



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



$36; 18; -24$   
 $5$

$12 + 2 \cdot 24 = 36; 18; -24$

$4 - 8$

1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен  $12 - 12x$ , четвёртый член равен  $(x^2 + 4x)^2$ , а восьмой равен  $(-6x^2)$ . Найдите  $x$ .

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения  $10x + 5y$  при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$  и  $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$  равно  $17p^2$ , а другое равно  $15q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AX$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AC$  и продолжение стороны  $AB$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $7 \times 7$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 6$ ,  $AN = 5$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
( из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.  $\exists$  первой член  $a_1$ ; разности  $q$ , тогда:

$$a_1 + q = 12 - 12x$$

$$a_1 + 3q = (x^2 + 4x)^2$$

$$a_1 + 7q = (-6x^2)$$

Заметим, что  $2(a_1 + q) + a_1 + 7q = 3(a_1 + 3q)$

$$2 \cdot 12 \cdot (1 - x) + (-6x^2) = 3(x^2 + 4x)^2 = 3(x^4 + 8x^3 + 16x^2)$$

$$24 - 24x - 6x^2 = 3x^4 + 24x^3 + 48x^2 \quad | :3$$

$$8 - 8x - 2x^2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

$$+2x^2 - 2x^2 - 8x + 8 = 2x^4$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 2x^2 + 8x + 16 = 16$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 16 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x^2 + 4x + 4) + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x^2 + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 4x - 4)(x + 2)^2 + 2(x + 2)^2 = 0$$

$$(x^2 + 2)^2 (x^2 + 4x - 4 + 2) = 0$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$x = -2$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

Проверим корни:  $a_2 = 12 + 24 = 36$  }  $q = 10$   
 $a_4 = 16$  }  $q = -2$  не подходит  
 $a_8 = -24$  }  $q =$

Заметим, что  $(x^2 + 4x)^2 \geq 0$ , а  $(-6x^2) < 0$ , т.е. прогрессия убывающая  $\rightarrow q < 0 \rightarrow \sqrt{6} - 2$  не подходит.

$$a_2 = 12 - 12(\sqrt{6} - 2) = 36 - 12\sqrt{6}$$

$$a_4 = (-\sqrt{6} - 2)^2 + 4(\sqrt{6} - 2)^2 = (3 - 4\sqrt{6} + 4 + 4\sqrt{6} - 8) = 2^2 = 4$$

$$a_8 = -6(\sqrt{6} - 2)^2 = -6(6 - 4\sqrt{6} + 2) = -48 + 24\sqrt{6} - 48$$

$$\rightarrow q = \frac{4 - (36 - 12\sqrt{6})}{2} = -32 + 12\sqrt{6} = 6\sqrt{6} - 16$$

$$4 + 4 \cdot (6\sqrt{6} - 16) = 24\sqrt{6} - 48 \quad \text{— Подходит.}$$

Ответ:  $\begin{cases} x = -2 \\ x = 24\sqrt{6} - 48 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -\frac{24}{5}; \quad y = \frac{2}{3}x - 2 = -\frac{24 \cdot 2}{3 \cdot 5} - 2 = -\frac{16}{5} - 2 = -\frac{26}{5}$$

Проверим, что  $|2x - 3y| = \left| -\frac{48}{5} + \frac{3 \cdot 26}{5} \right| = 6 \leq 6$  - верно  
 $|3x - 2y| = \left| -\frac{3 \cdot 24}{5} + \frac{2 \cdot 26}{5} \right| = 4 \leq 4$  - верно.

Тогда минимальное значение  $10x + 5y = 10 \cdot \left(-\frac{24}{5}\right) + 5 \cdot \left(-\frac{26}{5}\right) = -48 - 26 = -74$

Ответ:  $\min 10x + 5y = -74$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.  $\min (10x + 5y)$ . Пусть  $10x + 5y = k$ , тогда нужно  $\min k$ .

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 2y| \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq 2x - 3y \leq 6 & (1) \\ -4 \leq 3x - 2y \leq 4 & (2) \end{cases}$$

(1):  $-6 \leq 2x - 3y \leq 6$   
 $-6 - 2x \leq -3y \leq 6 - 2x \quad | :(-1)$   
 $2x + 6 \geq 3y \geq 2x - 6 \quad | :3$   
 $\frac{2}{3}x + 2 \geq y \geq \frac{2}{3}x - 2$

тогда этому ур. соответствуют все точки между прямыми  $y = \frac{2}{3}x - 2$

$y = \frac{2}{3}x - 2$

$y = \frac{2}{3}x - 2: \begin{matrix} x=0 & | & x=3 \\ y=2 & | & y=0 \end{matrix}$

$y = \frac{2}{3}x + 2: \begin{matrix} x=0 & | & x=3 \\ y=2 & | & y=4 \end{matrix}$

(2):  $-4 \leq 3x - 2y \leq 4 \Rightarrow$

$\rightarrow -4 + 3x \leq -2y \leq 4 + 3x \quad | :(-2)$

$1,5x + 2 \geq y \geq 1,5x - 2$

А этому ур. соответствуют все точки и / у  
 прямые  $y = 1,5x - 2$   $y = 1,5x + 2$   $y = 1,5x - 2: \begin{matrix} x=0 & | & x=2 \\ y=2 & | & y=1 \end{matrix}$

