



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



✕ [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

✕ [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

✕ [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

✕ [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_n = b \cdot q^{n-1}$$

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$a_{13} = 5-x$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\frac{a_{15} a_7}{a_7 a_7} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = \frac{a_{15}}{a_7} = \sqrt{(x+1)^4} = |(x+1)^2| = (x+1)^2$$

$$\frac{a_{15}}{a_7} = \frac{b \cdot q^{14}}{b \cdot q^6} = q^8 \Rightarrow q^8 = (x+1)^2 \Rightarrow q^4 = \pm(x+1)$$

$$q^4 \geq 0 \Rightarrow q^4 = |x+1| \Rightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

$$q^2 = \frac{b \cdot q^{14}}{b \cdot q^{12}} = \frac{a_{15}}{a_{13}} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$\sqrt{|x+1|} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$(5-x)\sqrt{|x+1|} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$(13x-35)(x+1) \geq 0$$

$$(5-x)^2 |x+1| = (13x-35)(x+1)$$

I $x+1 \geq 0$

$$(5-x)^2 (x+1) = (13x-35)(x+1)$$

I $x+1=0$
 $x=-1$

II $x \neq 0$

$$(5-x)^2 = 13x-35$$

$$25-10x+x^2 = 13x-35$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 60 = 529 - 240 = 289 = 17^2$$

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm 17}{2} = \frac{23+17}{2} / \frac{23-17}{2} = \frac{40}{2} / \frac{6}{2} = 20 / 3$$

$$x_1 = 20 \quad x_2 = 3$$

$$x_1+1 \geq 0 \quad x_2+1 \geq 0$$

Граница 1 из 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{II} \quad x+1 < 0$$

$$x < -1$$

$$-(5-x)^2(x+1) = (13x-35)(x+1) \quad x \neq -1$$

$$-25+10x-x^2 = 13x-35$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$D = 9+4 \cdot 10 = 49 = 7^2$$

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm 7}{2} = \frac{-3+7}{2} \quad / \quad \frac{-3-7}{2} = \frac{4}{2} \quad / \quad \frac{-10}{2} = 2 \quad / \quad -5$$

$$x_3 = 2 \quad x_4 = -5$$

$$x_3 \geq -1 \quad x_4 < -1$$

$x_0 = -1, x_1 = 20, x_2 = 3, x_4 = -5$ могут подойти
но надо проверить
023

$$f(x) = (13x-35)(x+1) \geq 0$$

При x_0 ~~тогда~~ $f(x_0) = 0$

$$x_1 \neq -1 \quad f(x_1) = (13 \cdot 20 - 35)(20+1) > 0$$

$$f(x_2) = (13 \cdot 3 - 35)(3+1) > 0$$

$$f(x_4) = (13 \cdot (-5) - 35)(-5+1) \geq 0$$

$$\frac{13x-35}{(x+1)^2} \geq 0 \quad x \neq -1$$

$$\frac{13x-35}{x+1} \geq 0 \quad \text{т.к. } (x+1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (13x-35)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x_0 \text{ не подходит}$$

А x_1, x_2, x_4 подходят

Ответ: $x \in \{20, 3, -5\}$

Страница 2 из 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad \cos x = t$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\begin{aligned} & \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = \\ & = 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = \\ & = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = \\ & = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 \\ & t \in [-1, 1] \Rightarrow x = \arccos(t) \end{aligned}$$

$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$ нужно найти min и max значение, которое принимает $f(t)$ при $t \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4 \cdot 3 \cdot t^2 + 6 \cdot 2t + 3 = 12t^2 + 12t + 3 = 3(4t^2 + 4t + 1) = \\ &= 3(2t + 1)^2 \end{aligned}$$

Экстремум при $2t + 1 = 0 \quad t = -\frac{1}{2} \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = \\ &= 4 \cdot \frac{-1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} + \frac{-3}{2} - 3 = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -\left(3 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 3(-1) - 3 = \\ &= -4 + 6 - 3 - 3 = -4 \end{aligned}$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$\Rightarrow p \in [-4, 10]$$

Страница 1 из 1

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



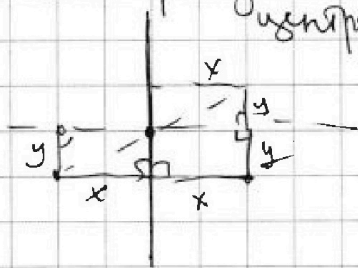
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если закрашенное мн-во симметрично относительно двух каких-то осей, то оно симметрично и относительно третьей, т.к.

