



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

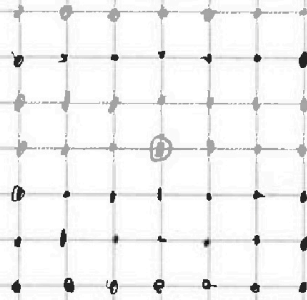
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1.

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№1. } a_4 = 6 - 9x$$

$$a_6 = (x^2 - 2x)^2$$

$$a_{10} = 9x^2$$



~~XXXXXXXXXX~~

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - 2x)^2 - 6 + 9x}{2} = \frac{9x^2 - (x^2 - 2x)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 2x)^2 - 12 + 18x}{4} = \frac{9x^2 - (x^2 - 2x)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 2x)^2 - 12 - 9x^2 + 18x = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 4 - 3x^2 + 6x = 0.$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 - 3x^2 + 6x = 0.$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0.$$

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0.$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ или } x^2 - 2x - 4 = 0.$$

$$D = 4 + 16 = 20$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Ответ: 1 или $1 + \sqrt{5}$ или $1 - \sqrt{5}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y-2 \leq x \leq 2y+2 \\ 2x-1 \leq y \leq 2x+1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y \geq 2(x+y) - 3 \\ \Leftrightarrow \{x+y\} \leq 3.$$

$$x \geq 2y-2 \geq 2(2x-1)-2 = 4x-2-2 = 4x-4$$

$$\Rightarrow 3x \leq 4.$$

$$3x+3y \leq 9$$

$$\Rightarrow 6x+3y \leq 13. \quad - \text{Оценка}$$

$$\text{Пусть } x = \frac{4}{3}, y = \frac{5}{3}: \quad - \text{Пример.}$$

$$6x+3y = 13.$$

$$\begin{cases} |x-2y| = \left| \frac{4}{3} - \frac{10}{3} \right| = \left| -\frac{6}{3} \right| = 2 \leq 2. \\ |2x-y| = \left| \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{3}{3} \right| = 1 \leq 1. \end{cases}$$

\Rightarrow Наибольшее значение выражения $6x+3y$ - 13.

Ответ: 13.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 \leq 4 \\ (2x-y)^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4 \leq 0. \quad (1)$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 - 1 \leq 0. \quad (2)$$

Решим нерав-во (1) отн. x :

$$D = 16y^2 - 4(4y^2 - 4) = 16.$$

$$x_{1,2} = \frac{4y \pm 4}{2} = 2y \pm 2.$$

$$\Rightarrow 2y-2 \leq x \leq 2y+2.$$

Решим нерав-во (2) отн. y :

$$D = 16x^2 - 4(4x^2 - 1) = 4.$$

$$y_{1,2} = \frac{4x \pm 2}{2} = 2x \pm 1.$$

$$\Rightarrow 2x-1 \leq y \leq 2x+1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$$

$$1) A = 75q^2, B = 11p^2$$

$$A = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

Заметим, что $m+2n$ и $m+2n-7$ — разные четности \Rightarrow

$$\Rightarrow A : 2 \Rightarrow 75q^2 : 2 \Rightarrow q = 2.$$

$$m+2n = x.$$

$$x(x-7) = 75 \cdot 4 = 300.$$

$$x^2 - 7x - 300 = 0$$

$$D = 49 + 1200 = 1249.$$

Заметим, что 1249 — не квадрат натурального числа.