$y = 1,5x + 2: \begin{matrix} x=0 & | & x=-2 \\ y=2 & | & y=-1 \end{matrix}$

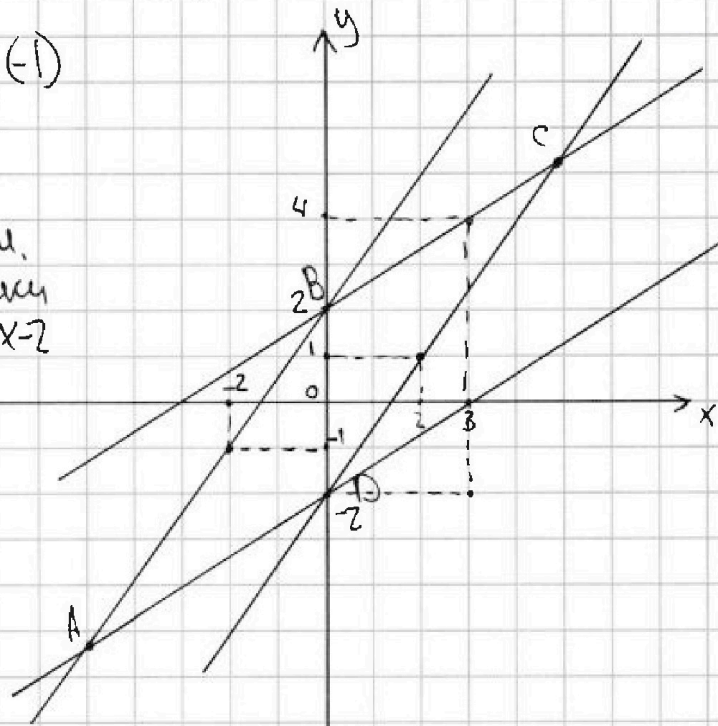
Тогда все точки, лежащие внутри и на границе  $ABCD$  удовлетв. ур. до исходному условию.

Заметим, что  $10x + 5y = k \Rightarrow y = -2x + \frac{k}{5}$  это прямая с коэф. наклона  $-2$ , которая пересекает

Заметим, что в т. А  $x$  и  $y$  принимают свои минимальные неотрицательные значения. Тогда координаты точки А и есть искомого значения. Эта точка - пересечение прямых АВ и АД, т.е.  $y = 1,5x + 2$

и  $y = \frac{2}{3}x - 2$  соответственно.  $\rightarrow 1,5x + 2 = \frac{2}{3}x - 2$

$(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}x) = -4 \rightarrow x \cdot \frac{5}{6} = -4 \rightarrow x = -\frac{24}{5}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(1):  $p=5$ , ~~тогда~~  $m=17 \rightarrow n=5: m \cdot n \cdot (m-2n-2) =$   
 $= 17 \cdot 5 \cdot (5 - 17 \cdot 2) = -1595$  - верно.  
 $(17-10) \cdot (17+10+13) = 7 \cdot 20 = 140$

(2)  $m=p$ :  $m-2n-2=p$   
 $n=17$   $p-34-2=p \rightarrow p=-36=0$

(3)  $m=1$ ;  $n=17$ ;  $p$ :  $1-34p-2=p \rightarrow 35p=-10$

(4)  $17p-2-2=p \rightarrow 16p=-4 \rightarrow \emptyset$

(5)  $mn=1 \rightarrow m=n=1$   
 $m-2n-2 = 1-4 = -3 \not\equiv 17 \rightarrow \emptyset$

~~(m-2n)~~

Итого ответ:  $(m; n) = (n; m) = (3; 10)$

$(n=3; m=10)$  - верн. пара



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \quad A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m-2n)^2 + 13(m-2n) + (m-2n)(m-2n+13)$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m-2n-2)$$

§ сформулируй, когда  $A = 17p^2$ ;  $B = 15q^2$ . Если  $A = 17p^2$ , то возможны следующие случаи: 1)  $\begin{cases} m-2n = 17 \\ m-2n+13 = p^2 \end{cases} \rightarrow p^2 = 17+13 = 30$  но 30 это не квадрат числа  $\rightarrow$  такой сл. невозможен.

2)  $\begin{cases} m-2n = p^2 \\ m-2n+13 = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m-2n = p^2 \\ m-2n = 4 \end{cases}$  в таком случае  $p = \pm 2$  - ~~это невозможно~~

но тогда  $mn(m-2n-2) = 15q^2 \rightarrow 15q^2 = 2mn$ , т.е.

$15q^2 : 2$ . Это возможно только если  $q = \pm 2$ , и тогда  $2mn = 15 \cdot 4 \rightarrow mn = 30 \rightarrow \begin{cases} 2n^2 + 4n - 30 = 0 \\ m-2n = 4 \end{cases}$   $n^2 + 2n - 15 = 0$   
 $(n+5)(n-3) = 0$

$\begin{cases} n = -5 \\ n = 3 \end{cases}$ , но т.к.  $n$  - натуральное, то  $\boxed{n = 3; m = 10}$

3)  $\begin{cases} m-2n = 17p \\ m-2n+13 = p \end{cases} \rightarrow (m-2n) - (m-2n+13) = 16p \rightarrow 16p = -13$   
но  $p$  - простое  $\rightarrow$  этот сл. не подходит.

