



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.

Пусть a_{12} - R -число, q - ее знаменатель (знак - смена проф.)

$$a_{12} = 2 - x \quad a_{10} = \frac{a_n}{q^2} = \sqrt{(25x+34)(3x+1)} \Rightarrow q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+1)}} \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$a_{18} = a_{12} \cdot q^6 = a_n \cdot (q^2)^3 = (2-x) \cdot \frac{(2-x)^3}{\sqrt{(25x+34)(3x+1)}^3} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+1)^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-x)^4 = (25x+34)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 25x + 34 \\ x^2 - 4x + 4 = -25x - 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 29x - 30 = 0 \\ x^2 + 21x + 38 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 30 > 2 \\ x = -2 \\ x = -19 \end{cases}$$

П/ч $x = -1$ $(25x+34)(3x+1) = -9 < 0$, значит, a_{10} не опре. ?!

$$\text{П/ч } x = -2 \quad a_{12} = 4 \quad q^2 = \frac{4}{\sqrt{(-16) \cdot (-9)}} = \frac{1}{2} \quad a_{10} = \frac{a_{12}}{q^2} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 = \sqrt{(25 \cdot (-2) + 34) \cdot (-2)} \\ a_{18} = a_{12} \cdot q^6 = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 = \sqrt{\frac{25 \cdot (-2) + 34}{(-2+2)^3}}$$

То есть $x = -2$ и $x = -19$

$$\text{Аналогично } x = -19 \quad a_{12} = 21 \quad q^2 = \frac{21}{\sqrt{(4+1) \cdot (-15)}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \quad \log \log \log \dots$$

Ответ: $x \in \{-2, -19\}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$|y+2| + 2|y-18| = (|y+2| + |y-18|) + |y-18| \geq 20 + |y-18| \geq 20$$

$|y+2+18-y| = 20$
 кр-во Δ

$$\sqrt{400-z^2} \leq \sqrt{400} = 20$$

Равенства только кр $y=18, z=0$.

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{-3x-x^2+18} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$A = \sqrt{x+6} \quad B = \sqrt{3-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A - B + 7 = 2AB \\ 9 = A^2 + B^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow 9 - (A-B) + 7 = (A-B)^2 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow (A-B)^2 + (A-B) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A-B = 1 \\ A-B = -2 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 1 \\ \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} = 1 \\ 9 - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} = 9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+6)(3-x)} = 4 \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ \sqrt{(x+6)(3-x)} = 5 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - 3x + 18 = 16 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 2 = 0 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 - 14x + 72 = 25 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 14x - 47 = 0 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-6 \pm \sqrt{14}}{4} \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-3}{2} \\ x = \frac{-2\sqrt{14}-3}{2} \end{cases}$$

Отв: $\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}; 18; 0\right); \left(-\frac{7+2\sqrt{14}}{2}; 18; 0\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.

$$p \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos 2x = 4 \cos^2 x - 2 \cos x \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\Leftrightarrow 4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 \cos x + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0 \Leftrightarrow p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 2 \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^2 = 0 \quad \begin{matrix} p-1 = a^3 \\ \Leftrightarrow (a \cos x + \cos x + 1)(a^2 \cos^2 x + a \cos x (\cos x + 1) + (\cos x + 1)^2) = 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+1) \cos x = -1 \\ a^2 \cos^2 x + a \cos x (\cos x + 1) + (\cos x + 1)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1) \cos x = -1 \\ a \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1) \cos x = -1 \\ a = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

$a > 0$: $\textcircled{1} \cos x = -\frac{1}{a+1} \Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{a+1}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $p > 1$

$a = 0$: $\textcircled{1} \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $p = 1$

$a \in (-2; 0)$: $\Leftrightarrow (a+1) \cos x = -1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$
 $p \in (-2; 1)$

$a < -2$: $\textcircled{1} \cos x = -\frac{1}{a+1} \Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{a+1}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$a = -2$: $\textcircled{1} \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $p = -7$
 $p < -7$

Other:

- $p < -7$ $\left\{ \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right) + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $p = -7$ $\left\{ 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $p \in (-7; 1)$ \emptyset
- $p = 1$ $\left\{ \pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $p > 1$ $\left\{ \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{p+1}}\right) + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

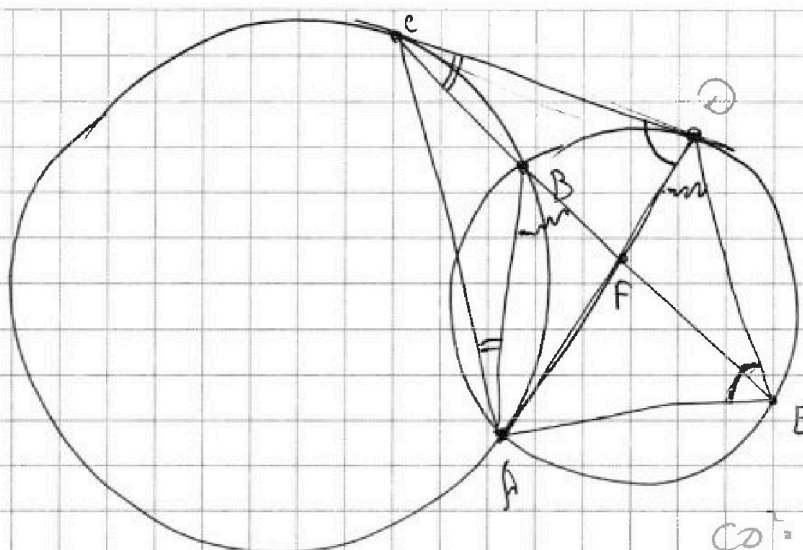


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$CF = 7x$$

$$FE = 20x$$

AB - хорда.

