



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a_1 - 1-й член арифм. прогрессии

$$a_3 = 3x + 3$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$\Rightarrow a_5 - a_3 = (a_1 + 4d) - (a_1 + 2d) = 2d, \text{ где } d - \text{разность арифм. прогр.}$$

$$a_9 - a_5 = (a_1 + 8d) - (a_1 + 4d) = 4d.$$

и

$$2(a_9 - a_5) = a_9 - a_3$$

$$2((x^2 + 2x)^2 - 3x - 3) = 3x^2 - (x^2 + 2x)^2$$

$$2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6 = 3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2$$

$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$(x+1)(3x^3 + 9x^2 - 6) = 0$$

$$(x+1)(x+1)(3x^2 + 6x - 6) = 0$$

$$(x+1)^2(3x^2 + 6x - 6) \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+18}}{3} = \frac{-3 \pm \sqrt{27}}{3} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{3} = -1 \pm \sqrt{3}$$

и

либо $x = 1$

либо $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$

$$x_i \begin{cases} x = 2 - 1 \\ x = \sqrt{3} - 1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: либо $x = -1$

либо $x = \sqrt{3} - 1$

либо $x = -1 - \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

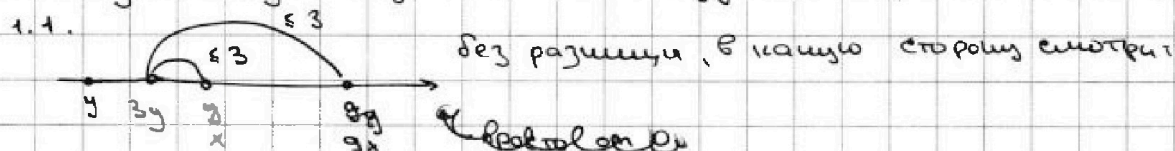
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 3|3x-y| \leq 3 \Rightarrow |9x-3y| \leq 3.$$

1 случай. $3y$ находится не между x и $9x$ на числ. прямой



$|9x-x| \leq 3$, т.к. смотрим на расстояние

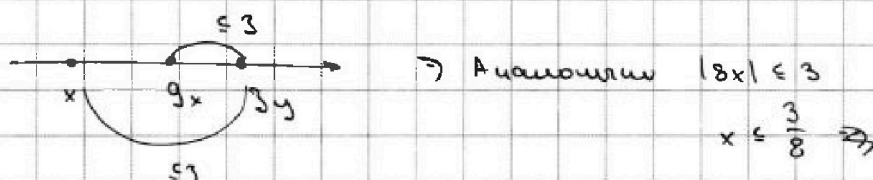
$$|8x| \leq 3$$

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3y-x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ 3y-x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ 3y \leq 4-x \end{cases} \Rightarrow y \leq \frac{4-x}{3}$$

$$4y+8x \leq \frac{4 \cdot 9}{8} + \frac{3 \cdot 8}{8} = \frac{9}{2} + 3 = \frac{15}{2}$$

1.2



В обоих случаях $x \leq \frac{3}{8} \Rightarrow 3x \leq \frac{9}{8} \Rightarrow |3x-y| \leq 1$

Однако $|x-3y| \leq 3 \Rightarrow 3y \leq 3 \Rightarrow y \leq 1$

$|x-3y| \leq 3 \Rightarrow x$ больше $3y$ ① т.к. при $x < 0$, $9x < 3y < 0$

$|3y-x| \leq 1 \Rightarrow y \leq \frac{3+x}{3} = \frac{3}{3} + \frac{x}{3} = 1 + \frac{x}{3}$ ②

① x больше $3y \Rightarrow 3x$ больше y .

$$x \leq \frac{3}{8}$$

$$3x-y \leq 1 \Rightarrow y \leq \frac{1}{8} \Rightarrow 4y+8x \leq \frac{4}{8} + \frac{3}{8} \cdot 8 = \frac{7}{2}$$

② $4y+8x \leq$

$$\leq 4 \cdot \frac{9}{8} + \frac{3}{8} \cdot 8 = \frac{15}{2}$$



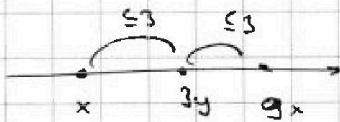
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Однако если $3y$ между x и $9x$



$$\Rightarrow |9x - x| \leq 6$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3y - x \leq 3 \Rightarrow y \leq \frac{3+x}{3} = \frac{3+\frac{3}{4}}{3} = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 4y + 8x \leq 4 \cdot \frac{5}{4} + 8 \cdot \frac{3}{4} = 5 + 6 = 11$$

$y \leq \frac{5}{4}$ — самая сильная оценка из всех прошлых

Пример: $x = \frac{3}{4}$
 $y = \frac{5}{4}$

$$|x - 3y| = \left| \frac{3}{4} - \frac{15}{4} \right| = 3 \leq 3 \quad (+) \text{ подходит.}$$

$$|3x - y| = \left| \frac{9}{4} - \frac{5}{4} \right| = 1 \leq 1 \quad (+) \text{ подходит}$$

— max значение $8x + 4y = 11$, достигаемое при $x = \frac{3}{4}$ и $y = \frac{5}{4}$

Ответ: "



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Одно из чисел = $13p^2$, а другое $75q^2$
 p, q - простые

1 случай.

$$A = 13p^2$$

$$B = 75q^2$$

1 вариант. $\begin{cases} m+n = 13 \\ m+n-9 = p^2 \end{cases} \Rightarrow 9 = 13 - p^2$

$$p^2 = 4 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow m+n = 3 = 10$$

$$m = \frac{75q^2}{10}, \text{ м.к. } m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\frac{75q^2}{10} \in \mathbb{N} \Rightarrow q^2 : 2, \text{ но м.к.}$$

$$q\text{-простое} \Rightarrow q = 2$$

$$mn = \frac{75 \cdot 4}{10} = 30, \text{ н.ч. } m > n.$$

$$m+n = 13 \Rightarrow m-n = \sqrt{13^2 - 4 \cdot 30}$$

$$\sqrt{(m+n)^2 - 4mn}$$

$$m-n = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2m = 20 \\ 2n = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 3 \end{cases}$$

