



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5-x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$35 - 13x = (5 - x)^2$$

$$35 - 13x = 25 - 10x + x^2$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0. \text{ ~~реш~~$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2 - \text{не подходит} \\ x = -5 - \checkmark \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -5$ , тогда  $q = \sqrt[4]{4}$ , проверкой убеждаемся, что подходит.

3) Если  $q = -\sqrt[4]{x+1}$ , то мы получим

тоже самое, что и в случае 1, т.к.

$$\left(-\sqrt[4]{x+1}\right)^6 = \left(\sqrt[4]{x+1}\right)^6. \text{ В этом случае } x = -5 \text{ и } q = -\sqrt[4]{4}.$$

4) С  $q = -\sqrt[4]{x+1}$  аналогично. Станем,

заменим это число как. представим возведем по модулю, т.к.  $b_1 b_2 > b_3$ , но  $q$  можем быть отрицательными.

В таком случае члены будут чередоваться знаками.

$\Rightarrow$  Ответ:  $x = -5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Если  $q$  - знаменатель иррациональности, то тогда:

$$b_7 = b, q^6, \quad b_{13} = b, q^4, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{b_{13}}{b_7} = q^2 = (x+1)^2 \Rightarrow q = \pm \sqrt{x+1}$$

2. Заметим, что для всех  $x$ :

$$(13x - 35)(x+1) \geq 0$$

1) Если  $q = \sqrt{x+1}$ , то: м.е.  $x \geq -1$ .

$$b_{13} = b_7 \cdot q^6 = \sqrt{13x - 35}, \text{ м.е.}$$

$$5 - x = \sqrt{13x - 35}, \text{ откуда при } x \leq 5$$

$$\text{имеем: } 25 - 10x + x^2 \geq 13x - 35.$$

$$x^2 - 23x + 60 \geq 0.$$

$$\text{т.е. } D = 23^2 - 240 = 529 - 240 = 289$$

$$x_1 = \frac{23 + \sqrt{289}}{2} > \frac{23 + 17}{2} = 20 > 5$$

$$x_2 = \frac{23 - \sqrt{289}}{2} > \frac{23 - 17}{2} = 3 > 0, \text{ но } < \frac{25}{13}$$

$$\Rightarrow \text{отсутствуют действительные } x = \frac{23 + \sqrt{289}}{2} \text{ и } \frac{23 - \sqrt{289}}{2}.$$

2) Если  $q = \pm \sqrt{x+1}$ , м.е.  $x < -1$ , то

$$b_{13} = \sqrt{35 - 13x}, \quad \sqrt{35 - 13x} = 5 - x.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(x) = 4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3$$

$$f'(x) = -9 \sin x (2 \cos^2 x + 2 \cos x + 3) =$$

$$= -9 \sin x (2 \cos x + 1)^2. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Заметим, что  $f(x + 2\pi) = f(x)$ ,

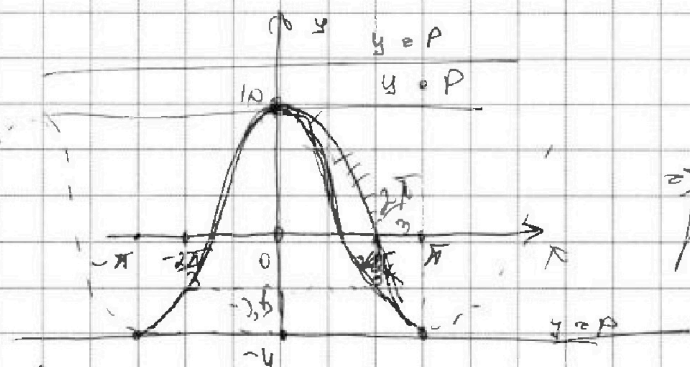
$\Rightarrow$   $f$  на  $[-\pi; \pi]$   $f'(x)$ :



Т.е.  $x = -\pi + 2\pi k$  — можем использовать,  $x = 2\pi k$  — можем использовать.

Значит  $f(x)$  на  $[-\pi; \pi]$

$$\begin{aligned} f(-\pi) &= -4 & f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= -3,5 \\ f(0) &= 10 & f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) &= 3,5 \\ f(\pi) &= -4 \end{aligned}$$



Т.е.  $E(f(x)) = [-4; 10]$ .  
 $\Rightarrow$  при  $p \in (-\infty; -4) \cup (10; +\infty)$  решений нет.