4)  $\begin{cases} m-2n = p \\ m-2n+13 = 17p \end{cases} \rightarrow 16p = 13$ , но  $p$  простое, сл. не подходит.

5)  $\begin{cases} m-2n = 1 \\ m-2n+13 = 17p^2 \end{cases} \rightarrow 17p^2 = 14$  ~~о~~

6)  $\begin{cases} m-2n = 17p^2 \\ m-2n+13 = 1 \end{cases} \rightarrow 17p^2 = -12$  ~~о~~

Тогда ед. возможным вариантом & этой системы при  $n = 3$   
 $m = 10$ .

Теперь рассмотрим случаи, когда  $A = 15p^2$   
 $B = 17q^2$ .



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тоже  $\begin{cases} mn(m-2n-2) = 17p^2 \\ (m-2n)(m-2n+3) = 15q^2 \end{cases}$

1)  $\begin{cases} mn = 17 \\ m-2n-2 = p^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=17; n=1 (1) \\ n=17; m=1 (2) \end{cases}$

(1):  $m-2n-2 = p^2 = 17-4 = 14 \neq$

(2):  $m-2n-2 = 1-34-2 = -35 \neq$

2)  $\begin{cases} mn = p^2 \\ m-2n-2 = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=p; n=p (1) \\ m=p^2; n=1 (2) \\ h=p^2; m=1 (3) \end{cases}$

(1):  $p-2p-2=17 \rightarrow -p=19 \rightarrow p=-19$  - верно т.е.

$m=-19=n$ , но  $m-2n(m-2n+3) = 19 \cdot (22 \div 15) \rightarrow$  не натуральное.

(2)  $m=p^2; n=1 \rightarrow m-2n-2 = 17 = p^2-3=17 \rightarrow p^2=20 \neq$

(3)  $n=p^2; m=1 \rightarrow 1-2p^2-2=17 \rightarrow -2p^2=17 \rightarrow \neq$

3)  $\begin{cases} mn = p \\ m-2n-2 = 17p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=p; n=1 (1) \\ n=p; m=1 (2) \end{cases}$

(1):  $m=p; n=1 \rightarrow p-2-2=17p \rightarrow 15p = -4 \rightarrow \neq$

(2):  $1-2p-2=17p \rightarrow 19p=-1 \rightarrow p = -\frac{1}{19} \neq$

4)  $\begin{cases} mn = 17p^2 \\ m-2n-2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=17p^2; n=1 (1) \\ m=1; n=17p^2 (2) \\ m=17; n=p^2 (3) \\ m=p^2; n=17 (4) \\ m=17p; n=p (5) \\ m=p; n=17p (6) \end{cases}$

(1):  $n=1; m=3+2n=5; m=17 \cdot p^2 \neq$

(2):  $m=1 \rightarrow 2n=-2 \rightarrow n=-1 \rightarrow 1=17p^2 \neq$

(3):  $m=17 \rightarrow 2n=14 \rightarrow n=7 = p^2 \rightarrow \neq$

(4):  $m=17p \rightarrow 2n=m-3=17p-3=2p^2 \rightarrow 2p^2-17p+3=0 \quad D = \sqrt{889-24} = \sqrt{265}$

(5):  $m=17p; n=p \rightarrow 2n=m-3=17p-3=2p^2 \rightarrow 2p^2-17p+3=0 \rightarrow D = \sqrt{265}$

(6):  $m=p; n=17p \rightarrow m-2n-2 = 17p-34p-2 = -17p-2 = 1 \rightarrow -17p=3 \rightarrow p = -\frac{3}{17} \neq$

(5):  $m=17p; n=p \rightarrow m-2n-2 = 17p-2p-2 = 15p-2 = 3 \rightarrow 15p=5 \rightarrow p=1/3 \neq$

5)  $\begin{cases} mn = 17p \\ m-2n-2 = p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=17; n=p (1) \\ m=p; n=17 (2) \\ m=1; n=17p (3) \\ m=17p; n=1 (4) \end{cases}$

(1):  $17-2p-2=p \rightarrow 3p=5 \rightarrow p=5/3 \neq$



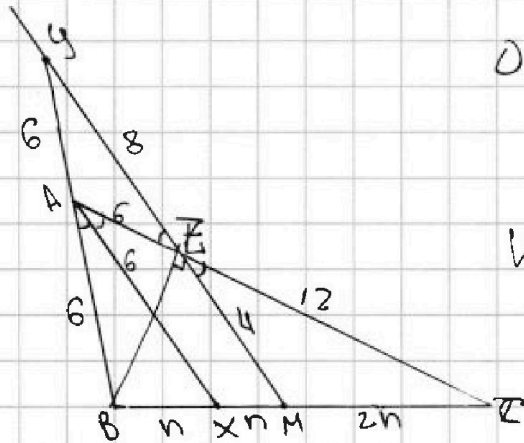
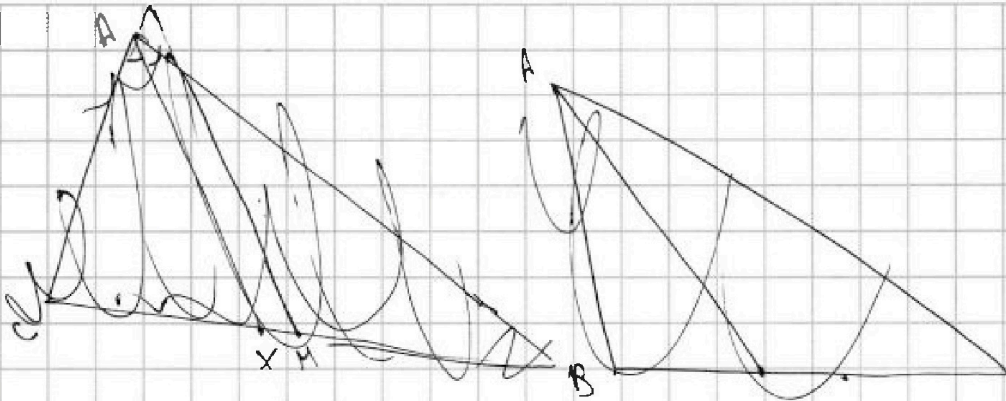
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