вместе и сложим

простое \oplus

подходит \oplus (10, 3) и (3, 10)

3 вариант. $\begin{cases} m+n = 13p^2 \\ m+n-9 = 1 \end{cases}$

$$m+n = 10 \Rightarrow 10 = 13p^2$$

$$p^2 = \frac{10}{13} \ominus, \text{ м.к. } p \geq 1$$

4 вариант: $\begin{cases} m+n = p^2 \\ m+n-9 = 13 \end{cases}$

$$9 = p^2 - 13 \Rightarrow p^2 = 22 \Rightarrow p = \sqrt{22} \ominus, \text{ м.к. } p \in \mathbb{N}$$

5 вариант: $\begin{cases} m+n = p \\ m+n-9 = 13p \end{cases} \Rightarrow 9 = p - 13p$

$$p = -\frac{3}{4} \ominus, \text{ м.к. } p \geq 1$$

6 вариант:

$$\begin{cases} m+n = 1 \\ m+n-9 = 13p^2 \end{cases}$$

$$9 = 1 - 13p^2$$

$$p^2 = -\frac{8}{13} \ominus, \text{ м.к. } p^2 \geq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Больше вариантов в этом случае нет, т.к. мы можем распределить просте между двумя свободными машинами образам

2 случай

$$A = 75q^2$$

$$B = 13p^2$$

$$\Rightarrow mn(m+n-3) = 13p^2$$

1 вариант

$$m = n = p$$

$$m+n-3 = 13$$

$$\Rightarrow 2p-3 = 13$$

$$p = 8 \ominus, \text{ т.к. } p - \text{ простое}$$

2 вариант.

кНО (м.к. м.и. n
мет. Риччи

$$m = m+n-3 = p.$$

$$n = 13 \Rightarrow$$

$$p = 13 - 3 = p.$$

$$10 = 0 \ominus$$

нет подходит

3 вариант:

Один множитель — это 1

Одно число кНО $m=1$

$$n(n-2) = 13p^2 \Rightarrow$$

3.1. $n=13$

$$n-2 = 13p^2 \Rightarrow$$

$$2 = 13 - p^2$$

$$p^2 = 9$$

$$p = 3.$$

3.2. $n=p$

$$n-2 = 13p$$

\Rightarrow

$$2 = p - 13p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = -\frac{1}{6} \ominus$$

$p \in \mathbb{N}$

3.3. $n=13p$

$$n-2 = p$$

$$2 = 12p \Rightarrow p = \frac{1}{6}$$

\ominus т.к. $p \in \mathbb{N}$

$$m=1$$

$$p=3$$

$$n=13$$

$$\Rightarrow A = 14 \cdot 5 = 75q^2$$

$$14 = 15q^2 \ominus,$$

т.к. $14 \neq 15$

3.4. $n=13p^2$

$$n-2 = 1$$

\Rightarrow

$$2 = 13p^2 - 1 \Rightarrow 13p^2 = 3 \Rightarrow p = \sqrt{\frac{3}{13}}$$

\ominus т.к. $p \in \mathbb{N}$

3.5. $n=p^2$

$$n-2 = 13$$

$$\Rightarrow 2 = p^2 - 13$$

$$p^2 = 15 \ominus, \text{ т.к. } p = \sqrt{15}$$

$p \in \mathbb{N} \text{ (?)}$

3.6

$$n=1$$

$$n-2 = 13p^2$$

$$\Rightarrow 2 = 1 - 13p^2 \Rightarrow 13p^2 = -1$$

\ominus т.к. $13p^2 \geq 0$

Аналогично если $n=1$ подходящих случаев нет

4 вариант:

$$m+n-2 = 1 \Rightarrow$$

$$m+n = 3$$

$$m+n-3 = -6 \Rightarrow$$

$$A = -18 = 75q^2 \text{ (?)}$$

если $75q^2 \geq 0$

Ответ: $(10, 3)$; $(3, 10)$

\ominus не подходит

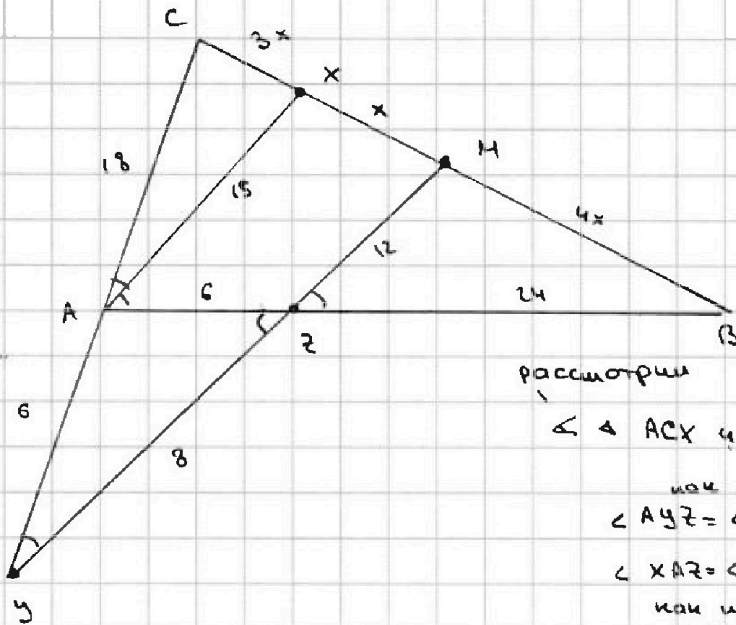


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} BC &= ? \\ AC &= 18 \\ AZ &= 6 \\ YZ &= 8. \end{aligned}$$

рассмотрим

$\triangle ACX$ и $\triangle AZY$:

или соотв.