Для Δ ~~прямую~~ симметрию относительно прямой и центральную симметрию (центр симметрии лежит на прямой симметрии)



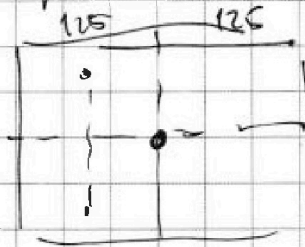
Пусть точка располож. на радиус. x и y , для которых мы все докажем

Тогда Δ симметричен относительно прямой Δ потом относ. центра. Видно, что расстояние до прямой сохраняется \Rightarrow доказано

Теперь посчитаем сколько способов выбрать мн-во, чтобы было симметрично относительно центра

Для это надо посчитать кол-во вариантов разместить 4 клетки в верхней части арка, т.к. остальные 4 будут определены по расположению клеток

В верхней части (половине) 100
 $C_4^{100} = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97$
 клеток = 25000



Аналогично, для прямой x

C_4^{25000}

Итого $3 \cdot C_4^{25000}$, но нужно вычесть случаи когда мн-во симметрично относительно всех объектов сразу (относительно только двух быть не может по условию сверху)

Тогда кол-во способов разместить так мн-во, это кол-во способов разместить 2 клетки в верхней левой четверти ар-ка, так как во ~~остальных~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В каждую из двух четвертей однозначно
определим расположение двух кассет
из-за симметрии.

$$C_{125 \cdot 100}^2 = C_{12500}^2$$

Ответ $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$

т.к. здесь мы ставим коэф-т 2, т.к.
мешки симметричны учтены
2 раза

Ответ: $3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4) a + b^2 = 560$$

$$a = 560 - b^2$$

$$1) a > b \Leftrightarrow 560 - b^2 > b$$

$$0 > b^2 + b - 560$$

$$2) a - b \stackrel{DVA}{\times} 3$$

$$560 - b^2 - b \times 3 \quad 560 \stackrel{DVA}{\div} 3 \stackrel{DVA}{=} 2$$

$$2 - b^2 - b \times 3$$

$$b^2 + b - 2 \times 3$$

$$(b-1)(b+2) \times 3 \Leftrightarrow b \neq 1$$

$$3) (a-c)(b-c) = p^2$$

$$(560 - b^2 - c)(b-c) = p^2$$

т.к. p - простое возможны 2 случая

$$I \quad 560 - b^2 - c = b - c \Rightarrow p$$

$$560 - b^2 = b$$

$$b^2 + b - 560 = 0, \text{ но } b^2 + b - 560 > 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$II \quad 1. 560 - b^2 - c = 1$$

$$b - c = p^2$$

$$* 560 - b^2 - c > b - c$$

$$2. 560 - b^2 - c = p^2$$

$$b - c = 1$$

т.к.

$$3. 560 - b^2 - c = -p^2$$

$$b - c = -1$$

$$a - c > b - c$$

$$4. 560 - b^2 - c = -1$$

$$b - c = -p^2$$

$$a > b$$

$$III \quad 560 - b^2 - c = 1, \quad b - c = p^2$$

$$c = 559 - b^2$$

$$b - c = b + b^2 - 559 = p^2$$

$$D \Delta \quad b^2 + b - (559 + p^2) = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 559 + 4p^2 =$$

$$= 2237 + 4p^2 = 2237 + 4p^2 = x^2 \quad | x \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 - (2p)^2 = 2237$$