$$\Rightarrow x \notin \mathbb{N} \Rightarrow m+2n \notin \mathbb{N} \Rightarrow \emptyset.$$

$$2) A = 11p^2.$$

$$B = 75q^2.$$

$$A : 2 \Rightarrow p = 2.$$

$$m+2n = t.$$

$$t(t-7) = 11 \cdot 2^2 = 44.$$

$$t^2 - 7t - 44 = 0$$

$$(t-11)(t+4) = 0.$$

$$t = 11, t = -4$$

\downarrow
н.к. $t \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow t = 11. \Rightarrow m+2n = 11.$$

$$B = mn(m+2n+9) = mn(11+9) = 20mn = 75q^2.$$

$$\Rightarrow 75q^2 : 2 \Rightarrow q = 2.$$

$$\Rightarrow 20mn = 75 \cdot 4.$$

$$20mn = 300.$$

$$\Rightarrow mn = 15. \left. \begin{array}{l} \\ m+2n = 11 \end{array} \right\} m, n \in \mathbb{N}.$$

$$m = 11 - 2n.$$

$$(11 - 2n)n = 15.$$

$$2n^2 - 11n + 15 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot 15 \cdot 2 = 1.$$

$$n = \frac{11 \pm 1}{4} = 3 \text{ или } 2,5$$

\downarrow
 $\emptyset.$

~~$$I. n = 6.$$~~

~~$$\Rightarrow m = \frac{15}{6} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \emptyset.$$~~

~~$$II. n = 5.$$~~

~~$$\Rightarrow m = 3.$$~~

$$\Rightarrow n = 3 \Rightarrow m = 5.$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } (5; 3).$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$YZ^2 = AY^2 + AZ^2 - 2AY \cdot AZ \cos(180^\circ - 2\alpha)$$

$$16 = 9 + 9 - 18 \cos(180^\circ - 2\alpha)$$

$$\Rightarrow 18 \cos(180^\circ - 2\alpha) = 2.$$

$$\cos(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{9}.$$

$$\Rightarrow \cos(2\alpha) = -\frac{1}{9}.$$

7) По теореме косинусов в $\triangle CAB$:

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(2\alpha)$$

$$BC^2 = 36 + 144 + 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9} = 36 + 144 + 2 \cdot 2 \cdot 6 =$$

$$= 180 + 16 = 196.$$

$$BC = 14.$$

Ответ: $BC = 14$.



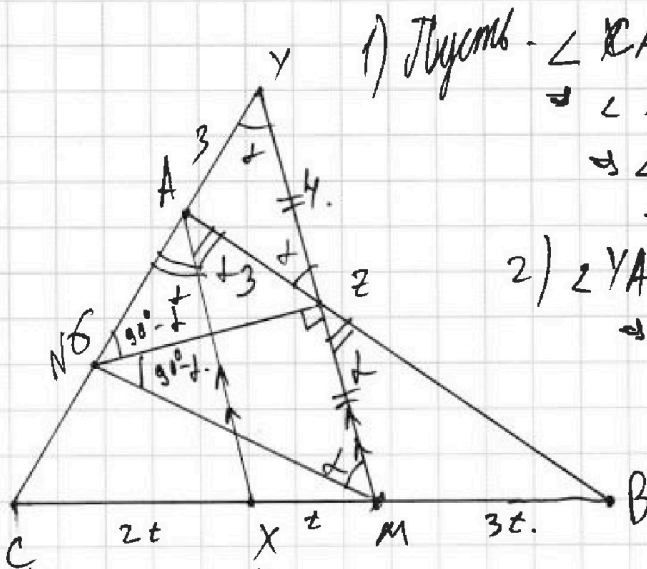
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 4.



1) Пусть $\angle CAB = 2\alpha$.

$$\Rightarrow \angle XAB = \angle XAC = \alpha.$$

$$\Rightarrow \angle AZB = \alpha.$$

$$\Rightarrow \angle AZY = \alpha.$$

2) $\angle YAZ = 180^\circ - 2\alpha$.

$$\Rightarrow \angle AYZ = \alpha = \angle AZY.$$

$$\Rightarrow AZ = AY.$$

$$\Rightarrow AY = 3.$$

3) По теореме Менелая:

$$\frac{BM}{BC} \cdot \frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{YZ}{ZM} = 1 \Rightarrow YZ = ZM.$$

4) Пусть $N \in AC$, $NZ \perp YM$.