$\angle AYZ = \angle CAX$, и.и. $AX \parallel YM$.

$\angle XAZ = \angle AZY$, и.и. $AX \parallel ZM$

или накр.
лежащие

"

$\angle AYZ = \angle AZY \Rightarrow \triangle AZY$ - р/б.

"

$$AY = AZ = 6.$$

\triangle т. Менелая для $\triangle ACB$ и прямой MY .

$$\frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZM} \cdot \frac{CM}{CB} = 1 \Rightarrow \frac{18}{6} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow y = 12$$

и.и. M - середина стороны

"

$$ZM = 12$$

По т. Фалеса для прямых $AX \parallel YM$:
 $\triangle ACX$ и $\triangle CYM$

$$\frac{CX}{CY} = \frac{15}{18+6} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{AX}{YM} = \frac{AC}{CY}$$

$$\frac{AX}{12+8} = \frac{18}{18+6}$$

$$\Rightarrow AX = \frac{18}{24} \cdot 20$$

$$AX = 15$$

По т. Фалеса для прямых $AX \parallel ZM$:
 $\triangle BAX$ и $\triangle BZM$

$$\frac{BZ}{AB} = \frac{ZM}{AX}$$

$$\frac{x}{x+6} = \frac{12}{15} \Rightarrow \begin{aligned} 15x &= 12x + 72 \\ 3x &= 72 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

$$ZB = 24$$

\Leftarrow

$$x = 24$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

м. и. $\frac{CX}{XH} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CX}{CX+XH} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{CX}{2 \cdot CX} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{CX}{CB} = \frac{3}{2 \cdot 7} = \frac{3}{14}$

\Downarrow
 $XH = \frac{4}{3} CX$

$\frac{CX}{CH} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CX}{CB} = \frac{CX}{2 \cdot CH} = \frac{3}{8}$

$\triangle ABC$: по т. Косинусов: $36 = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos \alpha$

$\triangle ACB = \alpha$

\Downarrow $\cos \alpha = \frac{64}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{2}{3}$

Применим т. Косинусов для $\triangle ACB$: $9x^2 = 18^2 + 15^2 - 2 \cdot 18 \cdot 15 \cos \alpha$

м. и. $\angle CAH = \angle ACB$

\Downarrow
 $\cos(\angle CAH) = \cos \alpha$

$36 + 25 - 40$

$x^2 = 18 \cdot 2 + 15^2 - 2 \cdot 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3}$

$x^2 = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24}$

\Downarrow
 $CB = 8x = 8\sqrt{24}$

Ответ: $BC = 8\sqrt{24}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \quad (1)$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 + 5y^2 - \sqrt{x} \quad (2)$$

"

$$(2) \quad x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

Заметим, что $f(x) = x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$ строго возрастает.

$$\text{н.ч.} \quad f(x+\varepsilon) = (x+\varepsilon)^4 + 5(x+\varepsilon)^2 + \sqrt{x+\varepsilon}$$

$$\varepsilon > 0$$

$$(x+\varepsilon)^4 > x^4, \text{ н.ч. } x \geq 0 \text{ (}\sqrt{x} \text{ определен)}$$

$$\varepsilon > 0$$

$$(x+\varepsilon)^2 > x^2, \text{ н.ч. } x \geq 0 \text{ и } \varepsilon > 0$$

$$\sqrt{x+\varepsilon} > \sqrt{x}$$

"

$f(x+\varepsilon) > f(x)$. Полагается, что $f(x) = f(y)$ только если $x=y$.

"

$x=y$. Подставим в (1)

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\exists x+1 = t \Rightarrow 6-x = 7-t \Rightarrow 6+5x-x^2 = t(7-t)$$

"

$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} + 5 = 2\sqrt{t(7-t)}$$

$$(\sqrt{t} - \sqrt{7-t})^2 = (2\sqrt{t(7-t)} - 5)^2$$

$$t + (7-t) - 2\sqrt{t(7-t)} = 4t(7-t) - 10\sqrt{t(7-t)} + 25$$

$$\exists \sqrt{t(7-t)} = a \Rightarrow 9 - 2a = 4a^2 - 20a + 25$$

$$4a^2 - 18a + 18 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 9a + 9 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{4}$$

$$a_{1,2} = \begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 случай $a=3 \Rightarrow \sqrt{t(7-t)} = 3$
 $t(7-t) = 9 \Rightarrow t^2 - 7t + 9 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-36}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

если $t = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = t-1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \quad (+) \quad x \geq 0$ подходит.

если $t = \frac{7-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = t-1 = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \quad (-) \quad x < 0$ не подходит.
 $t(7-t) < 0$ по условию $t > 0$ $7-t < 0$ $t < 0$ $7-t > 0$

2 случай. $a = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{7(7-t)} = \frac{3}{2}$

$$4t^2 - 28t + 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196-36}}{4} = \frac{14 \pm 4\sqrt{10}}{4} = \frac{7 \pm 2\sqrt{10}}{2}$$

если $t = \frac{7+2\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x = t-1 = \frac{5+2\sqrt{10}}{2}$, $x \geq 0$ подходит $7-t = \frac{7-2\sqrt{10}}{2} \geq 0$

если $t = \frac{7-2\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x = t-1 = \frac{5-2\sqrt{10}}{2}$, $x < 0$ не подходит ($25 < 40$)

Ответ: ~~$\frac{7-\sqrt{13}}{2}$~~ $\left\{ \frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+2\sqrt{10}}{2} \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

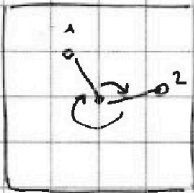
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач думеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Единственная точка, которая не переходит при повороте (т.е. переходит в саму себя) - это центр поворота. (но обе точки ни быть не могут, \Rightarrow \exists 1 из них является с.)