$$(x - 2p)(x + 2p) = 2237$$

$\Rightarrow p \geq 2$
 \Rightarrow случаи 1, 4, 3 отпадают

Страница 1 из 4



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x	x ²	x	4x
0	0	0	0
1	1	1	4
2	4	2	8
3	0	3	3
4	7	4	7
5	7	5	2
6	0	6	6
7	4	7	1
8	1	8	5

$$\Rightarrow 1 - 4p^2 = x^2 \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 1 - 4p^2 \equiv \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{matrix}$$

$$1 - (2p)^2 \equiv \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{matrix}$$

$$-(2p)^2 \equiv \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{matrix}$$

$$(2p)^2 \equiv \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -6 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{т.к. } \log_{10} \\ \text{от } \\ \text{т.к. } (2p)^2 \\ \text{— кб.т} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (2p)^2 \equiv 0 \quad \text{или} \quad (2p)^2 \equiv 1$$

$$\Downarrow \\ p=3 \text{ т.к. } p\text{-простое}$$

$$4p^2 \equiv 1 \Rightarrow p^2 \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow p \equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$

~~$$3 \quad 5 \quad 13 \quad 17 \quad 23 \quad 29$$~~

Осталось 4 вар-та
 $p=3, p=5, p=13, p=23$

$$I \quad p=3$$

$$D = 2245 - 4 \cdot 3^2 =$$

$$= 2245 - 36 =$$

$$= 2209 = 47^2$$

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm 47}{2} = \frac{-1+47}{2} \quad \bigg| \quad \frac{-1-47}{2} =$$

$$= 23 \quad \bigg| \quad -24$$

~~$$I \quad p=2 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$~~

~~$$II \quad p=7 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$~~

~~$$III \quad p=11 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$~~

~~$$IV \quad p=17 \not\equiv 8 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$~~

~~$$V \quad p=19 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$~~

~~$$VI \quad p=29 \equiv 2 \not\equiv \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2. $b - c = 1$

$c = b - 1$

$560 - b^2 - b + 1 = p^2$

$561 - b^2 - b = p^2$

$b^2 + b + p^2 - 561 = 0$

$D = 1 - 4(p^2 - 561) =$

$= 1 - 4p^2 + 2244 = 2245 - 4p^2 = x^2 \quad (x \in \mathbb{Z})$

~~В случае 2 целых решений b нет.~~

4. $560 - b^2 - c = -1 \quad b - c = -p^2$

$c = 560 - b^2 + 1 = 561 - b^2$

$b - c = -p^2$

$b - (561 - b^2) = p^2$

$561 - b^2 = p^2$

$b^2 + b + p^2 - 561 = 0$

$b^2 + b + p^2 - 561 = 0$

$D = 1 - 4(p^2 - 561) = 1 - 4p^2 + 2244 =$

$= 2245 - 4p^2 = x^2, x \in \mathbb{Z}$

$2245 = (2p)^2 + x^2$

Пусть $p \geq 30 \Rightarrow 4p^2 \geq 4 \cdot 30 \cdot 30 = 4 \cdot 30 \cdot 30 =$

$= 3600$

$= 3600$

$\Rightarrow 2245 - 4p^2 < 0$

$\Rightarrow p < 30$

~~2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29~~ - все простые < 30

~~Рассмотрим~~

Рассмотрим остатки кв-тов по модулю 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II $p = 5$

$$D = 2245 - 4 \cdot 5^2 = 2245 - 4 \cdot 25 = 2145$$

$$\begin{array}{r} 2145 : 5 \\ 2145 \overline{) 25} \\ \underline{200} \\ 145 \\ \underline{125} \\ 20 \end{array}$$

$\Rightarrow 2145 \times 25$
 $\Rightarrow 2145$ - не квадрат
улаво числа
 $\Rightarrow p=5$ не возм.

