



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases}$$

$$(1): -3 \leq x-3y \leq 3 \quad \text{и} \quad (2): -1 \leq 3x-y \leq 1$$

Из (1) следует, что $3y-3 \leq x$, а из (2) — $x \leq \frac{y+1}{3}$

Получаем:

$$3y-3 \leq \frac{y+1}{3} \Leftrightarrow 9y-9 \leq y+1 \Leftrightarrow 8y \leq 10 \Leftrightarrow 4y \leq 5$$

Из (1) следует, что $-3 \leq 3y-x \leq 3$, откуда получаем, что $3y \geq x-3$

Аналогично из (2) следует, что $-1 \leq y-3x \leq 1$, откуда получаем, что $3y \leq$

Из (1) следует, что $3y \leq x+3$, а из (2) — $y \geq 3x-1$

Получаем:

$$3x-1 \leq \frac{x+3}{3} \Leftrightarrow 9x-3 \leq x+3 \Leftrightarrow 8x \leq 6$$

Итого имеем, что $4y+8x \leq 5+6=11$

Равенство достигается при $y = \frac{5}{4}$, $x = \frac{3}{4}$.

Максимальное значение $4y+8x = 11$.

Ответ: 11.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$7-р. \frac{M_4}{M_7} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{или же } \frac{18}{9} = \frac{a+6}{18} \Leftrightarrow a+6 = 18 + 144 \quad (2)$$

Получаем (1) b (2) получим:

$$24a - 24b + 6b - 18b = 144$$

$$24a - 36b = 144 \Leftrightarrow 2a - 3b = 12 \Leftrightarrow b = \frac{2a-12}{3} \text{ (подставим в (1))}$$

$$\frac{2a^2 - 12a}{3} = 24 \cdot \frac{a+12}{3}$$

$$2a^2 - 12a = 24a + 288$$

$$a^2 - 18a + 144 = 0$$

$$D = 24$$

$a = -6$ и угл., к. длина стороны больше 0.

$$b = 12$$

$$\text{т.с. } M_7 = 12, B_7 = 24$$

Применяем т.к. AX - бисс-а в $\triangle ABC$, то её длина равна

$$AX = \sqrt{AB \cdot AC - BX \cdot CX}$$

$$\text{или } AB = B_7 + A_7 = 30$$

$$\frac{AX}{M_7} = \frac{AB}{B_7} \Leftrightarrow AX = \frac{5}{4} \cdot 12 = 15 \text{ (из } \triangle BAX \sim \triangle AM_7)$$

$$225 = 540 - BX \cdot CX \Leftrightarrow BX \cdot CX = 540 - 400 = 140$$

$$\text{По д-лу биссектрисы } \frac{BX}{CX} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{4} \quad BX \cdot CX = 140$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

по ст-ву Писсекура $\frac{BX}{CX} = \frac{AB}{AC} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 3BX = 5CX \Leftrightarrow BX = \frac{5}{3}CX$

т.е. $\frac{5}{3}CX^2 = 140 \Leftrightarrow CX^2 =$

$225 = 540 - BX \cdot CX \Leftrightarrow BX \cdot CX = 315$

по ст-ву Писсекура: $\frac{BX}{CX} = \frac{AB}{AC} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow BX = \frac{5}{3}CX$

т.е. $\frac{5}{3}CX^2 = 315 \quad CX^2 = 315 \cdot \frac{3}{5} = 63 \cdot 3 = 189$

$CX = 3\sqrt{21}$.

$BX = 5\sqrt{21}$

Итак, $BC = BX + CX = 8\sqrt{21}$.