$$\Rightarrow NZ \perp YM, YZ = ZM \Rightarrow NY = NM, \angle ZMN = \alpha$$

$$\Rightarrow \angle YMN = \angle YZA \Rightarrow MN \parallel AZ. \Rightarrow \text{т.к. } YZ = ZM, \text{ то}$$

$$YN = AN = 3. \Rightarrow NC = 3 = AN.$$

5) $AX \parallel YM \Rightarrow \frac{CA}{AY} = \frac{CX}{XM} \Rightarrow CX = 2XM.$

$$\Rightarrow \frac{CX}{XM} = 2 \Rightarrow \frac{CX}{XB} = \frac{1}{2}, \text{ т.к. } AX - \text{бис-са, то}$$

$$\frac{CX}{XB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = 12.$$

6) По теореме косинусов в $\triangle YAZ$:

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$x = -2 \in \emptyset$~~ , м.к. $\sqrt{2x}$ — не определено.

~~$x = 7$:~~

Подставим $x = 7$
 $3 - 0 + 7 = 0$
 $10 = 0 \in \emptyset$

2) $a = -2$.

$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = -2$

$\sqrt{x+2} = \sqrt{7-x} - 2$

$x+2 = 7-x+4 - 4\sqrt{7-x}$

$2x+2-4-7 = -4\sqrt{7-x}$

$2x-9 = -4\sqrt{7-x}$

$9-2x = 4\sqrt{7-x}$

$81 - 36x + 4x^2 = 16(7-x)$

$4x^2 - 36x + 16x + 81 - 112 = 0$

$4x^2 - 20x - 31 = 0$

$D = 400 + 16 \cdot 31 = 400 + 496 = 896$

$x = \frac{20 \pm \sqrt{896}}{8}$ 1) $x = \frac{20 - \sqrt{896}}{8} < 0$

Ответ: \emptyset , м.к. $\sqrt{2x}$ не определено.
 2) $x = \frac{20 + \sqrt{896}}{8} > 24$

$\Rightarrow \sqrt{7-x}$ — не определено.

Ответ: $\left(\frac{5 + \sqrt{11}}{2}, \frac{5 + \sqrt{11}}{2} \right), \left(\frac{5 - \sqrt{11}}{2}, \frac{5 - \sqrt{11}}{2} \right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2\sqrt{(x+2)(7-x)} = -(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 + 9$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = -(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 + 9$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = a$$

$$a + 7 = -a^2 + 9$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a-1)(a+2) = 0$$

1) $a = 1$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 1$$

$$\sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{7-x}$$

$$x+2 = 1 + 2\sqrt{7-x} + 7-x$$

$$2x+2-1-7 = 2\sqrt{7-x}$$

$$2x-6 = 2\sqrt{7-x}$$

$$x-3 = \sqrt{7-x}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 7 - x$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 17$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

При обоих значениях x значение выражения определено.

2) $a = 3$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 3$$

$$x+2-7-x-2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 9$$

$$\sqrt{(x+2)(7-x)} = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ или } x = 7$$

~~Handwritten scribbles and calculations, including the quadratic formula for the second case.~~

~~Handwritten scribbles and calculations, including the final answer for the second case.~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3+3x-\sqrt{2y} = y^3-\sqrt{2x}+3y \end{cases} \Leftrightarrow x^3+3x+\sqrt{2x} = y^3+3y+\sqrt{2y}$$

$$x^3-y^3+3(x-y)+\sqrt{2x}-\sqrt{2y} = 0.$$

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + 3\sqrt{x} \cdot (x^2+xy+y^2) + 3(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \sqrt{2} \dots = \\ & = (\sqrt{x}-\sqrt{y})((\sqrt{x}+\sqrt{y})(x^2+xy+y^2) + 3(\sqrt{x}+\sqrt{y}) + \sqrt{2}) = 0. \end{aligned}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y}.$$

$$x = y.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 &= 2\sqrt{14+5x-x^2} = \\ &= 2\sqrt{(x+2)(7-x)}. \end{aligned}$$

$$x+2+7-x-2\sqrt{(x+2)(7-x)} = 4(x+2)(7-x)$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(x+2)(7-x)} =$$

$$a^2 + a - 2 = 0. \quad = -(\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x})^2 + 9$$

$$D = 1 + 8 = 9.$$

$$\frac{-1 \pm 3}{2} = 1 - 2 \sqrt{(x+2)(7-x)} =$$

$$a + 7 = -a^2 + 9.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^2+3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3 - y^3 + 3x - 3y + \sqrt{2x} - \sqrt{2y} = 0$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2) + 3(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left((\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + xy + y^2) + 3(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{2} \right) = 0$$