По т. об кас.
и хорде
равны отрезки

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$\frac{S_{CDF}}{S_{EDF}} = \frac{CF}{FE} = \frac{7}{20} = \frac{CD \cdot AD \cdot \sin \angle CDA}{ED \cdot AD \cdot \sin \angle EDA} = \frac{CD}{ED} \cdot \frac{\sin \angle CDA}{\sin \angle EDA} \quad (*)$$

~~$$\frac{AE}{\sin \angle EDA} = \frac{AD}{\sin \angle AED}$$~~

$$(*) \frac{CD}{ED} \cdot \frac{AD}{AE}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

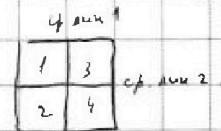
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Искомое кол-во это кол: $(\text{кол-во способов с 4 сим}) + (\text{кол-во сп. с осев. сим. 1}) +$
 $+ (\text{кол-во сп. с осев. сим. 2}) - (\text{кол-во сп. с 4-х и осев. сим. 1}) - (\text{кол-во с 4-х и осев. сим. 2})$
 $- (\text{кол-во сп. с ос. сим. 1 и осев. сим. 2}) + (\text{кол-во сп. с 4-х и осев. 1 и осев. 2})$

Для подсчета N_1 достаточно рассмотреть:



В центр. сим. фигуре карточки илюст. 2 зоны 1+2 и 3+4 (по 4 клетки).
 В зоне 3+4 симметрично встает по зоне 1+2.

Пусть N кол-во клеток в 1 = кол-во в 2 = ...

Тогда $N_1 = C_{2N}^4$ — кол-во сп. из 2N клеток (1+2) встает 4.

Для подсчета N_2 . Символ в (1+2) и (3+4) фигуры клетки, и символ не определяется

части (1+2): $N_2 = C_{2N}^4$

Аналогично, $N_3 = C_{2N}^4$.

Центр. сим $R_0^4 = S_0^4 \circ S_0^4$, где $l_1 \perp l_2$, $l_1, l_2 \neq 0$. Известно,

если какая-то фигура имеет два каких-то свойства, то имеет и третье.

Известно, $N_5 = N_4 = N_6 = N_7$.

Для подсчета N_2 достаточно выбрать 2 клетки в 1. и две другие
 справа симм. (сплошная фигура ср. сим. 1, сплошная фигура ср. сим. 2)

$N_2 = C_N^2$

Итого искомое кол-во равно $3 \cdot C_{2N}^4 - 3 \cdot C_N^2 + C_N^2 = 3 \cdot C_{2N}^4 - 2C_N^2$

$N = \frac{1}{4}(500 \cdot 120) = 30 \cdot 500 = 15000$

Ответ: $3 \cdot C_{20000}^4 - 2C_{15000}^2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
\ ИЗ \

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. $(a-c)(b-c) = p^2, p \in \mathbb{P} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a-c = p^2 & a > b?! \\ b-c = 1 & \\ a-c = p & a < b?! \\ b-c = p^2 & \\ a-c = -p^2 & a > b?! \\ a-c = -p & \\ b-c = -1 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \\ a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \Rightarrow b-a = p^2 - 1$ Если $p \neq 3$, то $p \neq 3 \Rightarrow p^2 \neq 1 \Rightarrow b-a \neq 3$!

Итак, $p = 3$. $a = c + 1$ $a^2 + b = c^2 + 2c + 1 + c + 9 = 1000 \Leftrightarrow c^2 + 3c - 990 = 0 \Leftrightarrow$
 $b = c + 9$ $D = 9 + 4 \cdot 990 = 9(1 + 440) = 9 \cdot 441$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2} \\ c = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 30 \\ a = 31 \\ b = 39 \end{cases} \leftarrow 0 < a, b-a = 8/3 \quad (a-c)(b-c) = 9 = 3^2$
 $\begin{cases} c = -33 \\ a = -32 \\ b = -24 \end{cases} \leftarrow 0 > a, b-a = 8/3 \quad (a-c)(b-c) = 9 = 3^2$

2) $\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \Rightarrow b-a = p^2 - 1$ Аналогично, $p = 3$.

$\begin{cases} a-c = 9 \\ b-c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a+b = c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000 \Leftrightarrow c^2 - 17c - 920 = 0$ $a^2 \quad b^2$
 $D = 361 + 4 \cdot 920 = 4041 \in (3961, 4036)$!