Дано:  $\triangle ABC$ ;  $AX$  - выс. ;  $M$  - ср.  $BC$  ;  
 $MZ \parallel AX$ ;  $MZ \perp AB = Z$  ;  
 $MZ \perp AB = y$ ;  $AC = 18$ ;  $AZ = 6$  ;  
 $yZ = 8$ .

Найти:  $BC$

Решение:  $MZ \parallel AX$ , тогда по свойству Т. Фалеса:

$$\frac{MC}{MX} = \frac{ZC}{ZA} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$$

$\downarrow$   $MX = \frac{1}{2}n$ , тогда  $MC = 2n$ , но  $M$  - ср.  $BC \rightarrow BM = MC$ ;  $Bx + n = 2n \rightarrow Bx = n$

Т.к.  $AX$  - выс.  $\perp BC$ , то по основанию св-во выс.:

$$\frac{CX}{BX} = \frac{AC}{AB} = \frac{3n}{n} = \frac{3}{1} \rightarrow AB = \frac{AC}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

Заметим, что  $X$  - ср.  $BM$ , и  $AX \parallel MY \rightarrow AX$  - сред. лин.  $\triangle BYM$ ,

$\rightarrow A$  - ср.  $BY \rightarrow AY = AB = 6$  (т.к.  $\triangle BYM$ ,  $BZ^2 = BY^2 - YZ^2 = 12^2 - 8^2 = 80$ )

$A$  - ср.  $YB$  |  $\triangle YZB \sim \triangle YZM$  т.к. медиана равна половине гипотенузы,  $\rightarrow \angle YZB = \angle BZM = 90^\circ$

Пусть  $AX = y$ , тогда т.к.  $AX$  - сред. лин.  $\triangle BYM$ :  $MY = 2y = 8 + MZ$

$$AX \parallel ZM \rightarrow \triangle ZMS \sim \triangle AEX \rightarrow \frac{MZ}{AX} = \frac{MZ}{y} = \frac{AZ}{AC} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \rightarrow MZ = \frac{1}{3}y$$

$$\text{Тогда } 2y = 8 + \frac{1}{3}y \rightarrow \frac{5}{3}y = 8 \rightarrow y = \frac{24}{5}$$

$$\text{Тогда } 2y = 8 + \frac{1}{3}y \rightarrow \frac{5}{3}y = 8 \rightarrow y = \frac{24}{5} \rightarrow MZ = \frac{1}{3}y = \frac{8}{5}$$

$$\text{Т.к. } \angle BZM = 90^\circ \triangle BZM \sim \triangle YZM : BM^2 = MZ^2 + BZ^2 = 4^2 + 80 = 16 + 80 = 96$$

$$\rightarrow BM^2 = (2n)^2 = 96 \rightarrow 4n^2 = 96 \rightarrow n^2 = 24 \rightarrow n = 2\sqrt{6}; BC = 4n = 8\sqrt{6}$$

Ответ:  $BC = 8\sqrt{6}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. 
$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} & (1) \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x+4y^2} & (2) \end{cases}$$
 ОДЗ:  $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3 \\ x \geq -4 \end{cases}$

~~Реш~~ Заметим, что 2-е уравнение симметрично отн.  $x, y$ :  $2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 + 4y^2 - \sqrt[4]{3x}$   
т.е. при замене  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$  левая часть не меняется  $\rightarrow x=y$  (т.к.  $x, y > 0$ )

Тогда (1) уравнение примет следующий вид:

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$12-x-x^2 = 12-4x+3x-x^2 = 4(3-x) + x(3-x) = (3-x)(4+x)$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(3-x)(4+x)} - 5$$

$$(\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x})^2 = (2\sqrt{(3-x)(4+x)} - 5)^2$$

$$x+4 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} + 3-x = 4 \cdot (3-x)(4+x) - 2 \cdot 5 \sqrt{(3-x)(4+x)} + 25$$

$$7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = 4 \cdot (3-x)(4+x) - 20\sqrt{(3-x)(4+x)} + 25$$

$$\sqrt{(x+4)(3-x)} = t, t \geq 0:$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25; 4t^2 - 18t + 18 = 0; 2t^2 - 9t + 9 = 0;$$

$$2t^2 - 6t - 3t + 9 = 0; 2t(t-3) - 3(t-3) = 0; (t-3)(2t-3) = 0$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = 1,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+4)(3-x)} = 3 & \begin{cases} 12-x-x^2 = 39 \\ 12-x-x^2 = 9 \end{cases} \\ \sqrt{(x+4)(3-x)} = 1,5 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \rightarrow x \geq -4 \text{ (} x \geq 0 \text{ из ОДЗ)} \\ 3-x \geq 0 \rightarrow x \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 3 = 0 \\ x^2 + x + \frac{9}{4} - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 3 = 0 & (1) \\ x^2 + x - \frac{39}{4} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(2): D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{39}{4} = 40 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{40}}{2}$$