Вторая $x^2 + xy + y^2$

$$D = y^2 - 4y^2 \leq 0, \text{ если } D = 0, \text{ то } y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + xy + y^2 = x^2 \geq 0$$

$$\text{если } D < 0, \text{ то } x^2 + xy + y^2 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 + xy + y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{Вторая скобка } > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}$$

~~$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} = 2\sqrt{(x+2)(7-x)}$$~~

~~$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{(x+2)(7-x)}$$~~

~~$$a - b + 7 = 2ab$$~~

~~$$a + 7 = b(2a + 1) \Rightarrow b = \frac{a+7}{2a+1}$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

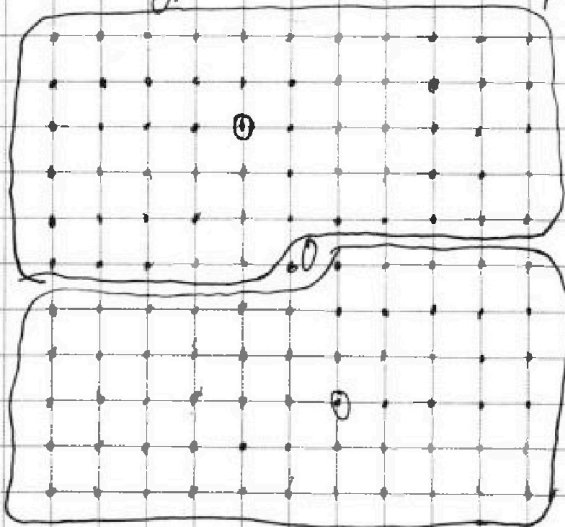
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пару точек

Заметим, что если точка в паре не симметрична относительно центра квадрата, то при поворотах этой пары на $360^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ и 270° (а это все возможные повороты) мы получим 4 разные пары раскраски.

пары раскраски

Рассмотрим пары точек, симметричные относительно центра квадрата. При поворотах её на $360^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$



мы получим лишь две различные раскраски.

Таким образом, (в общем) 60 (берем точку

и из нижней обведенной половины и зеркально отобразим симметрично). Т.к. поворачивая получаем две разные, то среди них $\frac{60}{2}$ - различные.

Всего раскрасок $\binom{12}{2}$

\Rightarrow Несимметричных $\binom{12}{2} - 60$. Поворачивая несимметричную получаем 4 разные \Rightarrow среди них



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\binom{121}{2} - 60}{4} \text{ раскрасок.}$$

⇒ ~~Всего~~ всего раскрасок -

$$- \frac{\binom{121}{2} - 60}{4} + \frac{60}{2} = \frac{\binom{121}{2} + 60}{4} =$$

$$= \frac{\frac{120 \cdot 121}{2} + 60}{4} = \frac{60 \cdot 121 + 60}{4} = \frac{60 \cdot 122}{4} =$$

$$= 30 \cdot 61 = 1830 \text{ раскрасок.}$$

Ответ: 1830 раскрасок.