Ответ: $\{(31; 39; 30); (-32; -24; -33)\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.

$$(a-c)(b-c) = p^2, p \in \mathbb{P} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a-c=p^2 & a>b?! \\ b-c=1 & a=b?! \\ a-c=1 & a=b?! \\ b-c=p^2 & a>b?! \\ a-c=p^2 & a>b?! \\ b-c=1 & a=b?! \\ a-c=1 & a=b?! \\ b-c=p^2 & a>b?! \\ a-c=p^2 & a>b?! \\ b-c=1 & a=b?! \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-c=p^2 & (1) \\ b-c=1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow a-b = p^2 - 1$$

Если $p \neq 3$, то $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a-b \equiv 0 \pmod{3}$?!

$$\text{Если } p=3: \begin{cases} a=c+9 \\ b=c+1 \end{cases} \Rightarrow a^2+b = c^2+2c+1+c+9 = 1000 \Rightarrow c^2+3c+10=1000 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2+3c-990=0 \quad \Delta = 9+4 \cdot 990 = 3609 \in (60^2, 61^2) \quad ?!$$

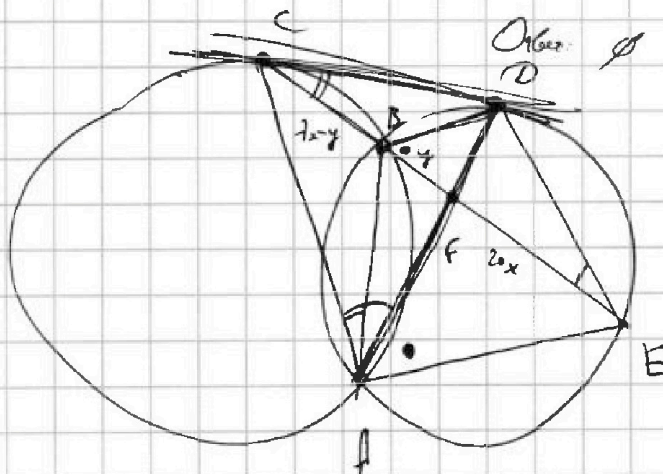
$$(2) \quad \begin{cases} a-c=-p^2 \\ b-c=-1 \end{cases} \Rightarrow a-b = p^2 - 1$$

Аналогично при $p \neq 3$ несл. реш.

$$p=3: \begin{cases} a=c-9 \\ b=c-1 \end{cases} \Rightarrow a^2+b = c^2-18c+81+c-1 = 1000 \Rightarrow c^2-17c-920=0$$

$$\Delta = 17^2 + 4 \cdot 920 = 4041 \in (3969, 4096) \quad ?!$$

Значит, такая тройка нест.



$$CF:FE = 7:20$$

$$DF+DA = 2x^2$$

$$(7x-y)(20x+y) = c^2$$

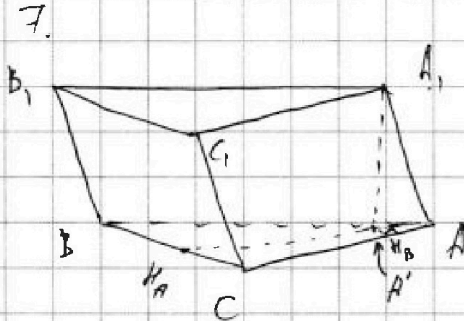


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S(BD_1CC) = 5$$

$$S(AA_1C_1C) = S'(AA_1B_1B) = 6$$

Пусть $AB = AC = \dots = a$.

Пусть $A' = P_{(ABC)}(A)$

$H_B \in AC, A'H_B \perp AC$

По т. о 3-х нпн. $A'H_B \perp AC$.

$\Rightarrow A'H_B$ - вис наф. AA_1C_1C и т.к. $S' = a \cdot h$, то $A'H_B = \frac{6}{a}$

Аналогично, $H_C \in AB, A'H_C = \frac{6}{a}$. Ко тому $\triangle AA'H_C = \triangle AA'H_B$.

$\Rightarrow A'H_B = H_C A' \Rightarrow A'$ лежит на бис AH_A (на пер., вис.)

$BC \perp AH_A, AH_A = P_{(AA_1)}(A) \Rightarrow DC \perp AA_1 \Rightarrow DC \perp CC_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow BB_1CC_1$ - крм. $\Rightarrow a \cdot CC_1 = 5 \Rightarrow CC_1 = AA_1 = BB_1 = \frac{5}{a}$

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ - площадь $\triangle ABC \Rightarrow a^2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$A'H_B = \frac{6}{a} > \frac{5}{a} = AA_1$?!