при  $p \in [-4; 10]$  — бесконечное множество решений с периодом  $2\pi$ .

Ответ: при  $p \in [-4; 10]$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. Преобразуем левую часть:

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x &= 4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = \\ &= 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 \end{aligned}$$

$$\text{Пусть } \cos x = t, |t| \leq 1$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow t \geq -\frac{1}{2} \text{ — мон. возрастающая}$$

т.е.  $f(t)$  — мон. по возраст. на обе. отрез.

доказ.

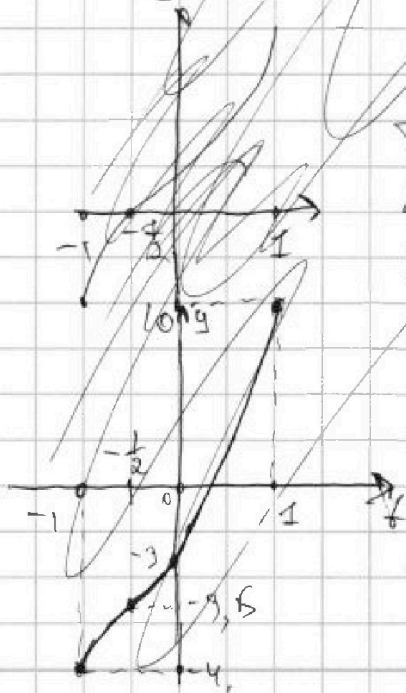
$$f(1) = -4$$

$$f(-\frac{1}{2}) = -3,5$$

$$f(0) = -3$$

$$\text{т.е. } E(f(t)) = [-4; 0] \Rightarrow$$

или  $\rho \in (-\infty; -4) \cup (0; \infty)$  — не имеет решений!

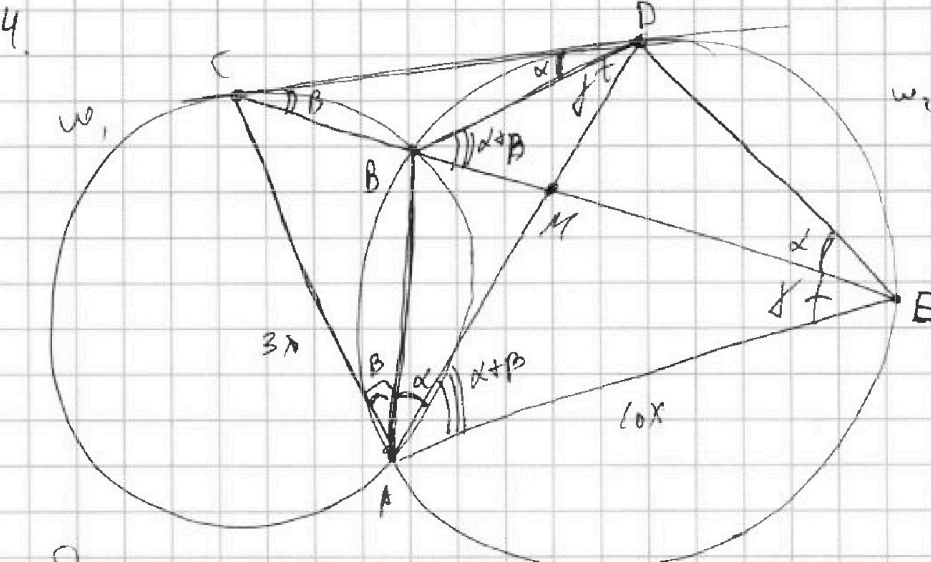


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:  $\exists AD \cap CE = M$ ,  $\angle BDC = \alpha$ ,  $\angle BCD = \beta$ , тогда  
 м.к.  $CD$  - касательная к  $w_1$  и  $w_2$ , то  
 $\angle BED = \alpha$ ,  $\angle CAB = \beta$  (из св-ва дуги между кас.  
 и хордами),  $\angle DAB = \alpha$  (из вписанности  $\triangle BDE$ )  
 $\Rightarrow \angle CAD = \alpha + \beta$ .  $\angle DBM$ :  $\angle DBM = \alpha + \beta$  (внешний)  
 $\Rightarrow \angle DAE = \alpha + \beta$  (из вписанности  $\triangle BDE$ )