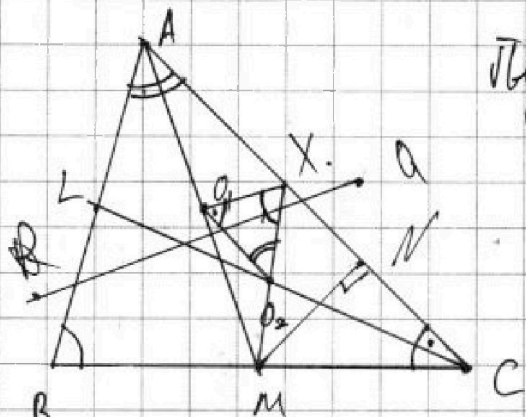


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть O_1 - середина AM ,
 O_2 - середина CL .
 $\Rightarrow O_1, O_2$ - линия центров Ω и ω ,
а PQ - их рад. ось.

$\Rightarrow O_1, O_2 \perp PQ$, но из условия задачи $PQ \parallel$ высоте из B
 $\Rightarrow PQ \perp AC$.

$\Rightarrow PQ \perp AC, PQ \perp O_1, O_2 \Rightarrow O_1, O_2 \parallel AC$.

Пусть $X = MO_2 \cap AC$.

MO_2 - средн. линия $\triangle LCB \Rightarrow XM \parallel AB \Rightarrow XM$ - средняя-
линия $\triangle BCA \Rightarrow X$ - середина AC .

$\Rightarrow XO_1 \parallel BC$, как ср. линия.

$\Rightarrow XO_2 \parallel AB$, и $O_1, O_2 \parallel AC$.

$XO_1 \parallel BC, XO_2 \parallel AB, O_1, O_2 \parallel AC$

$\Rightarrow \triangle XO_1O_2 \sim \triangle BCA$.

Заметим, что: $XO_1 = \frac{MC}{2} = \frac{BC}{4}$, но $\frac{XO_1}{BC} = \frac{XO_2}{AB}$

$\Rightarrow XO_2 = \frac{AB}{4}$. Но $XO_2 = \frac{AL}{2} \Rightarrow AL = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow L$ - середина $AB \Rightarrow CL$ - медиана, бис-са. \Rightarrow

$\Rightarrow \triangle BAC$ - равнобедр., $AC = BC$.

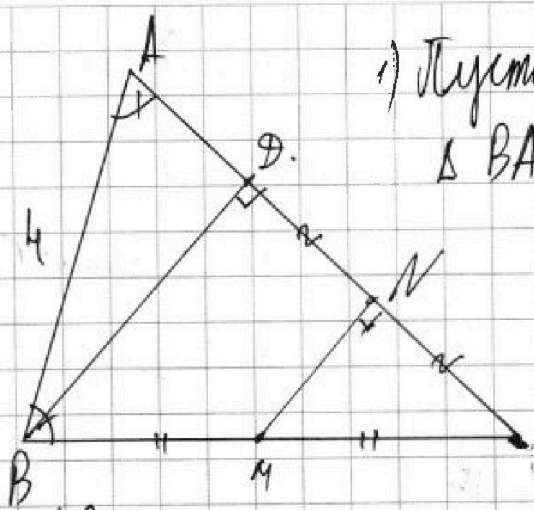
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть BD - высота из B в $\triangle BAC$.

2) $\angle ANM = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр.

$\Rightarrow MN \parallel BD$.

$\Rightarrow DN = NC$, т.к. $BM = MC$.

Пусть $AC = x$. $\Rightarrow NC = x - 5$.
 $\Rightarrow DC = 2x - 10$
 $\Rightarrow AD = 10 - x$.

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 = DC^2 \quad BC = AC = x$$

$$\left. \begin{aligned} BD^2 &= AB^2 - AD^2 \\ BD^2 &= CB^2 - CD^2 \end{aligned} \right\} \text{из т. Пифагора}$$

$$\Rightarrow AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2$$

$$4^2 - (10 - x)^2 = x^2 - (2x - 10)^2$$

$$16 - 100 + 20x - x^2 = x^2 - 4x^2 + 40x - 100$$

$$2x^2 - 20x + 16 = 0$$

$$x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$D = 100 - 4 \cdot 8 = 100 - 32 = 68$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{68}}{2} = 5 \pm \sqrt{17}$$

1) $x = 5 - \sqrt{17} < 1$.