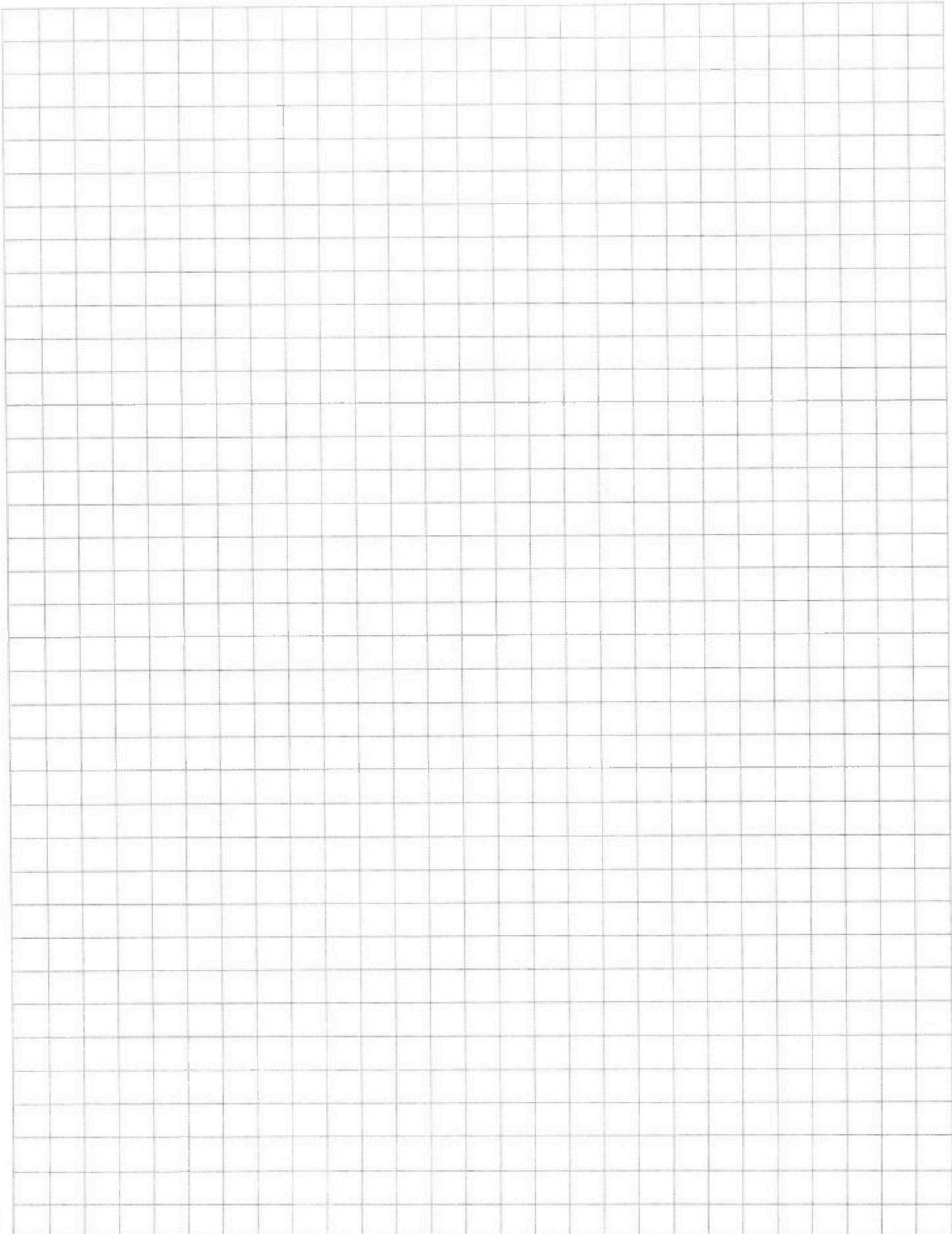


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается **черновиком** и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





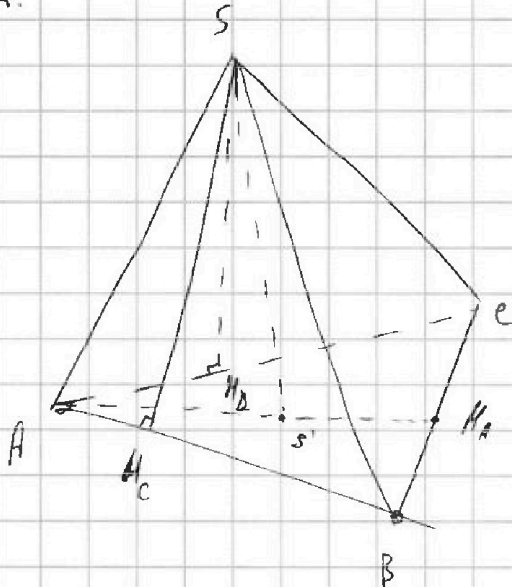
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.



$$S(SAB) = S(SAC) = 6$$

$$S(SBC) = 5$$

$\triangle ABC$ - \triangle .

Рыча $AB = BC = AC = a$.

Означим h - высоту на $AB = AC$
и $SH_B = SH_C$.

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SH_B = SH_C = \frac{12}{a} \cdot SH_A = \frac{10}{a}$$

Рыча S' - проекция S' на (ABC) .

По т. о 3-х мфн. $S'H_D \perp AC$ и $S'H_C \perp AB$

Уг. падения α мфн. $\Rightarrow SS'H_C = \alpha SS'H_B$ $\Rightarrow SH_C = SH_B \Rightarrow S'$ лежит на бисс. A .