$\Rightarrow KM$  - биссектриса в  $\triangle ACE \Rightarrow$

$$\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}, \quad \exists AC = 3x \Rightarrow AE = 10x.$$

$\exists \angle BDM = \gamma \Rightarrow \angle BEA = \gamma$ .  $\triangle ADE$  и  $\triangle ACD$ :

$\triangle ADB \sim \triangle ACD$  по 2 углам  $\Rightarrow$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD^2 = 30x^2 \Rightarrow AD = x\sqrt{30}.$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{x\sqrt{30}}{3x} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{30}}{3}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Обозначим множество  $A$ ,  $B$  и  $C$  как мн-во словоб разкрашим клетки горизонт, шши, верт. шши. и чертш. шши. Тогда по условию имеем равенство:

$$M = A \cup B \cup C. \text{ По формуле Вентерни-исключений: } A \cup B \cup C = A + B + C - AB - BC - CA + ABC.$$

Найдем все эти мн-ва:

$A$ : это кол-во способов закрасить 4 клетки красной краской горизонт шши в прямоугольнике, т.е.  $C_{25000}^4$ , т.к. фигуры и определяются однозначно, а клетки в верхней части - половина от всей.

$B$ : Аналогично,  $C_{25000}^4$ .

$C$ : Это мн-во кол-во способов закрасить 4 клетки, при этом закрасившие <sup>горизонт</sup> клетки, мы выкальваем из шши. ст, т.е. способ мн-ва, т.е. способ будет:  $5 \cdot 10^4 \cdot (5 \cdot 10^4 - 2) \cdot (5 \cdot 10^4 - 3) \cdot (5 \cdot 10^4 - 6)$

$AB$ : это кол-во способов выбрать

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2 клетки в левом нижнем квадрате  
(прямоугольник полученный разделили  
средним штрихом), т.е. остальные  
определяемые относительно,  $\Rightarrow C_{12500}^2$

ВАС: Запомним, что еще выделится верх,  
штрих и центральная, то из нее будем  
и вырезаем. Штрих, т.е. ВАС = АПС, АВАС.  
Таких способов, относительно САПВ, будет  
 $C_{12500}^2$ , т.е. и АПС -  $C_{12500}^2$ , т.е. формально  
выделяем клетки в левом нижнем квадрате,  
остальные будем определяемые относительно.  
Запомним, что ~~АПС + ВАС =  $\frac{2 \cdot C_{12500}^2}{2}$~~  т.е. В.  
~~Все остальные относительно АПС~~ ~~и все относительно~~  
~~Все способы относительно ВАС~~

~~ААВАС~~: АВАС:  $C_{12500}^2$

$\Rightarrow M = 2 \cdot C_{25000}^4 + (5 \cdot 10^4) \cdot (5 \cdot 10^4 - 2) \cdot (5 \cdot 10^4 - 6) \cdot (5 \cdot 10^4 - 4) - 2 \cdot C_{12500}^2$

Ответ:  $2 \cdot (C_{25000}^4 - C_{12500}^2) + 5 \cdot 10^4 \cdot (5 \cdot 10^4 - 2) \cdot (5 \cdot 10^4 - 4) \cdot (5 \cdot 10^4 - 6)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5)  $\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$  Аналогично получим  $a-b = p^2$ ,  $a-b = a$   
т.е.  $\begin{cases} b_1 = 23, a_1 = 31, c_1 = 32 \\ b_2 = -24, a_2 = -16, c_2 = -15 \end{cases}$

$\rightarrow$  тройки  $(31, 23, 32)$  и  $(-16, -24, -15)$  - подходят

6)  $\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \rightarrow$  Аналогично со случаем 3)  
получим произведения  $a-b < 0$ .

Других случаев нет  $\rightarrow$

Ответ:  $(31, 23, 32), (-16, -24, -15), (31, 23, 32), (-16, -24, -15)$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.  $\exists (a-c)(b-c) = p^2$ ,  $p$ -простое, тогда возможны 4 случая:

1)  $a-c = p, b-c = p$ , в том числе случае  $a=b$ , но  $a > b \Rightarrow \emptyset$ .