Ответ: $8\sqrt{21}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2+5x^2-5y} = y^2 - \sqrt{x} + \sqrt{y^2} \quad (2)$$

$$(2): x^2 - y^2 + 5(x^2 - y^2) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})((\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1) = 0$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0, \text{ т.к. } \sqrt{x} \geq 0 \text{ и } \sqrt{y} \geq 0$$

$$x+y \geq 0, \text{ т.к. } x \geq 0 \text{ и } y \geq 0 \text{ (т.к. есть } \sqrt{x} \text{ и } \sqrt{y}), \text{ иначе } \sqrt{x} - \sqrt{y} \text{ и}$$

имеем минус.

$$x^2 + y^2 \geq 0, \text{ т.к. } x^2 \geq 0 \text{ и } y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0, \text{ откуда } x = y \geq 0$$

$$(1): \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{-(x^2-5x-6)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$\left. \begin{array}{l} U = \sqrt{x+1}, \text{ а } V = \sqrt{6-x}, \text{ тогда} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} U^2 + V^2 = 7 \\ U - V + 5 = 2UV \end{array} \right\}$$

Возвращая к той же замене второе.

$$U - V + 5 = 2UV$$

$$U^2 - 2UV + V^2 + U - V = 2$$

$$(U - V)^2 + U - V = 2$$

$$(U - V)(U + V + 1) = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} U - V = t, \text{ тогда} \\ t(t+1) = 2 \end{array} \right\}$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$(t+2)(t-1) = 0, \text{ обратная замена } t = U - V$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} U - V = -2 \\ U - V = 1 \end{cases}$$

Решим обратная замена $V = \sqrt{x+1} \geq 0$ $V = \sqrt{6-x} \geq 0$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} = 1 \end{cases}$$

Решим 2-ое ур-ие системы:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{6-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 6-x+2\sqrt{6-x}+1$$

$$2x-6 = 2\sqrt{6-x}$$

$$\sqrt{6-x} = x-3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 6-x = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 + 6x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$$

Решим 1-ое ур-ие системы:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{6-x} - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6-x} \geq 2 \\ x+1 = 6-x-4\sqrt{6-x}+4 \end{cases} \quad \begin{cases} 6-x \geq 4 \\ 2x-9 = 4\sqrt{6-x} \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ 9-2x = 4\sqrt{6-x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 2x \leq 9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq \frac{9}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq \frac{9}{2} \\ x = \frac{10+\sqrt{40}}{4} \\ x = \frac{10-\sqrt{40}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq 4,5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{5-\sqrt{10}}{2} \end{cases} \quad \frac{5+\sqrt{10}}{2} \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5-\sqrt{10}}{2}$$

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right), \left(\frac{5-\sqrt{10}}{2}, \frac{5-\sqrt{10}}{2}\right)$.

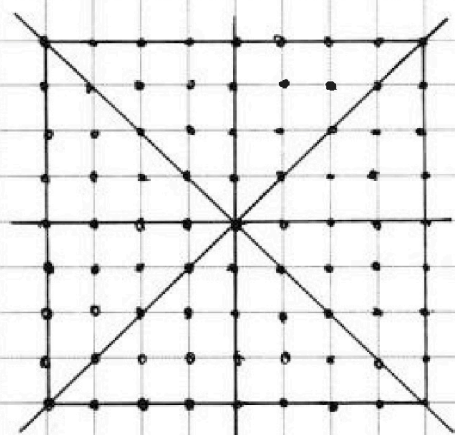
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задача 6.

Заметим, что диагонали квадрата, а также срединные перпендикуляры к боковым сторонам при переходе друг в друга соответствуют себе.

Потому для точек, находящихся на ^{одной} диагонали или на этих прямых и симметричных относительно центра квадрата есть лишь одна пара точек, в которую они переходят при повороте. Таких пар точек всего 16.

Для остальных точек ~~есть~~ пар точек есть ещё три пары точек, в которых они переходят при повороте.

Всего пар точек можно выбрать — $C_{81}^2 = \frac{81 \cdot 80}{2} = 3240$. Из них для 16 точек пар точек есть ~~ещё~~ ещё одна, переходящая в них при повороте. И для 3224 пар точек есть ещё три пары точек, переходящие при повороте. Таким образом, искомого число пар есть $\frac{3240}{4} + \frac{3224}{4} + \frac{16}{2} = 806 + 8 = 814$.