Остальные же точки перейдут в себя после суммарного поворота на 360° (т.е. 4 раза)

Хотим доказать, что для каждого положения точек \exists ^{не} \exists ³ \exists , с которыми он совпадает при повороте

Если это не так \Rightarrow какие-то две точки перешли друг в друга за менее, чем 4 поворота \Rightarrow точка 1 \rightarrow 2
точка 2 \rightarrow 1



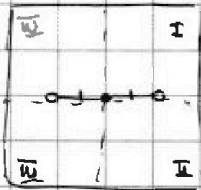
Однако угол поворота 12 должен совпадать с углом поворота $2 \rightarrow 1$

В сумме они дают $360^\circ \Rightarrow \angle 12 = \angle 21 = 180^\circ$

\Downarrow

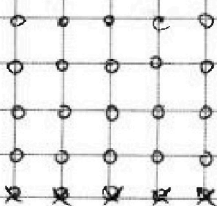
Это было через 2 поворота \Rightarrow 1, центр, 2

притом на одинаковом расстоянии от центральной т.



Во всех случаях кроме ^{такого} т. у положения есть ровно еще 3 ему подобных

кол-во случаев, когда точки нежат в I и III части компенсируют поворотом II и IV \Rightarrow считаем только I и III



\nearrow выберем одну точку \Rightarrow вторая автоматически задается

\Rightarrow точек случаев 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Всего способов выбрать 2 монеты $\frac{81-80}{2} = 81-40$.

н.ч. по одной стороне
квадрата лежит 2 монеты

Из этих способов

~~20~~ ~~4~~ = ~~80~~ исключений.
80 по 2

"
 $81-40 - \frac{80}{40} = \frac{80-40}{40}$ В каждом отсюда
случае каждый
учитывается в еще
3 случаях

"
расстановки $\frac{80-40}{4} + \frac{80}{40} \cdot 20 =$

$$= 800 + 20 = 820$$

Ответ: 820.

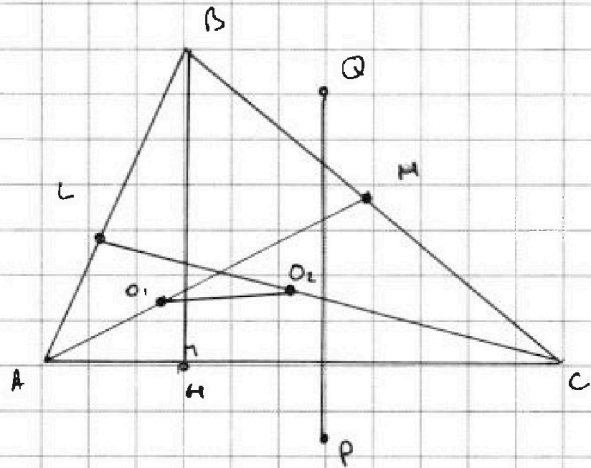
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



BH - высота из B.

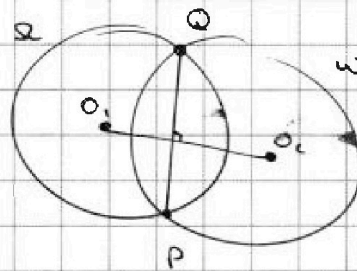
QP || BH

BH \perp AC, т.к. высота

\Downarrow

QP \perp AC

Примем Ω и ω



\Rightarrow QP - рад ось

\Downarrow

QP \perp O₁O₂

т.к. AM - диаметр Ω

Примем

O₁ - центр AM

O₂ - центр CL

т.к. CL - диаметр ω

\Rightarrow QP \perp O₁O₂

QP \perp AC

\Rightarrow O₁O₂ || AC

\Downarrow

O₁O₂ - часть средней линии Δ ALC и Δ AMC, которые совпадают

т.к. сер. линия Δ ALC || AC и проходит через O₂

Аналогично Δ сер. линией Δ AMC, которая || AC и проходит через O₁



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} x &= 6 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

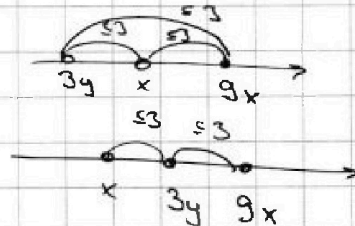
$$6 - 9 \leq 3 \quad \ominus$$

$$\begin{aligned} 4y + 8x &> 0 \\ 4(y + 2x) &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x - 3y)^2 &\leq 9 \\ (3x - y)^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

$$3 \leq x \leq 9x$$



$$\begin{aligned} 8x &\leq 6 \\ x &\leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$3y - x \leq 3$$

$$y \leq \frac{3+x}{3} \leq \frac{3+\frac{3}{4}}{3} = \frac{3+\frac{3}{4}}{3} = \frac{12+\frac{3}{4}}{3} = \frac{48+\frac{3}{4}}{12} = \frac{48.75}{12} = 4.0625$$

$$x = \frac{3}{8}$$

$$|x - 3y| \leq 3$$

$$\left| \frac{3}{8} - \frac{15}{4} \right| \leq 3 \quad \oplus$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{8} \\ y &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$8x + 4y = 6 + 5 = 11$$

$$y = \frac{17}{8}$$

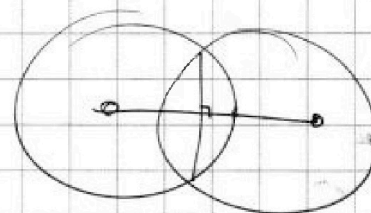
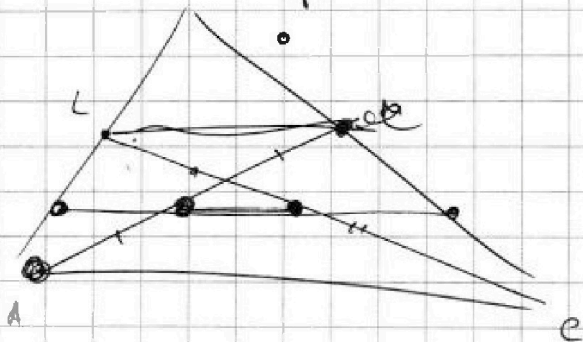
$$\Rightarrow 3y = \frac{51}{8}$$