2)  $a-c = -p, b-c = -p$  аналогично с 1).

3)  $a-c = 1, b-c = p^2$ , аналогично

~~$a-b = 1-p^2$~~ , но  $p^2 \geq 2 \Rightarrow 1-p^2 < 0$ , а

по условию  $a-b > 0 \Rightarrow \emptyset$ .

~~$a-c = 1, b-c$~~

4)  $a-c = p^2, b-c = 1$ , тогда:

$a-b = p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ . По условию

$a-b \geq 3 \Rightarrow p-1 \geq 3$  и  $p+1 \geq 3$ , но в

том же случае  $p = 3$  (и.и. <sup>отсюда</sup>  $p$  делится на 3 и делится на 3)

аналогично  $p = 3 \Rightarrow p = 3, \Rightarrow$

$a-b = 8, a = 8+b$ , аналогично

$8+b+b^2 = 560 \Rightarrow b^2+b-552=0$

$(b+24)(b-23) = 0 \Rightarrow b \begin{cases} b_1 = 23 \\ b_2 = -24 \end{cases}$

Тогда  $a_1 = 31 \Rightarrow c_1 = 22$

$a_2 = -16 \Rightarrow c_2 = -25$

Т.е. тройки  $(31, 23, 22)$  и  $(-16, -24, -25)$  подходят.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.  $b_1 = \dots$   $b_{15} = \dots$   $-4\sqrt{4}$   $b_{13} = b_7 \cdot q^6 = \dots$

$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$   $b_{13} = 5-x$   $b_{15} = \sqrt{(x+1)(13x-35)}$

$b_{15} = b_7 \cdot (x+1)^2 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (x+1)^2$