AS'_A - бисс., мфн., бисс. $\triangle ABC$. $S' \in AS'_A$

Рыча $AS' = x$ $AS'_A = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow S'A = \frac{\sqrt{3}a}{2} - x$

$$S'H_C = S'A \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} x$$

По т. Пиф. $\triangle SS'H_C = \triangle SS'H_A$:
 $SS' = h$

$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} - x\right)^2 = \frac{100}{a^2}$$

$$h^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{100}{a^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{3}{4}a^2 - \sqrt{3}ax - \frac{x^2}{4} = -\frac{100}{a^2} \Leftrightarrow 3a^2x^2 - 4\sqrt{3}a^3x + 3a^4 + 100 = 0$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}a \pm \sqrt{12a^6 - 9a^6}}{3a^2} = \frac{2\sqrt{3}a \pm \sqrt{3}a}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}a \pm \sqrt{12a^6 - 9a^6 - 52a^6}}{3a^2} = \frac{2\sqrt{3}a \pm \sqrt{100a^6 - 52a^6}}{3}$$

$$4 = S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$a^2 = \frac{16}{3}$$

$$x = \frac{8\sqrt{3} \pm \sqrt{100 - 52}}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A - B + 7 = AB$$

$$A^2 + B^2 = 9$$

$$\frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{3} \cos x + \frac{7}{9} = 2 \cdot \sin x \cos x$$

$$h_{ED} = DF \cdot \sin \angle EDF$$

$$h_{CD} = BF \cdot \sin \angle DBA$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2 \\ (x-d)^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

$$CD \cdot CE = 4 \cos^2$$

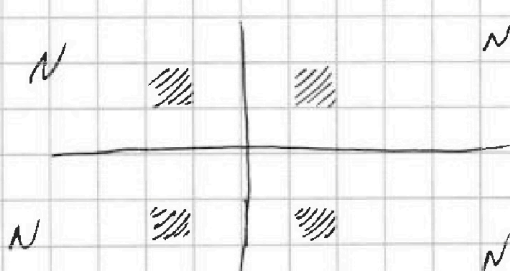
$$\frac{S_{CDF}}{S_{EDF}} = \frac{7}{20}$$

$$\begin{array}{r} x \ 25 \\ \times \ 19 \\ \hline + 225 \\ \times \ 25 \\ \hline 475 \\ - 31 \\ \hline 444 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \cdot 3 = 57 \\ \times \ 2 \\ \hline 55 \end{array}$$

$$x^2 - x^2 + 2dx - d^2 = R^2 - r^2 \Rightarrow x = \frac{R^2 - r^2 + d^2}{2d}$$

$$y = \sqrt{R^2 - \frac{(R^2 - r^2 + d^2)^2}{4d^2}} = \frac{1}{2d} \sqrt{(2dR)^2 - (R^2 - r^2 + d^2)^2} = \sqrt{(\frac{r^2 - (R-d)^2}{2d}) \cdot (\frac{(R+d)^2 - r^2}{2d})}$$



$$\begin{aligned} C_{2N}^4 + C_{2N}^4 + C_{2N}^4 \\ - C_N^2 = 3 \cdot C_{2N}^4 - 2C_N^2 \\ 3 \cdot C_{30000}^4 - 2 \cdot C_{15000}^2 \end{aligned}$$

$$N = \frac{500 \cdot 100}{4} = 12500$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A-B = 2AB - 7$$

$$A = \frac{B-7}{1-2B}$$

$$\frac{(A-7)^2}{(2A-1)^2} + B^2 = 9$$

$$|y+2| + |y-18| + |y-18| \geq 20$$

$$y = 18 \quad 20 =$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} + 7 = \sqrt{AB}$$

$$A + B - 2\sqrt{AB} = AB - 14\sqrt{AB} + 49$$

$$A + B - AB - 49 = -16\sqrt{AB}$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{(x+6)(3-x)}$$

$$A - B + 7 = 2AB$$

$$7 = A + B - 2$$

$$A - B + A + B - 2 = 2AB$$

$$2A - 2 = 2AB \Rightarrow 1 = A(1-B)$$

$$A - 1 + \frac{1}{A} + 7 = 2A - 2$$

$$A + \frac{1}{A} + 8 = 2A$$

$$A = \frac{B-7}{1-2B}$$

$$B = 1 - \frac{1}{A}$$

$$A(1-B) = B-7$$

$$A+B^2=9$$

$$A-B=AB-7$$

$$A, B \geq 0$$

$$D_{MC} = \frac{25000}{a} = \frac{12}{a}$$

$$D' = \sqrt{\left(\frac{12}{a}\right)^2 - x^2} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - 4\right)^2 + \left(\frac{10}{a}\right)^2}$$

$$\left(\frac{12}{a}\right)^2 - x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - 4\right)^2 + \left(\frac{10}{a}\right)^2$$

$$A = 7$$

$$B = 0$$

$$-6 \leq x \leq 3$$

$$y = 18 \quad z = 0$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = \sqrt{18-3x-x^2}$$