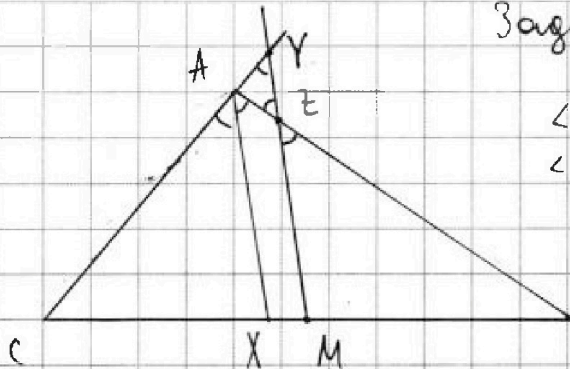
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.



$\angle CAZ = \angle BAX$, т.к. AX - биссектриса $\angle BAC$
 $\angle BAX = \angle BEM$, как соотв. при $MZ \parallel AX$ и сек. MY .

$\angle BEM = \angle AZY$, как вертикальные

$\angle CAX = \angle CYM$, как соотв. при

$BX \parallel MY$ и секущей CY .

$\Rightarrow \angle AZY = \angle AZE \Rightarrow \triangle AZE$ - равнобедр.

$$\Rightarrow AY = AZ = b.$$

Обозначим $BZ = a$, $MZ = b$.

Тогда $\frac{AB}{BZ} = \frac{AX}{MZ}$, т.к. $\triangle BZM \sim \triangle BAX$ (по двум углам)

$\frac{CY}{AC} = \frac{MY}{AX}$, т.к. $\triangle CYM \sim \triangle CAX$ (по двум углам)

Перемножив эти равенства, получим:

$$\forall a \quad \frac{a+b}{a} = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{4}{3} = \frac{b+8}{b} \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{4}{3} + \frac{8}{a} = 1 + \frac{8}{b}$$

$$\Leftrightarrow 24(a-b) = ab \quad (1)$$

Из подобия $\triangle CYM$ и $\triangle CAX$ следует, что $\frac{CX}{CM} = \frac{AX}{MY}$

Из подобия $\triangle BAX$ и $\triangle BEM$ следует, что $\frac{AX}{ME} = \frac{BX}{BM}$

Поделив второе равенство на первое, получим

$$\frac{MY}{ME} = \frac{BX}{CX} \quad (CM = BM, \text{ т.к. } M - \text{ середина } BC)$$

$$\frac{BX}{CX} = \frac{AB}{AC}, \text{ т.к. } AX - \text{ биссектриса } \angle A \text{ в } \triangle ABC$$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

Пусть d - разность данной прогрессии. Тогда имеем

$$\begin{cases} 3x+3+2d=(x^2+2x)^2 \\ (x^2+2x)^2+4d=3x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+6+4d=2(x^2+2x)^2 & (1) \\ (x^2+2x)^2+4d=3x^2 & (2) \end{cases}$$

Вычтем из (1) (2).

$$6x+6-x^4-4x^3-4x^2=2x^4+8x^3+8x^2-3x^2$$

$$3x^4+12x^3+9x^2-6x-6=0 \Leftrightarrow$$

Заметим, что $x=-1$, является корнем данной ур-ции, тогда

$$(x+1)(3x^3+9x^2-6)=0$$

Заметим, что $x=-1$ также является корнем многочлена

$3x^3+9x^2-6$, тогда

$$3(x+1)^2(x^2+2x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2=0 \\ x^2+2x-2=0 (*) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-1+\sqrt{3} \\ x=-1-\sqrt{3} \end{cases}$$

Решим (*)

$$D=4+8=12 > 0$$

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{12}}{2} = -1+\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2} = -1-\sqrt{3}$$

Ответ: $\{-1-\sqrt{3}; -1; -1+\sqrt{3}\}$.