$$|3x - y| \leq 1 \quad \left| \frac{9}{8} - \frac{5}{4} \right| \leq 1 \quad \oplus$$

$$\frac{17}{8} = 4 + 3$$

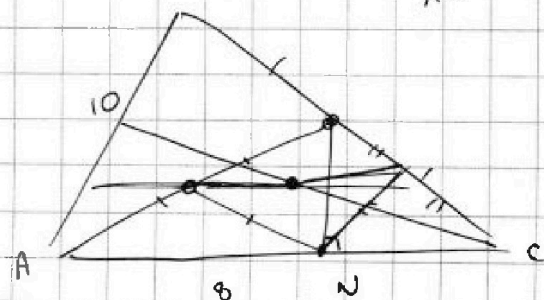
$$\frac{17}{2} + 3 = \frac{23}{2}$$

LMHAC \Rightarrow L - середина \Rightarrow



$$\begin{aligned} \frac{3}{8} + 3 \\ 24 + 3 \\ \frac{27}{8} \end{aligned}$$

$$AC = BC = \dots$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

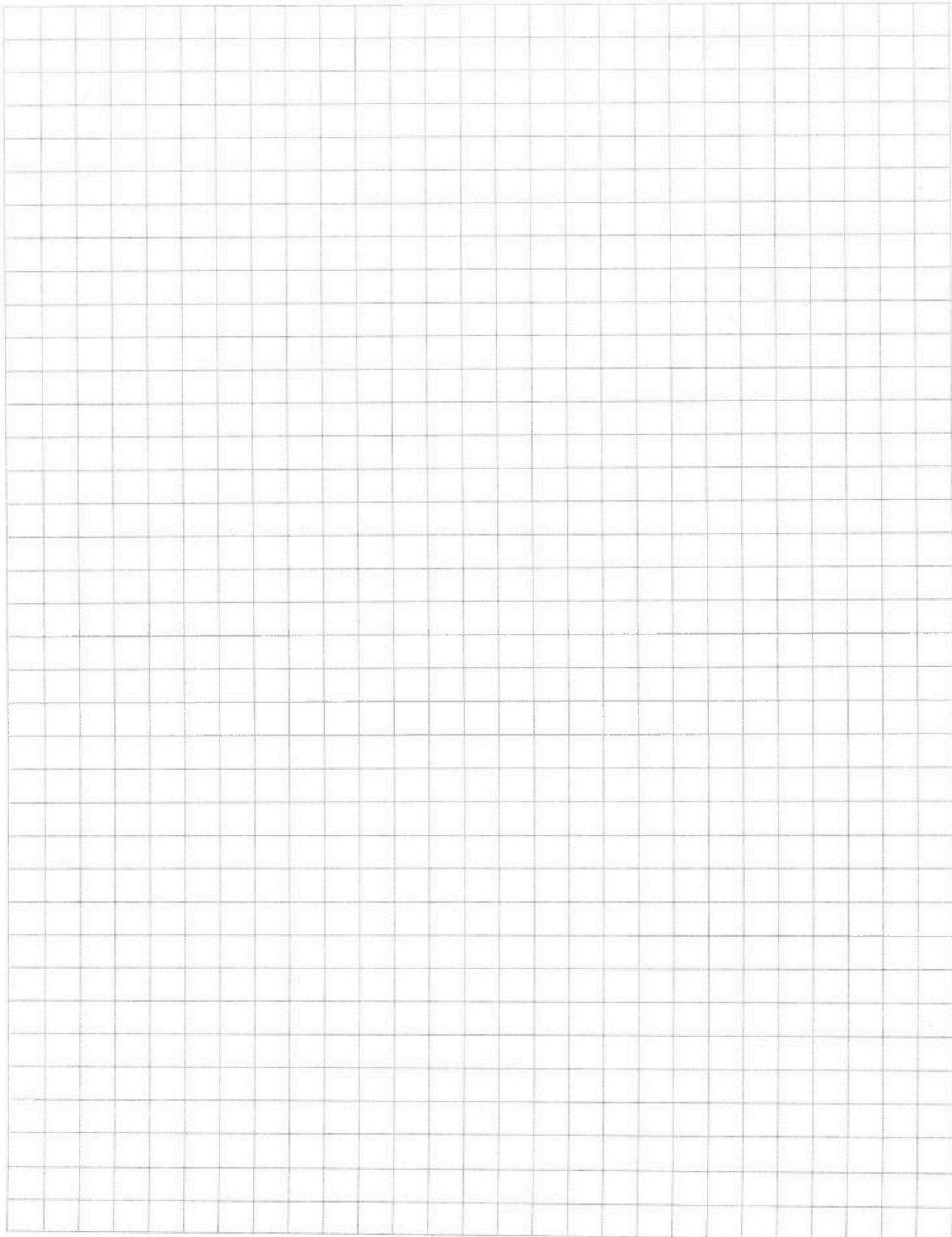
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \ m+n=p \Rightarrow m+n+g = p+g = 13p$$

$$g = -12p \quad \ominus$$

$$a) \ m+n+g = 13 \Rightarrow m+n+22 = 13p \quad \ominus$$

$$4) \ m+n+g = p \Rightarrow m+n = 13p \Rightarrow 13p - g = p$$

$$12p = g$$

$$p = \frac{g}{12} \quad \text{?!}$$

$$+18 + 15^2$$

$$2 \cdot 18 + 25 - 2 \cdot 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3}$$

$$36 + 25 - 40$$

61

21

2 шаг.