$\Rightarrow AC + BC < 2 < 4$.

$\triangle C$ не существует.

$\Rightarrow x = 5 + \sqrt{17}$.

Ответ: $AC = BC = 5 + \sqrt{17}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(m, n). \quad A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn = mn(m+2n+9)$$

$$1) (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 \quad 11p^2 \quad 11p^2$$

$$mn(m+2n+9) = 75q^2$$

$$x(x-7) = 11p^2$$

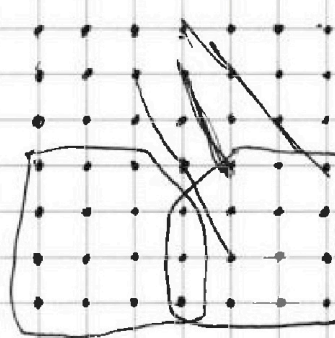
ii. $x \cdot n. \quad p=2.$

$$x(x-7) = 44$$

$$x^2 - 7x - 44 = 0$$

$$(x-11)(x+4)$$

$$x=11 \Rightarrow m+2n=11$$



11²

(12 1)
2

(12 1)
2

$$20mn = 75q^2$$

$$q=2$$

$$20mn = 75 \cdot 4 = 15 \cdot 5 \cdot 4$$

$$mn = 15$$

$$m+2n=11 \Rightarrow m=11-2n, (11-2n)n=15$$

$$11n-2n^2=15$$

13 69

$$2n^2 - 11n + 15 = 0$$

$$D = 121 - 120 = 1$$

$$\frac{11 \pm 1}{2} = x_{1,2} = 5, 3$$

$$m=5, n=3 \quad \boxed{n=5, m=6}$$

$$5 \cdot 11 + 5$$

00

$$20mn = 75 \cdot 4 = 15 \cdot 5 \cdot 4$$

$$mn = 15$$

$$m+2n=11 \Rightarrow m=11-2n, (11-2n)n=15$$

$$11n-2n^2=15$$

13 69

$$2n^2 - 11n + 15 = 0$$

$$D = 121 - 120 = 1$$

$$\frac{11 \pm 1}{2} = x_{1,2} = 5, 3$$

$$m=5, n=3 \quad \boxed{n=5, m=6}$$

$$2) (m+2n)(m+2n-7) \Rightarrow 5q^2$$

$$mn(m+2n+9) = 11p^2$$

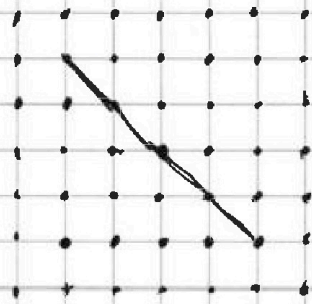
$$q=2$$

$$x(x-7) = 300$$

$$x^2 - 7x - 300 = 0$$

$$49 + 1200 = 1249$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 37 \\ \hline 259 \end{array}$$