III $p = 13$

$$D = 2245 - 4 \cdot 13^2 = 2245 - 676 = 1569$$

$$\begin{array}{r} 39^2 = 1521 \\ 40^2 = 1600 \\ 38^2 = 1444 \end{array}$$

$\Rightarrow 39^2 < 1569 < 40^2$
 $\Rightarrow 1569$ - не квт
 $\Rightarrow p=13$ нет решений

IV $p = 23$

$$D = 2245 - 4 \cdot 23^2 =$$

$$2245 - 2116 = 129$$

$$11^2 < 129 < 12^2$$

$\Rightarrow p=23$ единств. вариант.

$$b_1 = 23 \quad b_2 = -24$$

Случай 2. $b_1 = 23$
Всегда $c = b_1 - 1 \Rightarrow c = 22$

$$a = 560 - b_1^2 = 31 \quad (31, 23, 22)$$

1. $a > b$

$$b_2 = -24$$

$$c = b_2 - 1 = -24 - 1 = -25 \quad (-16, -24, -25)$$

$$a = 560 - b_2^2 = -16$$

Случай 4. $c = 561 - b_1^2 = 32 \quad (31, 23, 32)$

$$b_1 = 23$$

$$a = 560 - b_1^2 = 31$$

$$b_2 = -24$$

$$c = 561 - b_2^2 = -15$$

$$a = 560 - b_2^2 = -16 \quad (-16, -24, -15)$$

Проверим ответы

Ответ: $(31, 23, 22), (31, 23, 32)$
 $(-16, -24, -25), (-16, -24, -15)$

1. $a > b$ где всех случаев

2. $a = b \times 3$ где всех случаев

3. $(a-c)(b+c)$ $(31-22)(23+22) = 9$ $(-16+25)(-24+25) = 9$ $(-16+15)(-24+15) = 9$

4. $a+b^2=560$

$(31-32)(23+32) = 9$ $31+23^2=560$ $-16+(-24)^2=560$



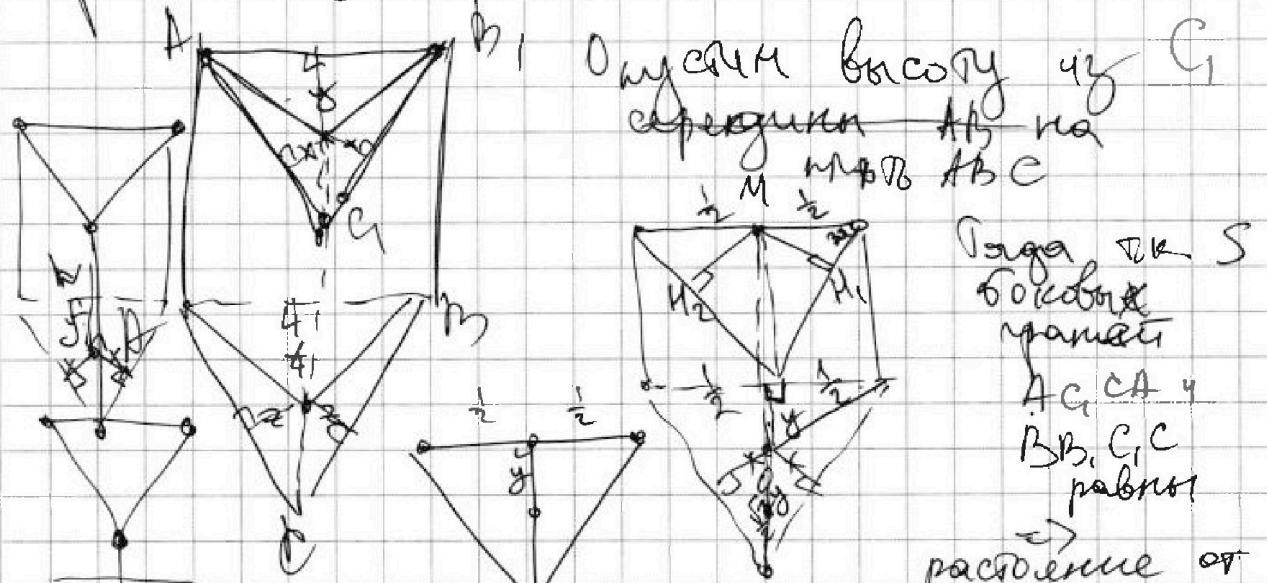
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что раз площади у двух граней равны \Rightarrow перенос ~~на~~ ~~основание~~ ~~параллельной~~ ~~вектору~~ ~~высоты~~ ~~параллельной~~ ~~основанию~~ вектору высоты