$$mn(m+n-3) = 13p^2$$

"

$$1) \ m=n=p$$

$$m+n-3 = 13$$

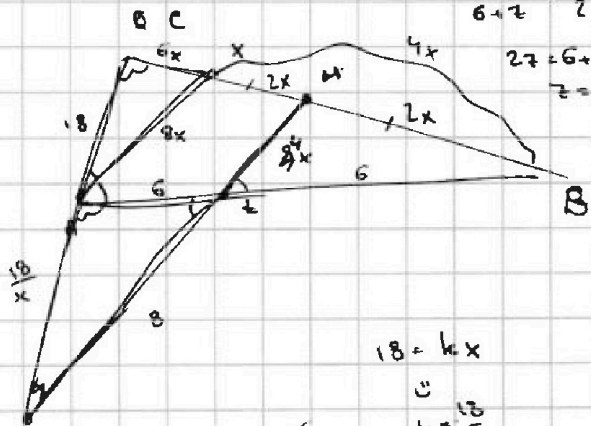
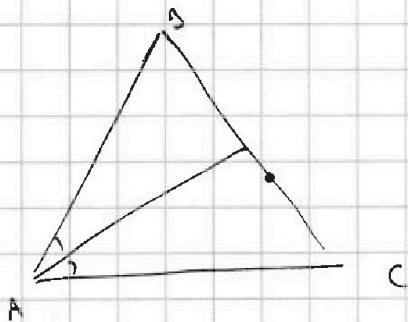
$$2p-3 = \Rightarrow p = 8 \quad \text{?!}$$

$$2) \ m=13 \Rightarrow 10+p=p$$

$$n=p$$

$$10=p \quad \text{?!}$$

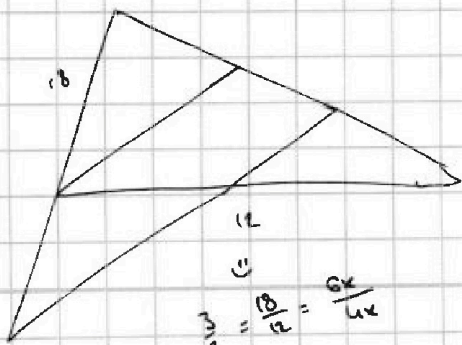
у
таких нет



$$\frac{z}{6+z} = \frac{1}{2}$$

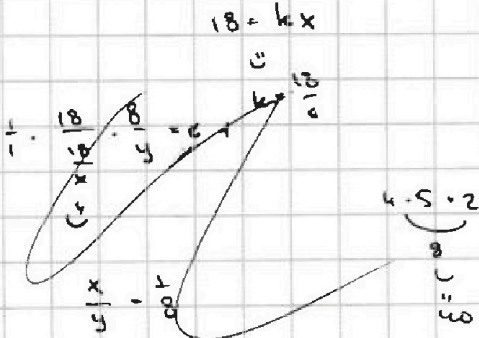
$$2z = 6+z$$

$$z = 6$$



$$\frac{z}{6+z} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{18}{z} = \frac{2x}{2x}$$



$$72 + 25 - 40 = 57$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x+5y^2} \end{cases}$$

$$(x+1)(6-y) = 5(x+1) \cdot x$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} &= x^2 - y^2 + 5x^2 - 5y^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) &\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y)(x^2 + y^2 + 5) = 1 \end{aligned}$$

1 шаг. $x = y$.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$(3-x)(2-x)$$

$$x^2 - 5x + 6$$

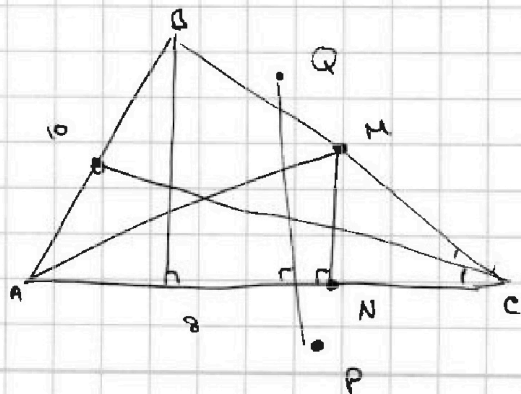
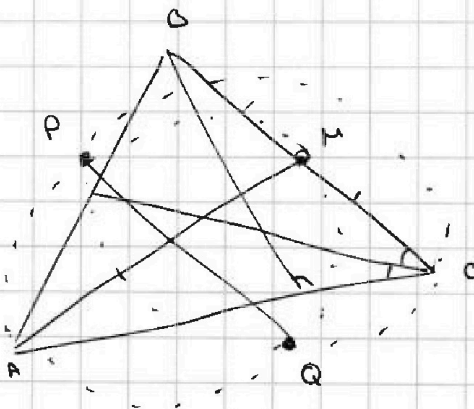
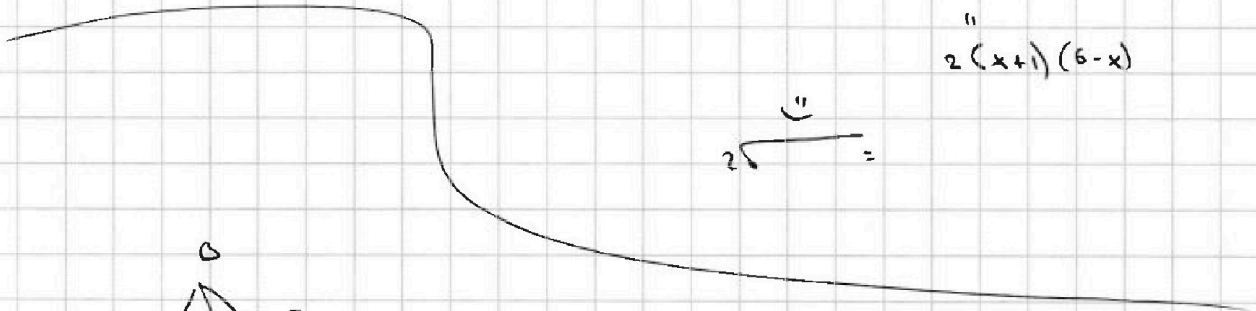
$$(x-6)(x+1)$$