$$-(x+6)(x+3)$$

$$\sqrt{18-x(3+x)}$$

$$= \sqrt{18 - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)} = \sqrt{\frac{72-9}{4}}$$

$$= \frac{2\sqrt{63}}{2} \approx 4$$

$$2\sqrt{63} \approx 15.9$$



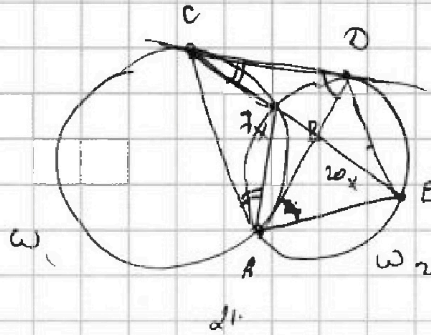
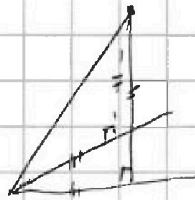
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

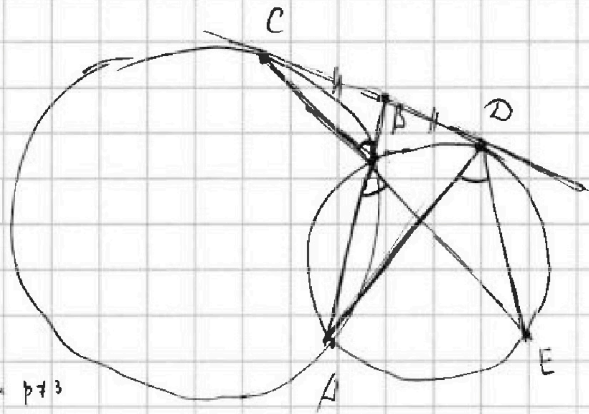
1 2 3 4 5 6 7
+ + + - + +



$$\frac{5}{5}$$

a	a ² mod 3
0	0
1	1
2	1

$$b-a = 1-p^2 \equiv 0 \pmod 3 \text{ если } p \neq 3$$



1008	2
504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	3

$$p=3: a^2 + b = (c+g)^2 + c+1 = 1000$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a-c = b-c = p^2 \\ b-c = p^2 \\ a-c = p^2 \\ b-c = p^2 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} a-c = b-c = p^2 \\ a-c = -p^2 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \\ 3672 \\ 361 \\ \hline 4033 \end{array}$$

$$a = p^2 + c$$

$$b = c + 1$$

$$\begin{array}{r} - 1000 \\ 82 \\ \times 918 \\ \hline 3672 \end{array}$$

$$a = c - 1 \quad b - a = 1 - p^2$$

$$b = c - p^2 \quad p = 3$$

$$c^2 + 18c + 81 + c + 1 = 1000 \quad c^2 + 19c - 918 = 0$$

$$D = 361 + 3672 = 4033 \quad !!$$

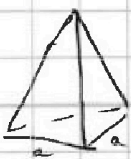
$$a^2 + b = \begin{cases} + \\ 3672 \\ 361 \\ \hline 4033 \end{cases} \quad !!$$

$$c = 1005 \quad a = 1004$$

$$b = 996$$

$$c^2 - 2c + 1 + c - 1000 = 0 \quad c^2 - c - 1000 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 1000 = 4001 \quad !!$$



$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_{10} \quad a_{10} \cdot q^2 \quad a_{10} \cdot q^8$$

$$x \leq 2$$

$$q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$q^8 = \frac{(2-x)^4}{(25x+34)(3x+2)}$$

$$(25x+34)(3x+2) > 0$$

$$\frac{a_{12}}{q^2} \quad a_{12} \quad a_{12} \cdot q^6$$

$$q^2 = \frac{2-x}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}}$$

$$a_{12} \cdot q^6 = \frac{(2-x)^4}{\sqrt{(25x+34)^3(3x+2)^3}} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

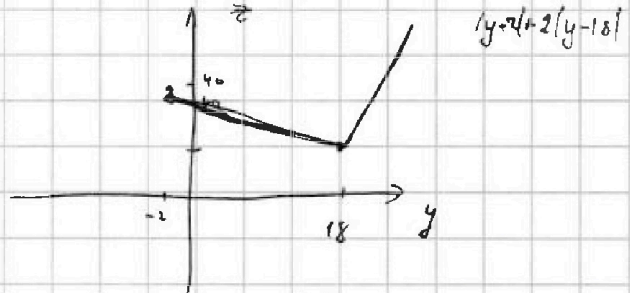
$$\begin{aligned} (2-x)^2 &= 25x+34 & \Leftrightarrow x^2 - 29x - 30 &= 0 & \Leftrightarrow \begin{cases} x=30 \\ x=-2 \end{cases} \\ (2+x)^2 &= -25x-34 & \Leftrightarrow x^2 + 21x + 38 &= 0 & \Leftrightarrow \begin{cases} x=-19 \\ x=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x=-1 \quad a_{12}=3 \quad q^2 = \frac{3}{\sqrt{9}}$$

$$x=-2 \quad a_{12}=4 \quad q^2 = \frac{4}{\sqrt{-16 \cdot -1}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$x=-19 \quad a_{12}=21 \quad q^2 = \frac{21}{\sqrt{\dots}}$$