заметим, что  $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < 0$ ,  $\frac{-1 - \sqrt{40}}{2} < 0$ , а  $x \geq 0 \rightarrow$  это все корни.  
 $36 < 40 < 49 \rightarrow 6 < \sqrt{40} < 7 \rightarrow 5 < \sqrt{40} - 1 < 6 \rightarrow \frac{5}{2} < \frac{\sqrt{40} - 1}{2} < 3$   
 $\rightarrow 0 < x < 3 \rightarrow \frac{-1 - \sqrt{40}}{2}$  не подходит,  $1 < \sqrt{13} < 4 \rightarrow 0 < \frac{\sqrt{13} - 1}{2} < 1,5$

Тогда ответ:  $(\frac{\sqrt{40}-1}{2}; \frac{\sqrt{40}-1}{2}); (\frac{\sqrt{13}-1}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2})$

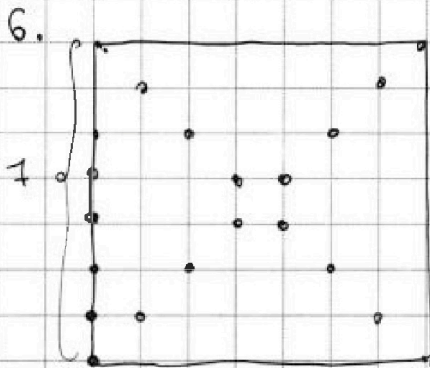
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что в каждой строке и в каждой колонке по 8 узлов, всего  $8^2 = 64$ .

При выборе узлов для диагонали будет 4 варианта поворота доски.  $\rightarrow$

узлов диагонали не на диагоналях  $64 - 16 = 48$   
 Тогда вар-тов будет  $\frac{C_{48}^{16}}{4} = \frac{48!}{2! \cdot 46! \cdot 4} = \frac{48 \cdot 47}{8} = 47.6$

Вариантов поворота 2 узелка, лежащих на одной диагонали -  $\frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 4.7$  вар-тов

Для трехэлементных на одной диагонали будет 2 варианта поворота  $\rightarrow \frac{4 \cdot 7}{2}$ , кот.к

диагонали 2,  $\frac{4 \cdot 7}{2} \cdot 2 = 4.7$

Итого всего вариантов будет  $4.7 + 47.6 = 28 + 282 = 310$  вариантов, способов

Ответ: 310 способов.



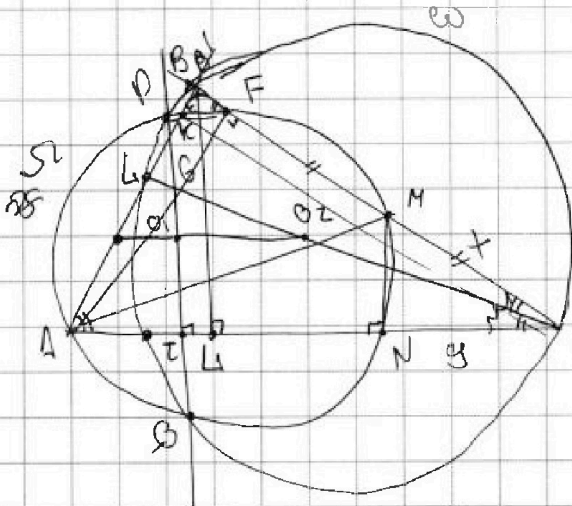
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.



т.к.  $\angle AKM = \angle AEM = 90^\circ$

(в окр.  $\Omega$  диаметр не является хордой)

$$\Delta BKF \sim \Delta ABM \rightarrow \frac{BF}{BK} = \frac{AB}{BM} = \frac{6}{2x}$$

$KF \parallel AM \rightarrow$

т.к.  $PQ \perp AC$  прямая, касаясь центров  $\omega$  и  $\Omega \parallel AC \rightarrow$

$O_1$  - центр  $PQ$ ,  $O_2$  - центр  $DE$ ;  $O_1, O_2 \parallel AC \rightarrow O_1, O_2$  - центры  $\Delta$

$GTE$

$$y^2 + 5y = x^2 - x \cdot BF = x^2 - 6BK$$

$AF$  - хорда;  $F \in \Omega$

$CK$  - хорда;  $K \in \omega$

Дано:  $AB = 6$   
 $AN = 5$   
 $CH = AC$   
 $AC, B'C$  - секущие к окр.  $\Omega \rightarrow$   
 $NC(NC + 5) = MC \cdot (MC - BF)$   
 $B'A, B'A$  - секущие к окр.  $\Omega$