Обозначим расстояние от O до AB за y
Тогда $y^2 + h^2 = 16$

$\Rightarrow y^2 + h^2 = 16 \quad (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + h^2 = 16$

~~$(x - \frac{1}{4})^2 + h^2 = 9$~~
 ~~$(x - \frac{1}{4})^2 + h^2 = 9$~~
 ~~$y^2 + h^2 = 16$~~
 ~~$x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}y$~~
 ~~$(x - \frac{1}{4})^2 - y^2 = 9 - 16 = -7$~~

$x = (h - y) \cdot \sin 80^\circ = (\frac{\sqrt{3}}{2} - y) \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}y$

$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2x$

Вспомогательная диаграмма: Треугольник с высотой y и основанием x, угол 80 градусов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + h^2 = 9 \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2x\right)^2 + h^2 = 16 \end{cases}$$

$$\ominus \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2x\right)^2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 7$$

$$\frac{3}{4} + 4x^2 - 2\sqrt{3}x - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} = 7$$

$$3x^2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = 7$$

$$3x^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{11}{16} - 7 = 0$$

$$3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + h^2 = 9$$

$$4x^2 - 2\sqrt{3}x + \frac{3}{4} + h^2 = 16$$

$$3x^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = 7$$

$$3x^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{11}{16} = 7$$

$$3x^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)x + \frac{101}{16} = 0$$

$$D = \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right)^2 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{101}{16} =$$

$$= \frac{1}{4} + 4 \cdot 3 - 2\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{101}{4} =$$

$$= 12 + \frac{102}{4} - 2\sqrt{3} = 12 + \frac{51}{2} - 2\sqrt{3} =$$

$$= \frac{75}{2} - 2\sqrt{3} = \frac{1}{4} + 12 - 2\sqrt{3} + \frac{303}{4} = \frac{304}{4} + 12 - 2\sqrt{3} =$$

$$= 76 + 12 - 2\sqrt{3} = 88 - 2\sqrt{3}$$

Распишем высоты $ABBA$, по т. Пифагора $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)^2 + h^2}$
 Знаем $h_1 = 3 \Rightarrow$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y\right)^2 + h^2 = 16$$

$$x^2 + h^2 = 9$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$$

$$4x^2 + h^2 = 16$$

$$x^2 + h^2 = 9$$

$$4x^2 + h^2 = 16$$

$$4x^2 + 4h^2 = 16$$

$$3h^2 = 20$$

$$h^2 = \frac{20}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3} - \frac{1}{2} + \sqrt{90 - 2\sqrt{3}}}{2}$$

так как с \ominus
отриц. значение

$$h^2 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 9 =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left(\left(2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{75}{2} - 2\sqrt{3} + 2 \left(2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left(12 + \frac{1}{4} - 2\sqrt{3} + \frac{75}{2} - 2\sqrt{3} + (4\sqrt{3} - 1) \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left(\frac{49}{4} - 4\sqrt{3} + \frac{75}{2} + \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} (4\sqrt{3} - 1) \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left(\frac{199}{4} - 4\sqrt{3} + (4\sqrt{3} - 1) \sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{16} (4x - 1)^2 =$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{20}{3}}$$

$$= 9 - \frac{1}{16} \left(4\sqrt{3} - \frac{1}{2} + 4\sqrt{90 - 2\sqrt{3}} - 1 \right)^2 =$$