$\cos(2x+x) = b_{14}^2 = (5-x)^2 \sqrt{(x+1)(13x-35)}$

$\Rightarrow \cos 2x \cos x = \dots$

$b_{15} = b_7 \cdot q^8 = \dots$

$\cos 3x \cos 2x \cos x = \dots$

$b_{13} = b_7 \cdot q^6 = \sqrt{13x-35} = 5-x$

$13x-35 = 25 - 10x + x^2$

$x^2 - 23x + 60 = 0$

$D = 23^2 - 240 = 36$

$x_1 = 20, x_2 = 3$

$x^2 - 23x + 60 = 0$

$D = 23^2 - 240 = 36$

$x_1 = 20, x_2 = 3$

$q^2 = \sqrt{x+1}$

$q^4 = \sqrt{x+1}$

$q = \sqrt[4]{x+1}$

$(\sqrt[4]{-x-1})^6 = \dots$

$(\sqrt[4]{-x-1})^6 = \dots$

$= \sqrt{(x-1)^3}$

$= \sqrt{x+1} \sqrt{x+1} = \dots$



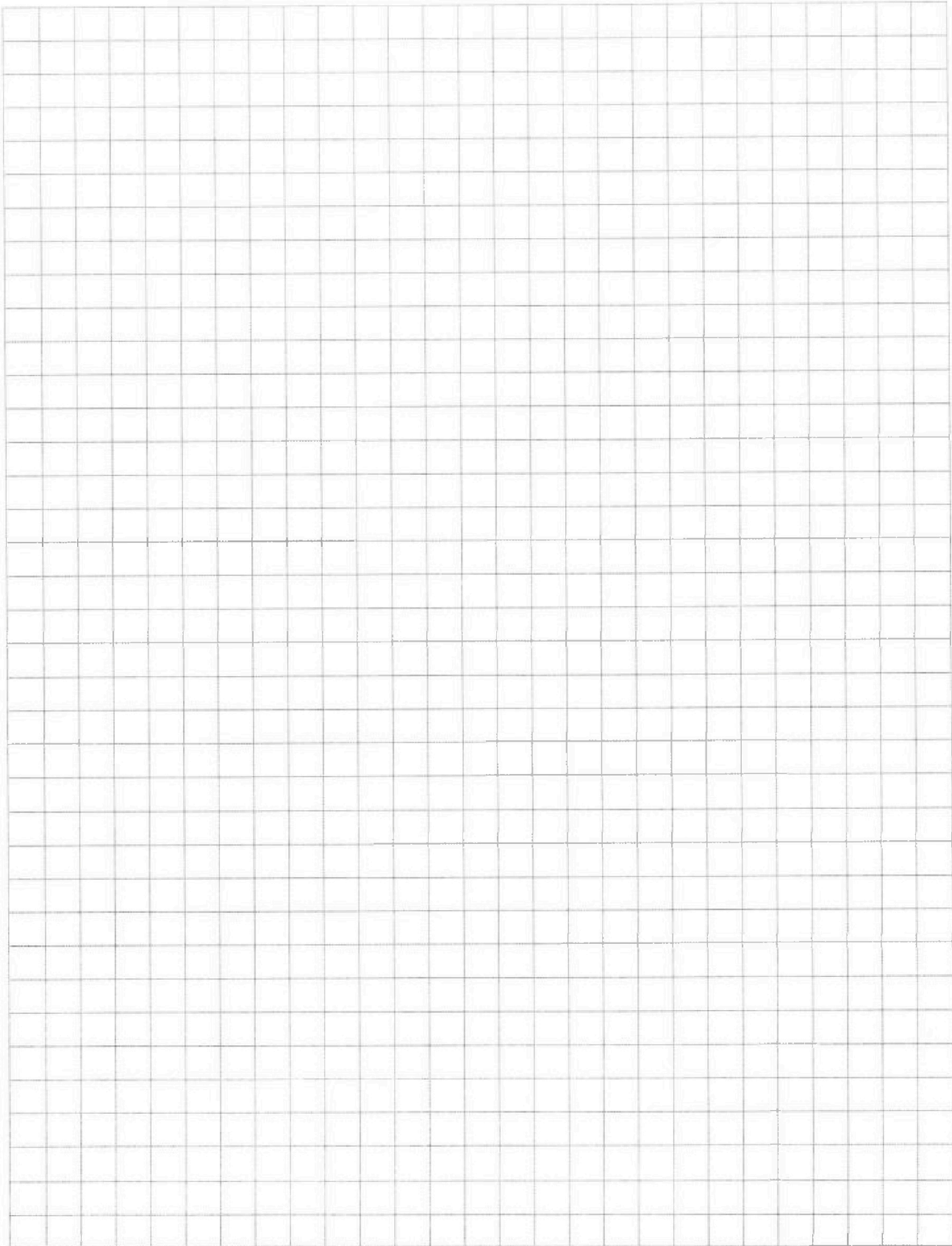
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. 1)  $a > b$

$a - b \neq 3$

$(a - c)(b - c) = p^2$ ,  $p$  - простое.

1)  $a - c = p$ ,  $b - c = p$ ,  $\rightarrow a = b$   $\emptyset$

2)  $a - c = 1$ ,  $b - c = p^2$ ,  $a - b = 1 - p^2 = (1 - p)(1 + p) < 3$   
 $p \geq 2 \Rightarrow a - b < 0$   $\emptyset$ .

3)  $a - c = p^2$ ,  $b - c = 1 \Rightarrow a - b = (p - 1)(p + 1) \geq p - 3$   
 $\Rightarrow p = 3 \Rightarrow p = 3$

$a - b = 8$

$a = 8 + b$

$b^2 + b - 552 = 0$

$p =$

$b =$

$(b + 24)(b - 23) = 0$ .  
 $b = 23$ ,  $a = 31 = 6 \cdot 5 + 1 = 8 \cdot 3 + 23 = 24 + 23$   
 $b = -24$ ,  $a = -16 = 2 \cdot 8 + 23$

$552 = 552 \sqrt{}$   
 $\begin{array}{r} 552 \\ 138 \cdot 2 \\ \hline 138 \cdot 2 \\ \hline 0 \end{array}$