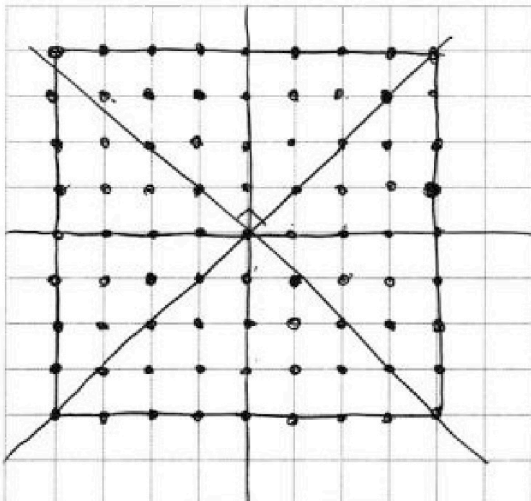
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$C_{81}^2 = \frac{81 \cdot 80}{2} = 81 \cdot 40$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 40 \\ \hline 3240 \end{array}$$

$$\frac{16}{2}$$

$$9 \cdot 9 = 81$$

$$C_{81}^2 = \frac{81!}{79! \cdot 2!} = \frac{81 \cdot 80}{2} = 81 \cdot 40$$

$$3240 - 16 = 3224$$

$$806 + 8 = 814$$

$$(\sqrt{3}-1)^2 + 2\sqrt{3} - 2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} - 2 = 81 \cdot 10 = 810$$

$$= (2 - 2\sqrt{3})^2 = 4 - 8\sqrt{3} + 12 = C_{17}^2 = \frac{17!}{15! \cdot 2!} = \frac{17 \cdot 16}{2} = 17 \cdot 8 = 136$$

$$\sqrt{3} - 1$$

$$84 \quad 33$$

$$3\sqrt{3} - 3 + 3 = 3\sqrt{3}$$

$$C_{33}^2 = \frac{33!}{31! \cdot 2!} = \frac{33 \cdot 32}{2} = 33 \cdot 16$$

$$\begin{array}{r} \times 33 \\ 16 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$16 - 8\sqrt{3}$$

$$528$$

$$\frac{528}{2} = 264$$

$$3(\sqrt{3}-1)^2 = 3(3 - 2\sqrt{3} + 1) = 12 - 6\sqrt{3} \quad 3240 - 528 = \frac{2712}{4} = 678$$

$$4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = 2^2 = 4$$

$$\boxed{942}$$

$$3\sqrt{3} \quad 4 \quad 12 - 6\sqrt{3}$$

$$4 = 3 \quad \sqrt{\frac{4 - 3\sqrt{3}}{2}} = 2 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 4 + 4\left(2 - 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 + 8 - 6\sqrt{3} = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$4 + 2 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12 - 3\sqrt{3}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