$$a_{12}=4 \quad a_{10}=8 \quad a_{18} = \frac{1}{2}$$



$$\cos 3x = 4 \cos^2 x - 3 \cos x$$

$$\begin{aligned} 4p \cdot \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 &= 0 & 0 &\leq p + 6 + 3p + 12 + 10 &= 0 \\ \cos x = t & & 4p + 28 &\geq 0 & p \geq -7 \\ 4p t^3 + 12t^2 + 12 \cos t + 4 &= 0 & -p &\leq 6 + 3p + 12 + 10 &\leq 0 \\ & & 4p &\geq -8 & \boxed{p \geq -2} \end{aligned}$$

$$p t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0 \quad (p-1)t^3 + (t+1)^3 = 0$$

$$p-1 = a^3 \quad (at + t+1)(a^2 t^2 + at(t+1) + (t+1)^2) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{(x+6)(3-x)} - 7$$

$$\begin{cases} A - B = 2AB - 7 \\ A^2 + B^2 = 9 \end{cases}$$

$$A = 3\cos d \quad B = 3\sin d$$

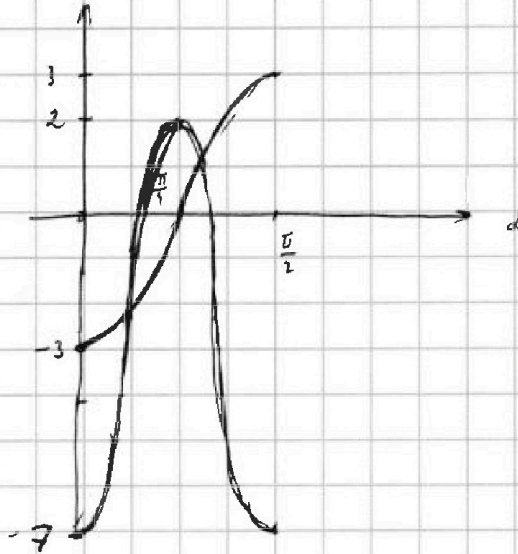
$$3\cos d - 3\sin d = 18\sin d \cos d - 7$$

$$3\cos d \left(2 + \frac{1}{\sin d}\right) = 9\sin 2d - 7$$

$$\begin{aligned} 3\sin d - 3\cos d - 18\cos d \sin d &= -7 \\ 9\sin^2 d & \end{aligned}$$

$$3\cos d + 3\sin d - 18\cos 2d = 0$$

$$\cos d + \sin d = 6 \cos 2d$$



$$A^2 + B^2 - 2AB + 7 = 9 - (A - B)$$

$$t^2 + 7 = 9 - t \quad t^2 + t - 2 = 0$$

$$36 + 4 \cdot 47 = 4 \cdot (9 + 47) = 4 \cdot 56 = 16 \cdot 14$$

$$920 \cdot 4 = 3680$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ 1041 \end{array}$$

$$361 + 4 \cdot 920 = 3680 + 361 = 4041$$

$$65^2 = 4225$$

$$63^2 =$$

$$64^2 = 2^{12} = 4096$$

$$\begin{array}{r} \times 63 \\ 63 \\ \hline 189 \\ 378 \\ \hline 3969 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4096 \\ 128 \\ \hline 3968 \end{array}$$

$$48 \cdot 11 = 528$$

$$(64^2 - 1)^2 = 4096 - 128 + 1$$

$$\sqrt{5a} + \frac{\sqrt{5}}{3}a =$$

$$\begin{array}{r} \times 126 \\ 3 \\ \hline 520 \end{array}$$

$$528$$

$$528$$

$$528$$

$$528$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{5a} = \frac{24}{\sqrt{5}}$$

$$4$$

$$66$$

$$\begin{array}{r} 528 \\ 4 \\ \hline 2112 \end{array}$$

$$2d$$

$$3316$$

(132)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{144}{a^2} = \frac{x^2}{4} + h^2$$

$$\frac{100}{a^2} = \left(\frac{\sqrt{3}a - x}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\frac{x^2}{4} - x^2 - \frac{3}{4}a^2 + \sqrt{3}ax = \frac{44}{a^2} \quad // \cdot 4a^2$$

$$-3a^2x^2 + 4\sqrt{3}a^3x - 3a^4 - 44 \cdot 4 = 0$$

$$3a^2x^2 - 4\sqrt{3}a^3x + 3a^4 + \underbrace{44 \cdot 4}_{=176} = 0$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}a^3 \pm \sqrt{12a^6 - 9a^6 - 176a^2}}{3a^2} = \frac{2\sqrt{3}a \pm \sqrt{3a^2 - \frac{176}{a^2}}}{3}$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$a^2 = \frac{16}{3}$$

$$-9a^6 - \frac{3 \cdot 176}{a^2} = 3a^2 - 33\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} \times 44 \\ \hline 176 \\ \times 3 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$8\sqrt{3} \pm \sqrt{16\sqrt{3} - 33\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}a^3 \pm \sqrt{12a^6 - 9a^6 - \frac{3 \cdot 176}{a^2}}}{3a^2} = \frac{2\sqrt{3}a \pm \sqrt{3a^2 - \frac{176}{a^2}}}{3}$$

$$a^2 = \frac{16}{3}$$

$$\sqrt{16\sqrt{3} - 33\sqrt{3}}$$

$$\cos 3x = \operatorname{Re} (\cos x + i \sin x)^3 \quad \cos^3 x = 3 \cos x \sin^2 x$$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + 3 \cos x \sin^2 x$$