$$\leftarrow (6-x)(x+1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{x-1} - \sqrt{6-x} + 5 &= 2\sqrt{\dots} \\ 5 - 2\sqrt{\dots} + 10\sqrt{x-1} &= 10\sqrt{6-x} + 25 \end{aligned}$$

$$2(x+1)(6-x)$$

$$2\sqrt{\dots} =$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

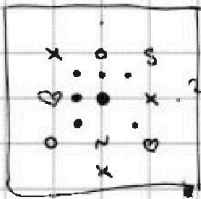
$$3x+3$$

as

$$3x+3+2d = (x^2+2x)^2$$

''

$$2((x^2+2x)^2 - 3x - 3) = 3x^2 - (x^2+2x)^2$$



$$2(x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3) = -x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 3x^2$$

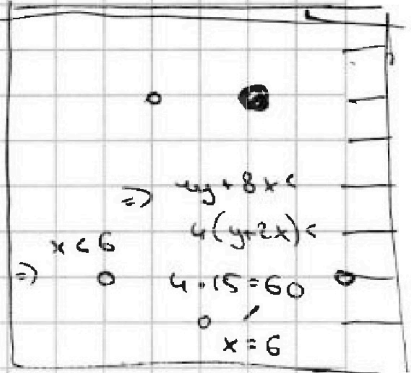
$$3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$2y+3 \geq 3y$$

$$(x+1)(3x^3+9x^2-6) = 0$$

$$(x+1)^2(3x^2+6x-6) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+18}}{3} = \frac{-3 \pm \sqrt{27}}{3}$$



$$y \leq 3$$

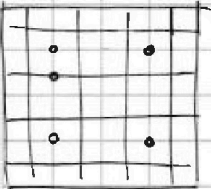
$$\begin{aligned} &4y+8x < \\ &4(y+2x) < \\ &4 \cdot 15 = 60 \\ &x = 6 \end{aligned}$$

$$x < 2y$$

$$x \geq 3y-3 \quad y=3$$

$$\begin{cases} 3y-x \leq 3 \\ 3x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3 \geq 3y \\ 2y+3-1+2 \end{cases}$$

$$0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3$$



$$4y+8x = \text{max?}$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

1 случай $x, y > 0$.

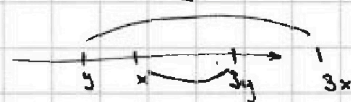
$$x-3y \leq 3$$

$$x \leq 3+3y$$

$$y+2x > 0$$

$$3x-y < y+2x$$

$$x < 2y$$



$$4y+8x =$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= (x-2)^2 \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$6, 1, 9, 1, 1, 1, 1, 3$$

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n =$$

$$= (m+n)(m+n-9)$$

$$B = mn(m+n-3)$$

$$1 \text{ случай. } (m+n)(m+n-9) = 13p^2 \Rightarrow$$

одно $13p^2$ п.р. - простое

$$25q^2 =$$

$$\begin{aligned} m+n=13 &\Rightarrow m+n-9=4=2^2 \\ m+n-3=10 &\Rightarrow q=2 \end{aligned}$$

$$169-120=49=7^2$$

одно из них простое $\Rightarrow mn=300$
 $7 \cdot 4 = 300$ одно из них > 13

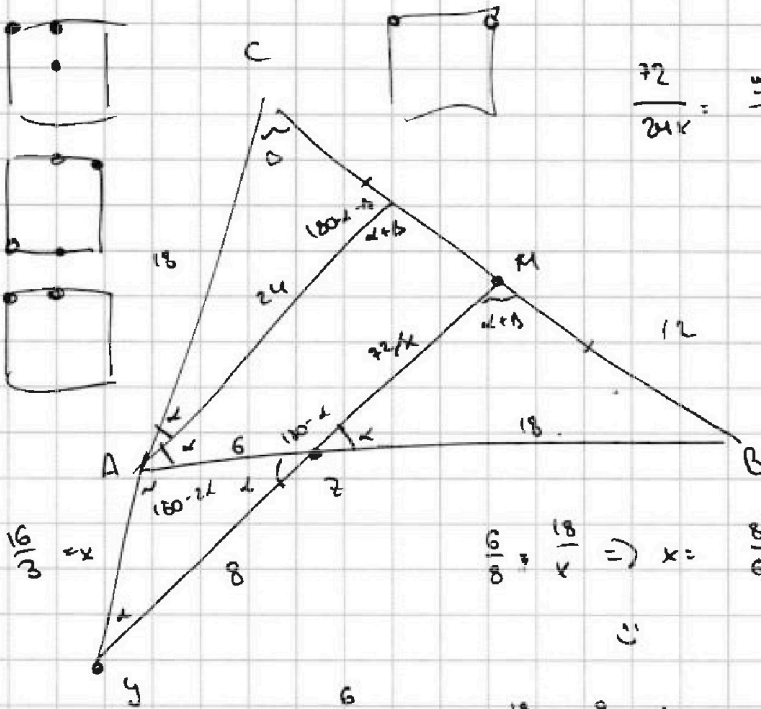


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{72}{24x} = \frac{y+6}{y+6}$$

$$72(y+6) = 24 \cdot (xy) = 72 \cdot 24$$

$$y+6 = 24$$

$$y = 18$$

$$\frac{6}{8} = \frac{x}{18} \Rightarrow x = \frac{6}{8} \cdot 18 = 24$$

$$\frac{72}{18x} = \frac{6}{8}$$

$$\frac{x}{18} \cdot \frac{18}{25} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow xy = 18 \cdot 4$$