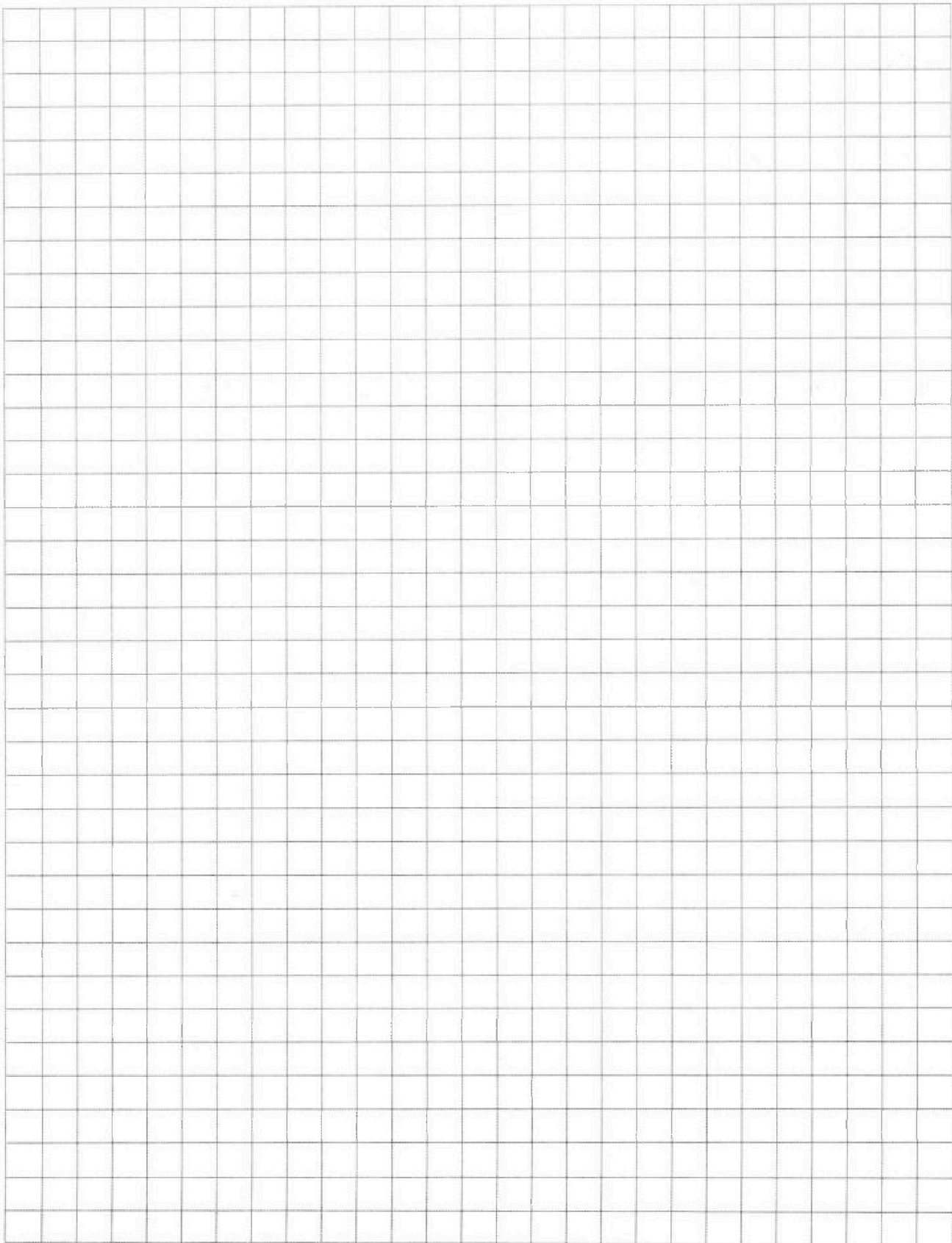
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$MZ = 96 ?$$

$$\frac{AB}{BZ} = \frac{AX}{MZ}$$

$$\frac{BZ + 6}{BZ} = \frac{AX}{MZ}$$

$$\frac{96}{x} = \frac{12}{x + \frac{c}{BZ}}$$

$$\frac{AC}{CY} = \frac{MY}{AX}$$

$$\frac{AC + 6}{AC} = \frac{MZ + 8}{AX} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 12 \\ \hline 48 \\ 24 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$\frac{AX}{MZ} = \frac{BX}{BM}$$

$$\frac{BZ + 6}{BZ} \cdot \frac{4}{3} = \frac{MZ + 8}{MZ}$$

$$\frac{AX}{MY} = \frac{CX}{CM}$$

$$\frac{4}{3} + \frac{24}{3BZ} = 1 + \frac{8}{MZ}$$

$$a - \frac{12 + 3a}{4} = \frac{a - 12}{4}$$

$$\frac{MY}{MZ} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{8}{BZ} = \frac{8}{MZ}$$

$$\frac{MZ + 8}{MZ} = \frac{18}{BZ + 6}$$

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{BZ} = \frac{1}{MZ}$$

$$\frac{12a + 3a^2}{4} = 24 \cdot \frac{a - 12}{4}$$

$$\frac{a + 8}{a} = \frac{18}{b + 6}$$

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{MZ} - \frac{1}{BZ}$$

$$12a + 3a^2 = 24a - 288$$

$$24 \mid 3a^2 - 12a + 288 = 0$$

$$18a = ab + 6a + 8b + 48$$

$$\frac{BZ - MZ}{MZ \cdot BZ} = \frac{1}{24}$$

$$a^2 - 4a + 96 = 0$$

$$12a$$

$$24(a - b) = ab$$

$$ab = 12a - 8b - 48$$

$$24a - 24b = 12a - 8b - 48$$

$$16b - 12a = 48$$

$$b = \frac{12 + 3a}{4}$$

$$4b - 3a = 12$$

$$3a = 12 - 4b \quad a = \frac{12 - 4b}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} U^2 + V^2 = 7 \\ U - V + 5 = 2UV \end{cases}$$