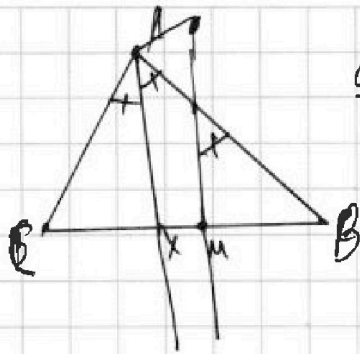


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

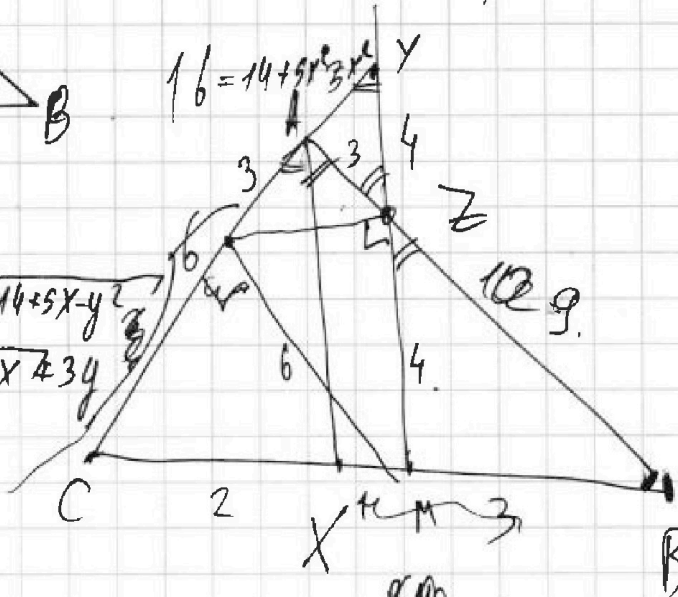
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$g - 2\sqrt{14+5x-y^2} = 1$$

$$16 = 14 + 5x - y^2$$



$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2} \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y \end{cases}$$

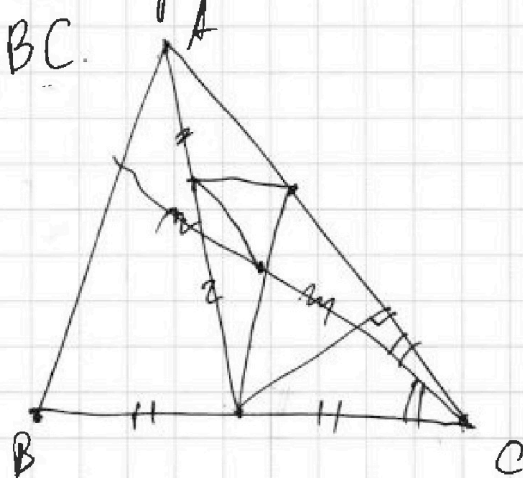
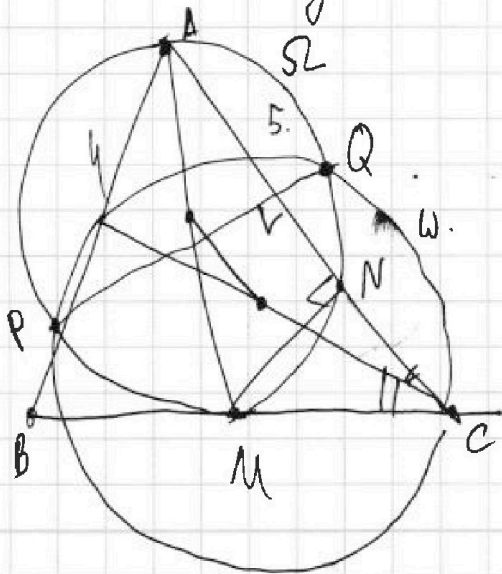
$$\begin{aligned} x^3 + \sqrt{2x} + 3x &= \\ &= y^3 + \sqrt{2y} + 3y. \end{aligned}$$

$$\frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CX}{CM} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}$$

AC, BC.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

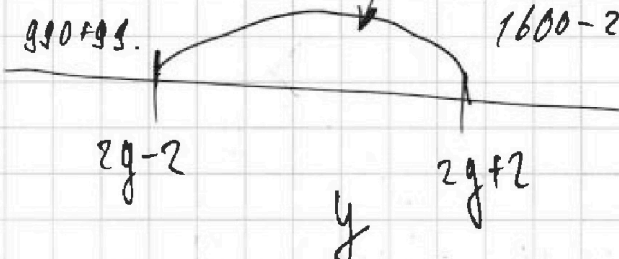
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

