{CY} \cdot \frac{YM}{MZ} \cdot \frac{ZB}{AB} = 1$

$a \cdot \sin\alpha = 4$







$\frac{2}{3} \cdot \frac{10}{6}$ $\frac{10}{9}$

$\frac{a - \frac{\cos\alpha \cdot a}{2}}{1 - \frac{\cos\alpha}{2}}$ $1 - \frac{\cos\alpha}{2}$

$\frac{a}{a \cdot \frac{\cos\alpha}{2}} - 1$