Ответ: $\sqrt{\frac{20}{3}}$

$$= 9 - \frac{1}{16} \left(4\sqrt{3} - 2 + 4\sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right)^2 =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left(2\sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{90 - 2\sqrt{3}} \right)^2 =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left((2\sqrt{3} - 1)^2 + 4(2\sqrt{3} - 1)\sqrt{90 - 2\sqrt{3}} + 4(90 - 2\sqrt{3}) \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} \left(12 + 1 - 4\sqrt{3} + (8\sqrt{3} - 4)\sqrt{90 - 2\sqrt{3}} + 360 - 8\sqrt{3} \right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{4} (373 - 12\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 4)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical solution on grid paper, featuring multiple geometric diagrams and algebraic calculations. The diagrams include triangles with internal lines, circles, and various points labeled with letters (A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, AA, AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, AI, AJ, AK, AL, AM, AN, AO, AP, AQ, AR, AS, AT, AU, AV, AW, AX, AY, AZ, BA, BB, BC, BD, BE, BF, BG, BH, BI, BJ, BK, BL, BM, BN, BO, BP, BQ, BR, BS, BT, BU, BV, BW, BX, BY, BZ, CA, CB, CC, CD, CE, CF, CG, CH, CI, CJ, CK, CL, CM, CN, CO, CP, CQ, CR, CS, CT, CU, CV, CW, CX, CY, CZ, DA, DB, DC, DD, DE, DF, DG, DH, DI, DJ, DK, DL, DM, DN, DO, DP, DQ, DR, DS, DT, DU, DV, DW, DX, DY, DZ, EA, EB, EC, ED, EE, EF, EG, EH, EI, EJ, EK, EL, EM, EN, EO, EP, EQ, ER, ES, ET, EU, EV, EW, EX, EY, EZ, FA, FB, FC, FD, FE, FF, FG, FH, FI, FJ, FK, FL, FM, FN, FO, FP, FQ, FR, FS, FT, FU, FV, FW, FX, FY, FZ, GA, GB, GC, GD, GE, GF, GG, GH, GI, GJ, GK, GL, GM, GN, GO, GP, GQ, GR, GS, GT, GU, GV, GW, GX, GY, GZ, HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG, HH, HI, HJ, HK, HL, HM, HN, HO, HP, HQ, HR, HS, HT, HU, HV, HW, HX, HY, HZ, IA, IB, IC, ID, IE, IF, IG, IH, II, IJ, IK, IL, IM, IN, IO, IP, IQ, IR, IS, IT, IU, IV, IW, IX, IY, IZ, JA, JB, JC, JD, JE, JF, JG, JH, JI, JJ, JK, JL, JM, JN, JO, JP, JQ, JR, JS, JT, JU, JV, JW, JX, JY, JZ, KA, KB, KC, KD, KE, KF, KG, KH, KI, KJ, KK, KL, KM, KN, KO, KP, KQ, KR, KS, KT, KU, KV, KW, KX, KY, KZ, LA, LB, LC, LD, LE, LF, LG, LH, LI, LJ, LK, LL, LM, LN, LO, LP, LQ, LR, LS, LT, LU, LV, LW, LX, LY, LZ, MA, MB, MC, MD, ME, MF, MG, MH, MI, MJ, MK, ML, MM, MN, MO, MP, MQ, MR, MS, MT, MU, MV, MW, MX, MY, MZ, NA, NB, NC, ND, NE, NF, NG, NH, NI, NJ, NK, NL, NM, NN, NO, NP, NQ, NR, NS, NT, NU, NV, NW, NX, NY, NZ, OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH, OI, OJ, OK, OL, OM, ON, OO, OP, OQ, OR, OS, OT, OU, OV, OW, OX, OY, OZ, PA, PB, PC, PD, PE, PF, PG, PH, PI, PJ, PK, PL, PM, PN, PO, PP, PQ, PR, PS, PT, PU, PV, PW, PX, PY, PZ, QA, QB, QC, QD, QE, QF, QG, QH, QI, QJ, QK, QL, QM, QN, QO, QP, QQ, QR, QS, QT, QU, QV, QW, QX, QY, QZ, RA, RB, RC, RD, RE, RF, RG, RH, RI, RJ, RK, RL, RM, RN, RO, RP, RQ, RR, RS, RT, RU, RV, RW, RX, RY, RZ, SA, SB, SC, SD, SE, SF, SG, SH, SI, SJ, SK, SL, SM, SN, SO, SP, SQ, SR, SS, ST, SU, SV, SW, SX, SY, SZ, TA, TB, TC, TD, TE, TF, TG, TH, TI, TJ, TK, TL, TM, TN, TO, TP, TQ, TR, TS, TT, TU, TV, TW, TX, TY, TZ, UA, UB, UC, UD, UE, UF, UG, UH, UI, UJ, UK, UL, UM, UN, UO, UP, UQ, UR, US, UT, UU, UV, UW, UX, UY, UZ, VA, VB, VC, VD, VE, VF, VG, VH, VI, VJ, VK, VL, VM, VN, VO, VP, VQ, VR, VS, VT, VU, VV, VW, VX, VY, VZ, WA, WB, WC, WD, WE, WF, WG, WH, WI, WJ, WK, WL, WM, WN, WO, WP, WQ, WR, WS, WT, WU, WV, WW, WX, WY, WZ, XA, XB, XC, XD, XE, XF, XG, XH, XI, XJ, XK, XL, XM, XN, XO, XP, XQ, XR, XS, XT, XU, XV, XW, XX, XY, XZ, YA, YB, YC, YD, YE, YF, YG, YH, YI, YJ, YK, YL, YM, YN, YO, YP, YQ, YR, YS, YT, YU, YV, YW, YX, YY, YZ, ZA, ZB, ZC, ZD, ZE, ZF, ZG, ZH, ZI, ZJ, ZK, ZL, ZM, ZN, ZO, ZP, ZQ, ZR, ZS, ZT, ZU, ZV, ZW, ZX, ZY, ZZ.