созд.  $B'$ :

$$B'F \cdot MC = BK \cdot AB = BK \cdot 6$$

$\overset{MB'}{=} MB'$

$$\left| \begin{array}{l} MC = MB' = x \\ NC = y \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(y + 5) = x(x - BF) \\ BF \cdot x = 6 \cdot BK \rightarrow BF \end{array} \right.$$

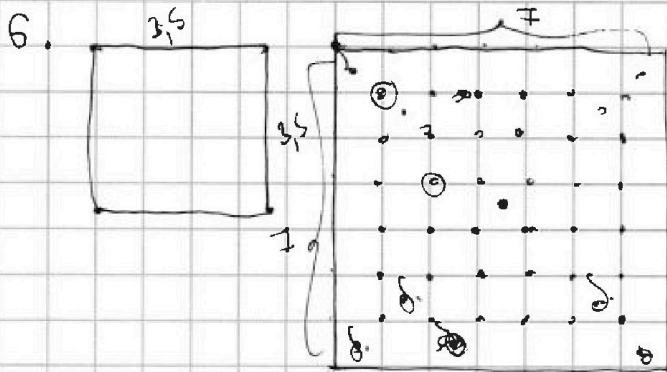


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



векторы на квадрате →  
→ 3 : 4 → : 2

$$C_{16}^n = \frac{16!}{2! \cdot 14!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 15 \cdot 8$$

$$\therefore \frac{15 \cdot 8}{2} = 15 \cdot 4 = 60$$

$$\frac{48!}{2! \cdot 46!} = \frac{48 \cdot 47}{2} = 24 \cdot 47$$

$$8 \cdot 8 = 64$$

$$64 - 16 = 54 - 6 = 48$$

$$\frac{6}{24 \cdot 47} = \boxed{47 \cdot 6 + 15 \cdot 4}$$

$$1. \quad a_2 = 12 - 12x = a_1 + r \quad \Rightarrow \quad 2r = (x^2 + 4x)^2 - (12 - 12x)$$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3r$$

$$a_8 = (-6x^2) = a_1 + 7r = a_1 + r + 3 \cdot 2r =$$

$$= (12 - 12x) + 3 \cdot (x^2 + 4x)^2 - 3 \cdot (12 - 12x) = 3 \cdot (x^2 + 4x)^2 - 2(12 - 12x)$$

$$= 3(x^4 + 8x^3 + 16x^2) - 24 + 24x = -6x^2$$

$$3x^4 + 24x^3 + 48x^2 - 24 + 24x + 6x^2 = 0$$

$$3x^4 + 24x^3 + 54x^2 + 24x - 24 = 0 \quad | :3$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$a_6 = a_1 + 5r = a_1 + 7r \quad \omega$$

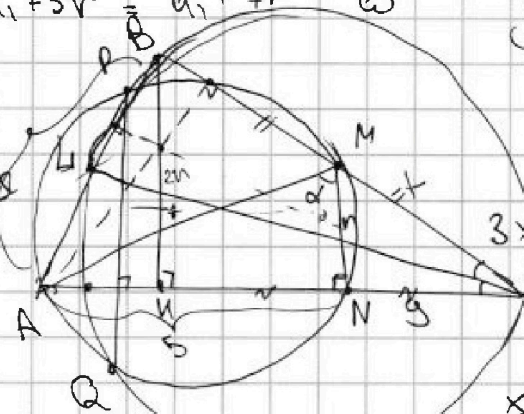
7.

$$CN(CN+5) = 6$$

$$= x \cdot 2x$$

$$y(x+4x) =$$

$$y^2 + y \cdot 4x$$



$$2a_1 + 2r + a_1 + 7r = 3a_1 + 9r$$

$$2AB = 6; AN = 5$$

$$a_1 = 12 - 12x; a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 + 3r$$

$$a_1 + 7r = -6x^2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 = 2(12 - 12x) - 6x^2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 = -6x^2 - 24x + 24$$

$$3x^4 + 24x^3 + 48x^2 + 6x^2 + 24x - 24 = 0$$

$$x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$x^4 + 4x^2(x+4)^2 + 2x^2 + 16x + 32 - 8x - 8 = 0$$

$$x^2(x+4)^2 + 2x(x+4)^2 - 8(x+5) = 0$$

$$x^2(x+4)^2 + 2x(x+4)^2 - 8(x+5) = 0$$

$$(x+4)^2(x^2+2) = 8(x+5)$$

$$x < 0 \quad |x| > 2$$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 4) + 8x(x+1)^2 = 0$$

≠ 23+

$$+ 8x - 8 = 8x^4 + 18x^3 + 11x^2 +$$

$$+ 8x^3 + 16x^2 + 8x - 8 =$$

$$= (x^2 + 1)^2 + 8x(x^2 + 1) - 8 = 0; (x^2 - 2)(x^2 + 4) + 8x(x+1)^2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2} \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2 \end{cases} \begin{cases} x, y > 0 \\ x \leq 3 \\ x \geq -4 \\ 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 + 4y^2 - \sqrt[4]{3x}$$

если во 2 выраж. пом.  $x$  и  $y$  мест., то получится то же.