$(31 - 30)(-9)$

$a - c = -1$

$b - c = -p^2$

$a - b = p^2 - 1$

$a - b = 8$ ,  $b_1 = 23$ ,  $a_1 = 31$

$c = 32$

$(b - c)(a - c) = 9$

$a - c = a - 1$ ,  $c = 30$ ,  $a = -17$

$c = b - 1 = 22$

$-25$

$a - c = -p^2$

$b - c = -1$

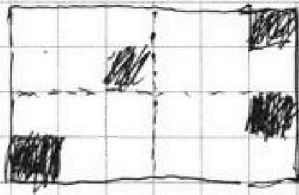


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

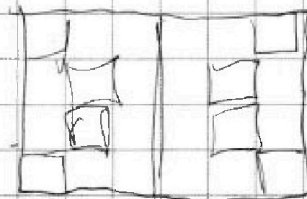
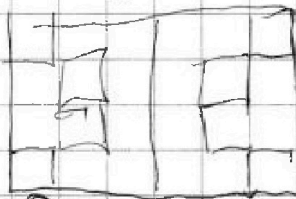
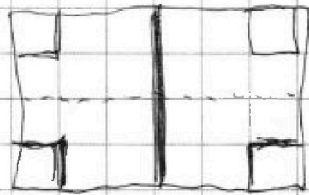
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$2 \cdot 10^4 \cdot (2 \cdot 10^4 - 2) \cdot (2 \cdot 10^4 - 4) \cdot (2 \cdot 10^4 - 6)$$

$$\frac{2 \cdot 10^4 + (2 \cdot 10^4 - 1) \cdot (2 \cdot 10^4 - 2) \cdot (2 \cdot 10^4 - 3) \cdot 8}{(2 \cdot 10^4)!}$$

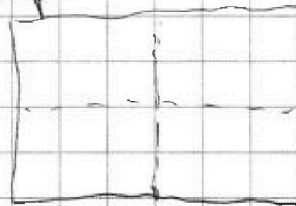
$$\frac{(2 \cdot 10^4 - 4)!}{(2 \cdot 10^4)!} \cdot 8$$



$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = 0$$

$$t = \sqrt{1 - t^2}$$

$$\sqrt{(1 - t^2)(2t + 1)^2}$$

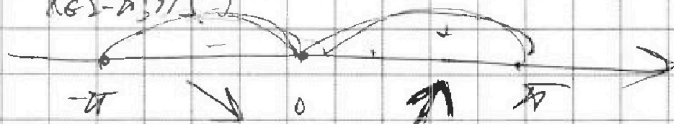
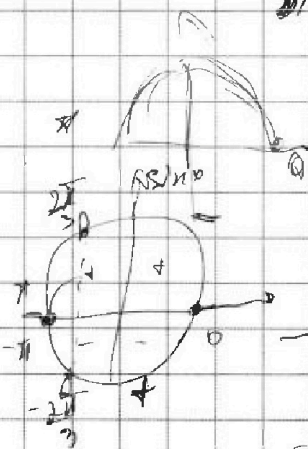


$$4 \cos^3 x + 3 \cos x + 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = 0$$

$$10 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$$

$$4 \cos^3 x \cdot (-2/\cos x) + 6 \cos^2 x \cdot (-2/\cos x) + 3(-2/\cos x) = 0$$

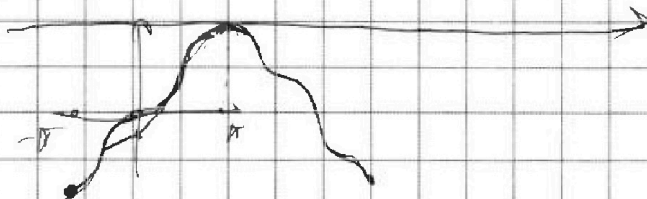
$$-8 \sin x / (2 \cos x + 1)^2$$



$$-3 \sin x / (2 \cos x + 1)^2$$

$$x \geq \pi/2$$

$$x \geq \frac{5\pi}{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5)  $\begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$

Аналитично получены  $a-b = p^2 - 1$ ,  
 $a-b < 8$

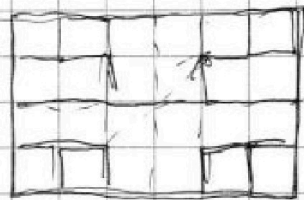
и.е.  $\begin{cases} b_1 = 23, & a_1 = 31, & c_1 = 32 \\ b_2 = -24, & a_2 = -16, & c_2 = -15 \end{cases}$

$\Rightarrow$  ответы  $(31, 23, 32)$  и  $(-16, -24, -15)$  координат.