Key elements of the solution include:
 - **Geometric Diagrams:** Multiple triangles and quadrilaterals are drawn on the grid, often with circles passing through vertices. Points are labeled with letters and numbers (e.g., 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120).
 - **Algebraic Calculations:** Numerous numerical operations are shown, including multiplication, division, and addition/subtraction. Some calculations are written vertically, while others are more horizontal. For example, $2245 \times 169 = 379405$ is shown in multiple places. Other calculations involve fractions like $\frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{DE}{\sin \beta}$.
 - **Trigonometric Relationships:** Several sine rule applications are visible, such as $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.
 - **Final Results:** The number 13 is written in the bottom right corner, likely representing the final answer to the problem.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on grid paper, including:

- Arithmetic problems: $41 \times 41 = 164$, $39 \times 39 = 1521$, $23 \times 23 = 529$, $13 \times 13 = 169$, $529 \times 4 = 2116$.
- Geometric diagrams: 3D prisms, triangles, and squares with various dimensions and labels.
- Algebraic calculations: $2245 - 2116 = 129$, $8A3 =$, $31 - 22$.
- Coordinate geometry: Points $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ are marked on a coordinate system.
- Hand-drawn boxes and scribbled areas.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^5}} = 6 \cdot 9^6 \quad a_1 = 6$$

$$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = 6 \cdot 9^{14} \quad 200$$

$$a_{13} = 5^{-x}$$

$$\frac{a_{15}}{a_7} = 9^{14-6} = 9^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{13x-35}}$$

$$\sqrt{(x+1)^2} = (x+1)^2 \quad 5-x \quad 13-7=6 \quad 15-13=2$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = 6$$

$$\cos 3x = \cos(x+2x) =$$

$$= \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x =$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cdot \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x) \cdot \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x + 2\cos^2 x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x + 6\cos^2 x - 3$$