$$6,25 \quad \frac{13}{4}$$

$$2,5 + \dots$$

$$U + 5 = 2UV + V = V(2U + 1) \quad 2,5 - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$V = \frac{U + 5}{2U + 1}$$

$$\frac{10 + \sqrt{160}}{4} = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{2}$$

$$U^2 + \frac{U^2 + 10U + 25}{4U^2 + 4U + 1} = \frac{4U^4 + 4U^3 + 2U^2 + 10U + 25}{4U^2 + 4U + 1} - 7 = 0$$

$$\frac{5 - 2\sqrt{10}}{2}$$

$$4U^4 + 4U^3 + 2U^2 + 10U + 25 - 28U^2 - 28U - 7 = 0 \quad (*)$$

$$\sqrt{6-x} \geq 2$$

$$6-x \geq 4$$

$$x \leq 2$$

$$U \neq -\frac{1}{2}$$

$$100 + 60 = 160$$

$$(*) : 4U^4 + 4U^3 - 26U^2 - 18U + 18 = 0$$

$$x_1 =$$

$$x \leq 2$$

$$8 - 26 - 18 + 18$$

$$64 + 32 - 26 \cdot 4 - 36 + 18$$

$$\frac{5 + \sqrt{13}}{2} =$$

$$4 - 4 - 26 + 18 + 18$$

$$\sqrt{6-x} - 2 \geq 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)}$$

$$x+1 = 6-x - 4\sqrt{6-x} + 4$$

$$(U-V)^2 + U-V = 2$$

$$2x-9 = -4\sqrt{6-x}$$

$$x \leq \frac{9}{2}$$

$$(U-V)(U-V+1) = 2$$

$$4\sqrt{6-x} = 9-2x$$

$$2x \leq 9$$

$$U^2 + V^2 - 2UV + U - V - 2 = 0$$

$$4(6(6-x)) = 81 - 36x + 4x^2 \quad 25 - 12 = 13$$

$$x \geq 3$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$4x^2 - 36x + 16x + 81 - 96 = 0$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$(a+2)(a-1) = 0$$

$$x+1 = 6-x + 2\sqrt{6-x} + 1$$

$$2x-6 = 2\sqrt{6-x}$$

$$\sqrt{6-x} = x-3$$

$$6-x = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\begin{cases} U-V = -2 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2 \end{cases} \quad \sqrt{x+1} = \sqrt{6-x} - 2$$

$$\begin{cases} U-V = 1 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1 \end{cases} \quad \sqrt{x+1} = \sqrt{6-x} + 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(6-y)(x+1) = \frac{D}{4} = 100 - 60 = 40$$

$$x_1 = \frac{10 + 2\sqrt{10}}{4} = \frac{5 + \sqrt{10}}{2} \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

$$x^4 - y^4 + 5x^2 - 5y^2 + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2) + 5(x-y)(x+y) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2) + 5(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y) + 1 = 0$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y} \quad -(x^2 - 5x - 6) \quad 25 + 24 = 49$$

$$x = y$$

$$-1 \quad 6$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} = 2\sqrt{-(x+1)(x-6)} = 2\sqrt{(x+1)(x-6)}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(x-6)} \quad \sqrt{x+1} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(x-6)} + \sqrt{6-x}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(x-6)} - x^2 + 5x + 6 = 0 \quad x+1 + 10\sqrt{x+1} + 25 = 4(x+1)(x-6) + 4$$