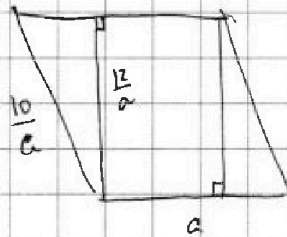
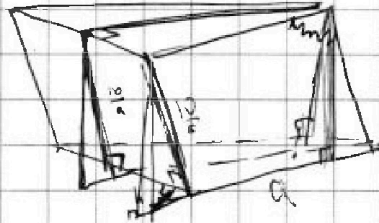
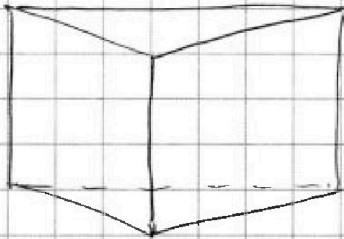


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



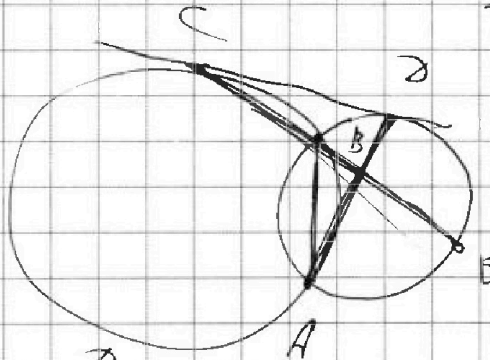
$$CD = 2.2x$$

$$CD = 3\sqrt{2}x$$

$$\begin{array}{r}
 + 920 \\
 \hline
 + 3680 \\
 \hline
 4000
 \end{array}$$

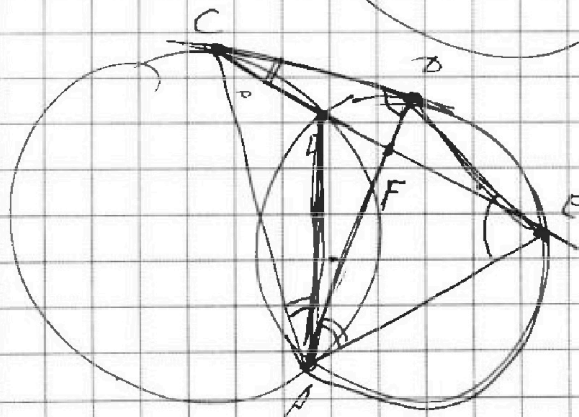
$$h+x = \frac{16}{a}$$

$$\frac{1}{2} \cdot d \cdot \frac{5}{a} \cdot \sin \alpha = 6 \\
 \sin \alpha = \frac{12}{5}$$



$$BF \cdot FE = AF \cdot FD$$

$$\begin{aligned}
 CD \cdot CE &= CD^2 \\
 BF \cdot FE &= AF \cdot FD
 \end{aligned}$$



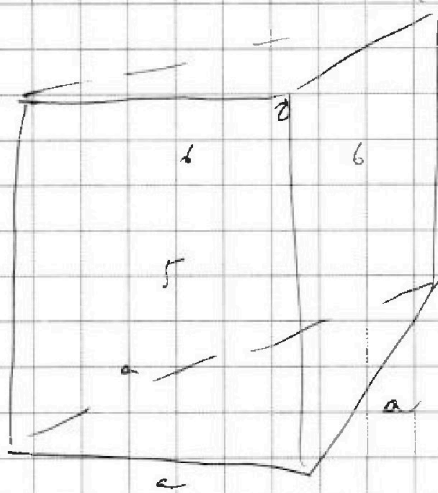
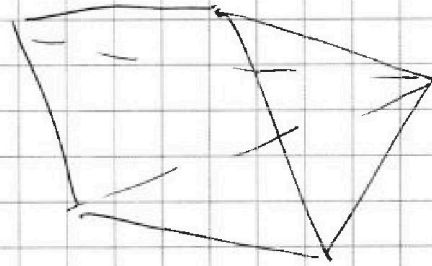
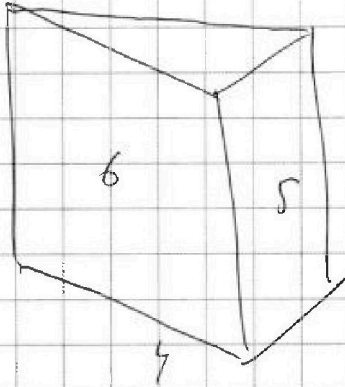


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$a \cdot b = c \quad h = \frac{c}{a}$$