33-33 $(10-3)^2 = 1600 - 240 + 9$

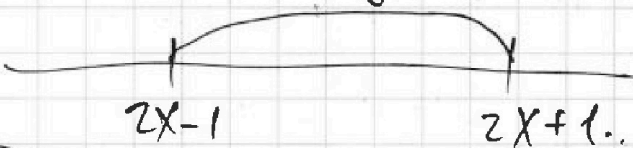
$x \leq 2y + 2 \leq$

990+99



$1600 - 231 \leq 4x + 4$

$\therefore 3x \geq 16 - (10-x)^2 = x^2 - (2x-10)^2$



$16 \cdot 496 \cdot 3x \leq 4$

$480 + 16 \cdot x + y \leq 3$

$16 - 100 + 20x - x^2 = x^2 - 4x^2 + 10x - 100$

$3x + 3y \leq 9$

$2y - 2 \leq x \leq 2y + 2$

$x \geq 2y - 2 \geq$

$2x + 1 \leq y \leq 2x + 1$

$\geq 2(2x - 1) - 2 = 4x - 4$

$2x^2 - 20x + 16 = 0$

$x \geq 4x - 4$

$x^2 - 10x + 8 = 0$

$3 \geq x + y$

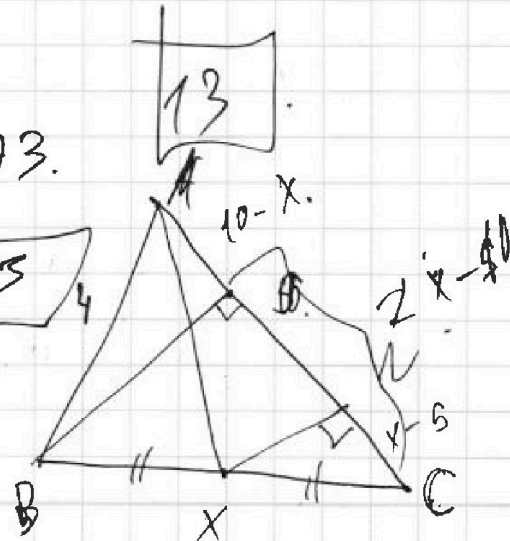
$3y + 6x = 13$

$x = \frac{4}{3}$

$x + y \leq 2(x + y) + 3$

$y = \frac{5}{3}$

$x + y \geq -3$



~~11~~
~~12~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2(x-1)^2 - 2x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

||

~~3x + 20x~~

$$x^4 - x^3 - 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 6x + 4x - 4 =$$

$$\frac{4y \pm 4}{2}$$

$$x = (x-1)x^3 - 3x^2(x-1) - 2x(x-1) + 4(x-1) =$$

$$= (x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) =$$

$$= (x-1)(x^3 - x^2 - 2x^2 + 4x - 4) =$$

$$= (x-1)((x-1)x^2 - 2x(x-1) - 4(x-1)) =$$

$$= (x-1)^2(x^2 - 2x - 4).$$

$$D = 4 + 16.$$

$$2y - 2$$

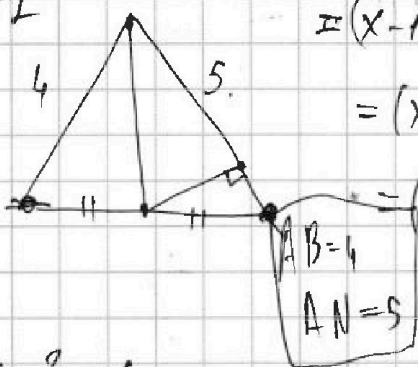
$$2y + 2$$

$$|x - 2y| \leq 2.$$

$$|2x - y| \leq 1.$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 \leq 4.$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 \leq 1.$$



$$D_1 = 16y^2 - 4(4y^2 - 4) = 16.$$

$$3y + 6x$$

$$D_2 = 16y^2 - 4y^2 + 4 = 12y^2 + 4.$$

$$1 \quad x^2 - 4xy + 4y^2 - 4 \leq 0.$$

$$2 \quad 4x^2 - 4xy + y^2 - 1 \leq 0.$$

$$\frac{4x \pm 2}{2}$$

$$y^2 - 4yx + 4x^2 - 1 \leq 0$$

$$D_2 = 16x^2 - 16x^2 + 4 = 4$$