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2} \\ 12 - 4x + 3x - x^2 = 4(3-x) + x(3-x) = (3-x)(4+x) \end{cases}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{(3-x)(4+x)}$$

$$a - b + 5 = 2ab$$

$$a + 5 = 2ab + b = b(2a+1) \rightarrow b = \frac{a+5}{2a+1}$$

$$a - \frac{a+5}{2a+1} + 5 = 2a \cdot \frac{a+5}{2a+1} \quad | \cdot 2a+1$$

$$a(2a+1) - (a+5) + 5 = 2a(a+5)$$

$$4a^2 + a - a - 5 + 5 = (4a^2 + 10a)(2a+1)$$

$$4a^2 = 8a^3 + 4a^2 + 20a^2 + 10a$$

$$8a^3 + 20a^2 + 10a - 4 = 0$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}$$

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{12-x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4} - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} + 3-x = 4 \cdot (3-x)(4+x) - 20\sqrt{(3-x)(4+x)} + 25$$

$$7 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} = 4 \cdot (3-x)(4+x) - 20\sqrt{(3-x)(4+x)} + 25$$

$$7 - 2t = 4t^2 - 20t + 25$$

$$4t^2 - 18t + 18 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 9 = 0$$

$$2t^2 - 6t - 3t + 9 = 0$$

$$2t(t-3) - 3(t-3) = 0$$

$$t = 3 \dots \dots$$

$$t = \frac{3}{2}$$

$$\frac{12 - 12x + (x^2 + 4x)^2}{2} = a_3$$

$$x^2 + x - \frac{39}{4} = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 39}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{40}}{2}$$

$$\begin{aligned} a_0 + 1 &= 12 - 12x \\ a_0 + 3t &= (x^2 + 4x)^2 \cdot 2 \\ a_0 + 7t &= -6x^2 \\ 2a_0 + 6t - a_0 - 7t &= \\ &= 2x^4 + 2 \cdot 8x^3 + 16x^2 + 16x^2 = \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.  $a_2 = 12 - 2x = a_1 \cdot q, x = ?$

$a_4 = (x^2 + 4x)^2 = a_1 \cdot q^3 = \frac{\sqrt{a_1 \cdot q^5}}{q^2} = \sqrt{(12 - 2x) \cdot (-6x^2)}$

$a_8 = (-6x^2) = a_1 \cdot q^7$

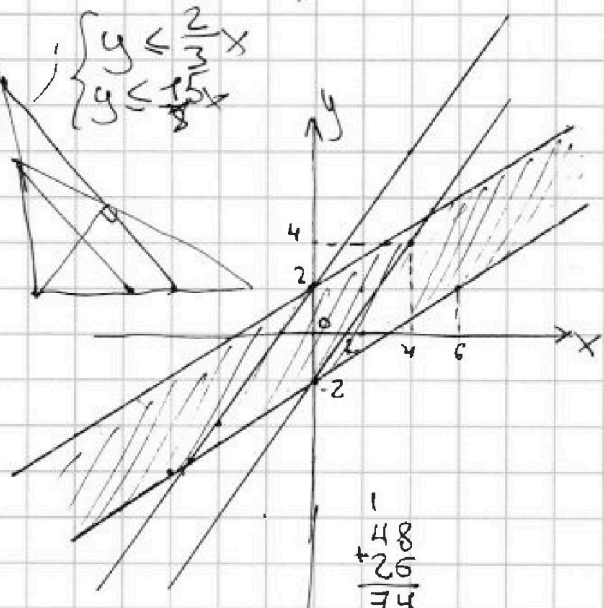
$q = \frac{(12 - 2x)(-6x^2)}{(x^2 + 4x)^2}$

$52 - 3 \cdot 24 = 3 \cdot 26 = 60 + 18 = 78$   
 $= 52 - 60 - 12 = 40 - 60 = -20$

2.  $10x + 5y = k$   $|2x - 3y| \leq 6 \rightarrow 3y = 2x - 6$   
 $5y = k - 10x \rightarrow y = \frac{k}{5} - 2x$   $|3x - 2y| \leq 4 \rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$

4 сл.:  $\begin{cases} 2x - 3y \geq 0 \\ 3x - 2y \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} 2x \geq 3y \\ 3x \geq 2y \end{cases} ; \begin{cases} y \leq \frac{2}{3}x \\ y \leq \frac{3}{2}x \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} 2x - 3y \leq 6 \\ 3x - 2y \leq 4 \\ 5x - 5y \leq 10 \end{cases} ; \begin{cases} 10x + 5y = k \\ 5y = -10x + k \\ y = \frac{1}{5}x + \frac{k}{5} \end{cases}$



$\begin{matrix} 48 \\ + 26 \\ \hline 74 \end{matrix}$

$|2x - 3y| \leq 6$   
 $2x - 3y \geq 0; 2x \geq 3y; x \geq 1,5y$   
 $2x - 3y = 6 \rightarrow 3y = 2x - 6$   
 $\rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$

$x \leq 1,5y$   
 $3y - 2x = 6 \rightarrow 3y = 2x + 6$   
 $y = \frac{2}{3}x + 2$

$|3x - 2y| = 4$  : 4 сл.  $3x - 2y \geq 0$ :  
 $3x \geq 2y \rightarrow 1,5x \geq y$ ;  $3x - 2y = 4$   
 $2y = 3x - 4$   
 $y = \frac{3}{2}x - 2$

$3x - 2y \leq 0: 3x \leq 2y$   
 $2y - 3x = 4 \quad x \leq \frac{2}{3}y$   
 $2y = 3x + 4$   
 $y = 1,5x + 2$