$$D = 25 + 24 = 49 \quad \sqrt{(x+1)(x-6)(6-x)} + 6 - x$$

$$\frac{-5 + \sqrt{49}}{-2} = \frac{-5 + 7}{-2} = -1 \quad U^2 + V^2 = 7$$

$$\frac{-5 - \sqrt{49}}{-2} = \frac{-5 - 7}{-2} = 6 \quad U - V + 5 = 20V$$

$$U^2 - 20V + V^2 = 2 + V - U$$

$$(U - V)^2 + U - V = 2$$

$$U = \sqrt{x+1}$$

$$V = \sqrt{6-x}$$

$$U^2 + 20V$$

$$U^2 + V^2 = 7$$

$$U + V + 5 = 20V$$

$$U + V + 5 = 20 \cdot V$$

$$-x^2 + 5x + 6 = -(x^2 - 5x - 6) =$$

$$U^2 - 20V + V^2 = 2 - U - V$$

$$(U - V)^2 = 2 - U - V$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -3 \leq x-3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$3x \leq y+1$$

$$3y-3 \leq x \leq \frac{y+1}{3}$$

$$9y-9 \leq y+1$$

$$8y \leq 10$$

$$4y \leq 5$$

$$4y+8x \leq 11$$

$$y = \frac{3}{4}$$

$$x = 1$$

~~$$-3 \leq 3y-x \leq 3$$~~

$$\begin{cases} -3 \leq 3y-x \leq 3 \\ -1 \leq y-3x \leq 1 \end{cases}$$

$$x-3 \leq 3y \leq 3x+1$$

$$3x-1 \leq y \leq \frac{x+3}{3}$$

$$9x-3 \leq x+3$$

$$8x \leq 6$$

$$\frac{x-3}{3}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$3y \geq x-3$$

$$y \leq 3x+1$$

$$\leq 3x+1$$

$$y \leq 3x+1$$

$$\left| 1 - \frac{9}{4} \right| = \left| \frac{4}{4} - \frac{9}{4} \right| = \frac{5}{4}$$

$$3y \geq x-3$$

$$\left| 3 - \frac{3}{4} \right| = \frac{12}{4} - 3 = 3$$

$$y \geq 3x-1$$

$$\left| \frac{7}{8} - 3 \right| = \left| \frac{7}{8} - \frac{24}{8} \right| = \frac{17}{8} \leq 3$$

$$3y \leq x+3$$

$$9x-3 \leq x+3$$

$$\left| \frac{21}{8} - 1 \right| =$$

$$\left| \frac{3}{4} - \frac{15}{4} \right| = 3 \leq 3$$

$$8x \leq 6$$

$$8 \cdot \frac{3}{4} = 6$$

$$4 \cdot \frac{5}{4} = 5 \quad \left| \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \right| = 1 \leq 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{4a+32}{3a} = 1 + \frac{6}{b} \quad (\Rightarrow) & \frac{a+32}{3a} = \frac{6}{b} \\ \frac{8}{a} = \frac{b-12}{18} & \frac{8}{a} = \frac{b-12}{18} \end{cases}$$

$$18a = ab + 32b$$

$$ab - 12a = 144$$

$$ab = 144 + 12a$$

$$18a = 144 + 12a + 32b$$

$$6a = 144 + 32b$$

$$3a = 72 + 16b$$

$$a = \frac{72 + 16b}{3}$$

$$\frac{24}{72 + 16b} = \frac{b-12}{18}$$

$$24 \cdot 18 = 72b - 12 \cdot 72 + 16b^2 - 16 \cdot 12b$$

$$16b^2 - 120b - 1296 = 0$$

$$4b^2 - 30b - 324 = 0$$

$$2b^2 - 15b - 162 = 0$$

$$225 + 4 \cdot 2 \cdot 162 = 225 + 1296 = 1521 = 39^2$$

$$b = \frac{15 + 39}{4} = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$$

$$a = \frac{72 + 8 \cdot \frac{27}{2}}{3} = \frac{72 + 216}{3} = \frac{288}{3} = 96$$

$140 : 5 = 28 \cdot 3 = 84$
 $315 : 5 = 63$
 $30 \cdot 18 = 540$
 $1521 = \frac{21 \cdot 21}{3 \cdot 3}$