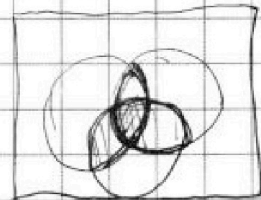
6)  $\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases} \Rightarrow$  Аналитично со условием 3) получены противоречие  $a-b < 0$ .

$\Rightarrow$  Ответ: других случаев нет,  $\Rightarrow$

Ответ:  $(31, 23, 32), (-16, -24, -15), (31, 23, 32), (-16, -24, -15)$



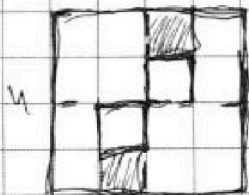
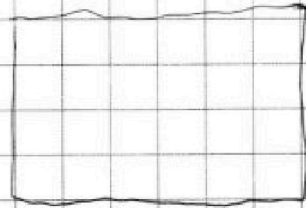
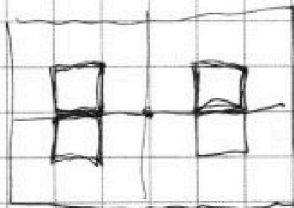
1. Ум. А  
2. Ум. В  
3. Ум. С  
4. Ум. А и ум. В



1) Ум. А и ум. В

У

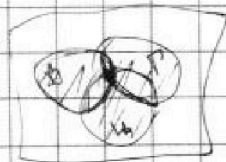
$4 \times 4 = 16$



$250 \cdot 200 - 25 \cdot 10 - 2 \cdot 100 <$   
 $> 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 100 = 5 \cdot 10^4$

$(5 \cdot 10^7 - 2)$

$A \cap B \cap C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2023  $x \geq -3$

$x \leq 4$   
 $z \leq 2$

$|z| \leq 3 \rightarrow z \in [-3; 3]$

$y + x - x^2 + z \geq 0$

$x + y + z \geq x^2 \geq 9$

$x + y + z \geq 9$

$\Rightarrow x + y \geq 2$

~~$y \geq 2 - x$~~

~~$y \geq 2 - x \geq 5$~~  — *нельзя*

$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-2^2}$

$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} \geq \sqrt{\quad} - 5$

$x+3 + \sqrt{4-x-z} - 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{4-x-z} = \sqrt{(y+x-x^2+z)} + 25 - 20\sqrt{\quad}$

$z-z - 2\sqrt{(x-x^2-x^2+2x-3z)}$

$x - x^2 - z = (x+3) + 12$

$\sqrt{4y+4z - (4x^2-4x+1)} + 1 - \sqrt{4y+4z+1 - (2x-1)^2}$

~~$f(x) = 3\cos(\sin x) + 5 \cdot \cos(\sin 2x) + 6(\sin x)$~~

$-\sqrt{1-\frac{1}{4}}$   
 $t = \frac{1}{2}$

Итого:  $x+y \geq 2$   
 $x \geq -3$   
 $-1 \leq z \leq 3$

$\sqrt{x+3} + 5 \geq \sqrt{4-x-z}$

$y \geq 12$

$4y - 35 = \sqrt{169-2^2}$

$6y^2 - 280y + 35^2 - 13^2 \cdot 2^2 = 0$

$12 \cdot 48 \cdot t^2 - 2 = 0$

$280^2 - 4(12 \cdot 48 \cdot 2^2) =$   
 $= 280^2 - (24 \cdot 8)^2 + (8 \cdot 2)^2 =$   
 $= 280^2 - (192)^2$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2

$$|z| \leq 13$$

$$x + z \leq 4$$

$$z \geq 1$$

$$x \geq -3$$

$$z \leq 7$$

~~$$x \leq 3$$~~

$$z \in [-13; 7]$$

$$\text{оч. } x \geq -3$$

$$-13 \leq z \leq 7$$

$$y + x - x^2 \sqrt{z} \geq 0$$

$$x + y + z \geq x^2 \geq 9$$

$$x + y + z \geq 9$$

~~$$y + z \geq 12$$~~

$$x + y \geq 2$$

~~$$y \geq 5$$~~

$$x + y \geq 2$$

$$1) \ x \geq 3$$

$$x + 3 + 5 + 10\sqrt{x + 3} = 4(y + x - x^2 \sqrt{z}) + 4 - x - 3 + 8$$

$$y \leq -1$$

$$-y - 1 + 36 - 3y = \sqrt{169 - z^2}$$

$$35 - 4y \geq 0$$

$$35 - 4y = \sqrt{169 - z^2}$$

$$y^2 \leq \frac{35}{4}$$

$$35^2 - 20 \cdot 4y + 16y^2 = 169 - z^2$$

$$y^2 - 20y + \frac{35^2 - 13^2}{4} \geq 2 = 0$$

$$\frac{22 \cdot 48}{24 \cdot 2 \cdot 20}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$$