$$t^2 + 3 = 3(t^2 + 4t + 1)$$

$$t^2 + 3 = 3t^2 + 12t + 3 \Rightarrow 2t^2 + 12t = 0$$

$$2t(t+6) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ or } t = -6$$

$$t = \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{3\pi}{2}$$

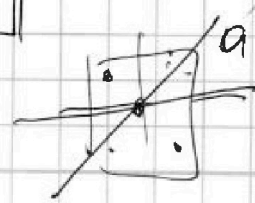
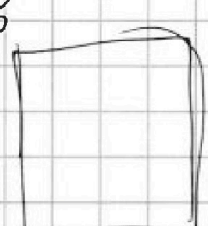
$$t = \cos x = -6 \text{ (not possible)}$$

$$560 - b^2 = c \quad 560 - b$$

$$a - c > b - c \Rightarrow a > b$$

$$x = 0 \rightarrow 4 \rightarrow 0 \rightarrow 7 \rightarrow 0 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8$$



Handwritten arithmetic calculations including long division and multiplication:

- $\frac{23}{17} \cdot \frac{17}{17} = \frac{23}{17}$
- $\frac{22}{45} \cdot \frac{45}{45} = \frac{22}{45}$
- $\frac{20}{24} \cdot \frac{24}{24} = \frac{20}{24}$
- $\frac{20}{45} \cdot \frac{45}{45} = \frac{20}{45}$
- $\frac{449}{13} \cdot \frac{13}{13} = \frac{449}{13}$
- $\frac{39}{5} \cdot \frac{5}{5} = \frac{39}{5}$
- $\frac{23}{69} \cdot \frac{69}{69} = \frac{23}{69}$
- $\frac{48}{529} \cdot \frac{529}{529} = \frac{48}{529}$
- $\frac{560}{31} \cdot \frac{31}{31} = \frac{560}{31}$
- $\frac{17}{34} \cdot \frac{34}{34} = \frac{17}{34}$
- $\frac{109}{109} \cdot \frac{109}{109} = \frac{109}{109}$
- $\frac{17}{19} \cdot \frac{19}{19} = \frac{17}{19}$
- $\frac{6}{102} \cdot \frac{102}{102} = \frac{6}{102}$
- $\frac{449}{69} \cdot \frac{69}{69} = \frac{449}{69}$
- $\frac{38}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{38}{2}$
- $\frac{69}{23} \cdot \frac{23}{23} = \frac{69}{23}$
- $\frac{449}{23} \cdot \frac{23}{23} = \frac{449}{23}$
- $\frac{23}{11} \cdot \frac{11}{11} = \frac{23}{11}$
- $\frac{219}{203} \cdot \frac{203}{203} = \frac{219}{203}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b$$

$$a - b \times 3 = 2 \sqrt{b^2 + b} + z$$

$$(a - c)(b + c) = p^2$$

$$a + b^2 = 560$$

$$b^2 = 560 - a$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y + \dots + 3| \dots = \sqrt{168 - z^2}$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a + b^2 = 560$$

$$a = 560 - b^2$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$a - c = 41$$

$$b - c = 4p^2$$

$$560 - b^2 - c = b - c$$

$$560 - b^2 - b = 0$$

$$b^2 + b - 560 = 0$$

$$b = 560 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 560}$$

$$560 - b^2 - c = 1$$

$$c = 560 - b^2 - 1 = 559 - b^2$$

$$b - c = b^2 + b - 559 = p^2$$

$$b^2 + b - (559 + p^2) = 0$$

$$D = 1 + 4(559 + p^2) = 2237 + 4p^2 = x$$

$$y = 20 \cdot 20$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{x+3} - 8\sqrt{-x} \\ 576 \\ 560 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$D = 2240 \pm 100$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 8 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2237 \\ \div 31 \\ \hline 71 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2237 \\ \div 67 \\ \hline 33 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2237 \\ \div 11 \\ \hline 203 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2237 \\ \div 13 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \div 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2244 \\ \div 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 224 \\ \div 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1600 \\ \div 4 \end{array}$$