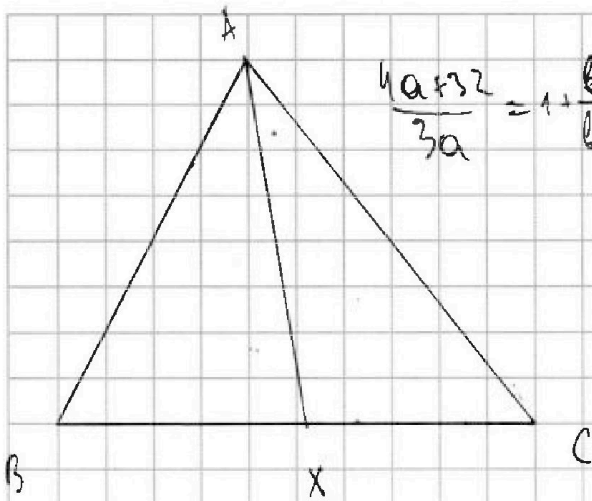


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

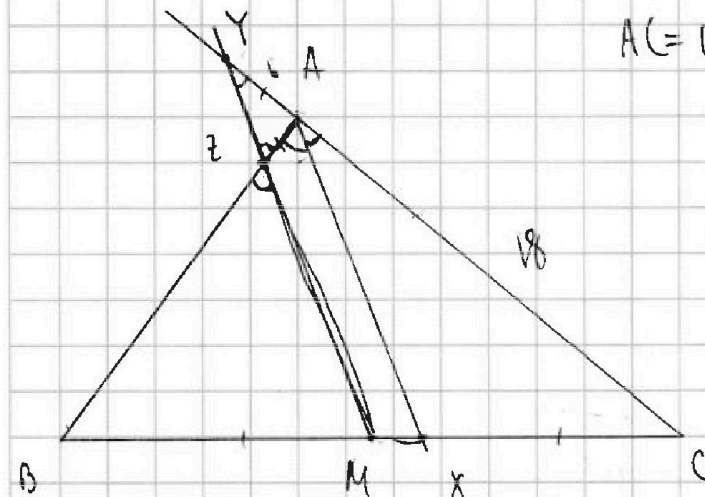
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{4a+3z}{3a} = 1 + \frac{6}{a}$$

$$\begin{aligned} 4MZ+8 & \quad 4MZ+3z=3AX \\ \hline 4 \cdot 96+3z & = \frac{3 \cdot 96}{3} \\ 384+3z & = 384 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6, 16, 18 \quad b^2 &= c^2 \\ b^2 &= 8^2 + 6^2 - 2 \cos \alpha \cdot 8 \cdot 6 \\ 2 \cos \alpha \cdot 6 \cdot 8 &= 8^2 - 6^2 \\ 3 \cos \alpha &= 2 \end{aligned}$$



$$AC=18 \quad AZ=6 \quad YZ=8$$

$$\frac{AX}{MZ} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \quad \cos \alpha = \frac{2}{3} \quad \frac{MZ+8}{AX} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{BZ}{AB} = \frac{MZ}{AX} \quad \frac{AX}{MZ} = \frac{BZ+6}{BZ}$$

$$\frac{4MZ+3z}{3MZ} = 1 + \frac{6}{BZ}$$

$$\frac{BZ}{AB} = \frac{BM}{BX}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{CX}$$

$$\frac{AX}{MZ} = \frac{CX}{CM} = \frac{8}{MZ}$$

$$BX = \frac{AB \cdot CX}{AC}$$

$$\frac{AX}{MZ} = \frac{BX}{BM}$$

$$\frac{BZ}{AB} = \frac{BM \cdot AC}{AB \cdot CX}$$

$$BZ = \frac{BM \cdot AC}{CX}$$

$$\frac{MZ}{MZ} = \frac{CX}{BX} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{8}{MZ} = \frac{AB-8}{18}$$

$$\frac{MZ+8}{MZ} = \frac{AB}{18} = \frac{BZ+6}{18}$$

$$1 + \frac{8}{MZ} = \frac{AB}{18}$$

$$\frac{8}{MZ} = \frac{BZ-12}{18}$$