$\begin{cases} 1,5x + 2 = \frac{2}{3}x - 2 \\ 1,5y \leq x \leq \frac{2}{3}y \end{cases}$

$\frac{3x}{2} - \frac{2x}{3} = -4; \frac{9-4}{6} \cdot x = -4; x = \frac{-4 \cdot 6}{5} = -\frac{4 \cdot 6 \cdot 2}{10} = -4,8$

$y = -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 10} - 2 = -\frac{16}{5} - 2 = -3,2 - 2 = -5,2$   
 $52 \cdot 2 \geq -\frac{54 \cdot 2}{3 \cdot 10} = -3,6 \geq -4,8 \checkmark$   
 $52 \cdot 5 = 26$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. 
$$\begin{cases} A = m^2 - 4mh + 4h^2 + 13m - 26h = 17p^2 \\ B = \frac{m^2h - 2mn^2 - 2mh}{mn(m-2n-2)} = 15q^2 \end{cases} \quad p, q - \text{целым}$$

$$\begin{aligned} A &= (m-2n)^2 + 13(m-2n) = 17p^2 = (m-2n)(m-2n+13) = 17p^2 \\ B &= mn(m-2n-2) = 15q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} m-2n+13 = 17 \\ m-2n+13 = p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-2n \stackrel{17}{=} 0 \\ m-2n+13 \stackrel{17}{=} 0 \end{cases} \quad 144-64 = 80$$

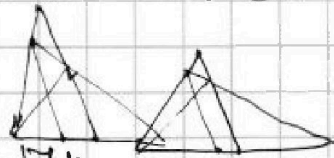
4 цел. корня  $\begin{cases} m-2n = 17 \\ m-2n+13 = p^2 \end{cases} \rightarrow 17+13 = p^2 = 30 \rightarrow \emptyset$

4 цел. корня  $\begin{cases} (m-2n) = p^2 \\ m-2n+13 = 17 \end{cases} ; \begin{cases} m-2n = p^2 \rightarrow p=2 \\ m-2n = 4 \end{cases} \quad \text{цел. корня}$

$$\rightarrow \begin{cases} mn(m-2n-2) = 15q^2 \\ m-2n = 4 \end{cases} \rightarrow mn \cdot 2 = 15q^2 \rightarrow \text{цел. корня } q=2:$$

$$\rightarrow \begin{cases} m-2n = 4 \rightarrow m = 4+2n \\ mn = 30 \end{cases} \quad \text{цел. корня } 6 \cdot 5; 3 \cdot 10$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = 10 \\ n = 3 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 4n + 8n^2 &= 30; \quad n^2 + 2n - 15 = 0 \\ n^2 - 3n + 5n - 15 &= 0 \\ (n-3)(n+5) &= 0 \\ \begin{cases} n = 3 \\ n = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

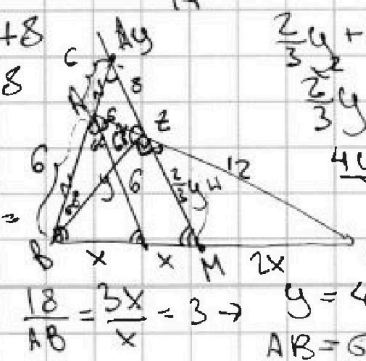
4 цел. корня  $\begin{cases} m-2n = 17p \\ m-2n+13 = p \end{cases} \rightarrow m-2n = 17p$

$$m-2n - (m-2n+13) = 16p, \quad 16p = -13 \text{ цел.}$$

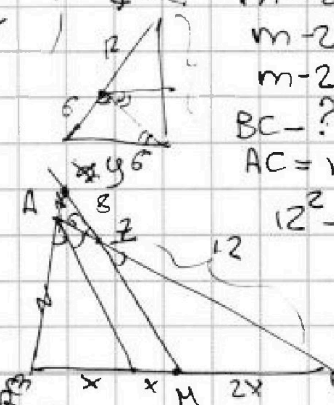
4 цел.:  $\begin{cases} m-2n = 1 \\ m-2n+13 = 17p^2 \end{cases} \rightarrow \emptyset$

4 цел.  $\begin{cases} m-2n = 17p^2 \\ m-2n+13 = 1 \\ m-2n = -12 \end{cases}$

$$\begin{aligned} 2y &= \frac{2}{3}y + 8 \\ 2y - \frac{2}{3}y &= 8 \\ \frac{4}{3}y &= 8 \\ y &= \frac{8 \cdot 3}{4} = 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{2}{3}y + 8 &= \frac{y}{2} \\ \frac{2}{3}y - \frac{y}{2} &= -8 \\ \frac{4y - 3y}{6} &= -8 \\ \frac{y}{6} &= -8 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AC &= 18; \quad AZ = 6; \quad CZ = 8 \\ 12^2 - 8^2 &= 4^2(9-4) = 4^2 \cdot 5 \\ BZ &= 4\sqrt{5} \\ BC &= 12^2 + 16 \cdot 5 = 144 + 80 = 224 \\ &= 2 \cdot 112 = 4 \cdot 56 = 4 \cdot 7 \cdot 8 \end{aligned}$$

$$\frac{18}{AB} = \frac{3x}{x} = 3 \rightarrow y = 48, \quad AB = 6, \quad BC = 4\sqrt{14}$$