$$y = \frac{72}{x}$$

$$x = \frac{16}{3}$$

$$\frac{72 \cdot 3}{18 \cdot 2} = \frac{27}{2}$$

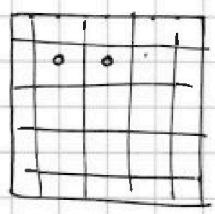
$$MB = \frac{6}{8} \cdot \frac{18}{3} = 12$$

$$\frac{9 \cdot 8}{2} = 9 \cdot 4 - 2$$

$$\frac{9 \cdot 4 - 22}{4} + 2$$

$$8 + 2 = 10$$

$$\frac{3}{4} \cdot 20$$



$$9 \cdot 9 = 81$$

$$\frac{81 \cdot 80}{27} = 81 \cdot 40$$

$$\sqrt{81} = 9$$

$$\begin{matrix} 12 & 1 \\ & 2 \\ 2 & \\ 1 & \\ & 2 \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 сущ. $x \neq y$.

"
 $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2+5) = 1$ $a, b > 0$.

2 $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4+5) = 1$

$\Rightarrow a+b < 1$ и $a, b < 1 \Rightarrow a^2+b^2 < 1$
 $a^2+b^2 < 1$

$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$

$\frac{8}{27}x^3$ $a + 5a^4 + a$ $\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{256} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2}$

$4a^3 + 20a^3 + 15a$

$8a^7 + 10a^3 + 1$

$\frac{8}{27}a^3$

$a^3 + 5a^4 + a$

$8b + 5b^4 + b$

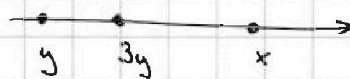
корни от 0 до 1?

$8 \cdot \frac{1}{128} - 20 \cdot \frac{1}{8} + 1$

$-\frac{1}{16} - \frac{20}{8} + 1$

$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}$

$x \uparrow \Rightarrow x^4 \uparrow$
 $5x^2 \uparrow$
 $\sqrt{x} \uparrow$ (+)



1 сущ. $x \geq 3y$ $3x \geq 3y$
 $\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ 3x-y \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 4x - 4y \leq 4$
 $x - y \leq 1$
 $x \leq 1 + y \Rightarrow 4y + 8x \leq 8 + 12y$
 $x \leq 1 + y \leq 1 + 3x$

2 сущ. $x \geq 3y$ $3x \leq y$ (-)

3 сущ. $x < 3y$ $3x \leq y$

$\begin{cases} 3y - x \leq 3 \\ 3x - y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 4x \leq 4 \\ y - x \leq 1 \end{cases}$

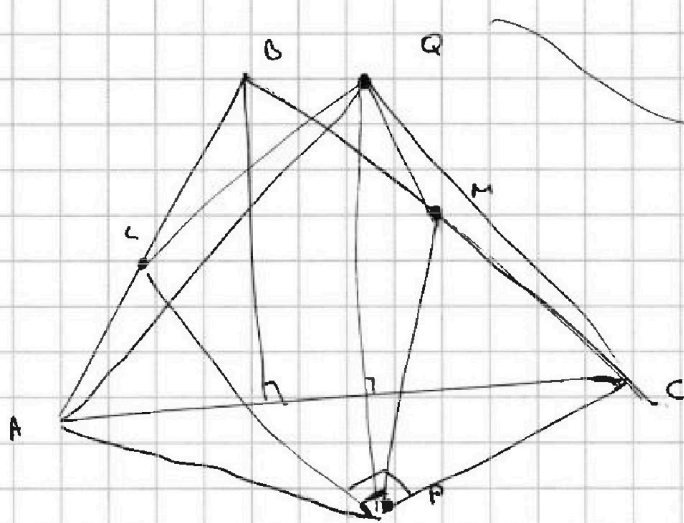


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 9x - 3y &\leq 3 \\ x - 3y &\leq 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 10x - 6y &\leq 6 \\ 5x - 3y &\leq 3. \end{aligned}$$

$PQ \perp AC$

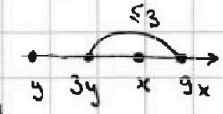
$$\begin{aligned} |x - 3y| &\leq 3 \\ 3|x - y| &\leq 9 \\ 3|x - 3y| &\leq 9 \end{aligned}$$

$$3|3x - y| \leq 3$$

$$|9x - 3y| \leq 3$$

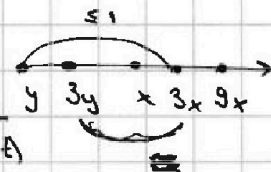
$$|x - 3y| \leq 1$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} &\leq 3 \\ x+1 + 6-x &= 7 \\ x+1 - 7-t & \end{aligned}$$



$$\sqrt{t} - \sqrt{7-t} = 5 = 2\sqrt{t(7-t)}$$

$$7 - 2\sqrt{t(7-t)} = 4t(7-t) = 4t(7-t)$$



$$\sqrt{t(7-t)} = a \Rightarrow 7 - 2a = 4a^2 - 20a + 25$$

$$4a^2 - 18a + 18 = 0$$

$$2a^2 - 9a + 9 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 184}}{4}$$

$$\frac{9+3}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

1 шаг. $\sqrt{t(7-t)} = 3$

$$t^2 - 7t + 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 36}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

1) $t = \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow (-)$

2) $t = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = y = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} (+)$

2 шаг.

$$\sqrt{t(7-t)} = \frac{3}{2}$$

$$4t^2 - 28t + 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 9}}{4}$$

$$\frac{14 \pm \sqrt{160}}{4} = \frac{14 \pm 4\sqrt{10}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{10}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{7 - 2\sqrt{10}}{2} (-) \\ \frac{7 + 2\sqrt{10}}{2} (+) \end{cases}$$

2) $\frac{7 + 2\sqrt{10}}{2} (+)$