$$= (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2 \sin x \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x - 6\cos x + 6\cos x = p$$

$a > b$   
 $a - b \neq 3$   
 $(a-c)(b-c) = 2p^2$   
 $a + b^2 \leq 560$   
 $b^2 \leq 560 - a$   
 $a \leq 560$

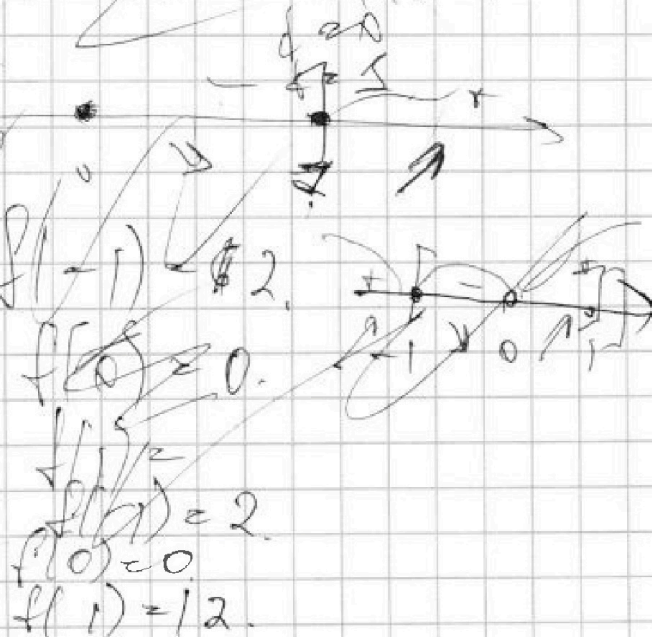
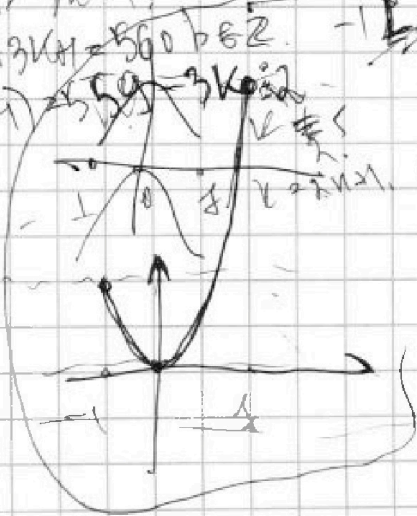
$$4d^3 + 8d^2 - p = 0.$$

$$f(d) = 4d^3 + 8d^2$$

$$f'(d) = 12d^2 + 16d = 12d(d + 4/3)$$

1)  $a - b = 3k + 1$   
 2)  $a - b = 3k + 2$   
 $a \leq b + 3k + 1$

$b^2 + b + 3k + 1 = 560, b \in \mathbb{Z}$   
 $b(b+1) = 559 = 3k + 1$



$f(-1) = 0$   
 $f(0) = 0$   
 $f(1) = 12$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4b^3 + 6b^2 + 3b - 3 = P.$$

~~$$4b^3 + 6b^2 + 3b - 3 = P.$$~~

$$f'(b) = 12b^2 + 12b + 3 = 0.$$

$$4b^2 + 4b + 1 = 0.$$

$$(2b + 1)^2 = 0.$$

$$b = -\frac{1}{2}.$$

→  $f(b)$  на  $\text{кор } b \in S = \{-\frac{1}{2}, 1\}$ .

$$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{8} + \frac{6}{4} - \frac{3}{2} - 3 =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -3.5$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10.$$

→ 1 корень единств.  $\cos(2-\beta) + \cos(2+\beta) = 2\cos$

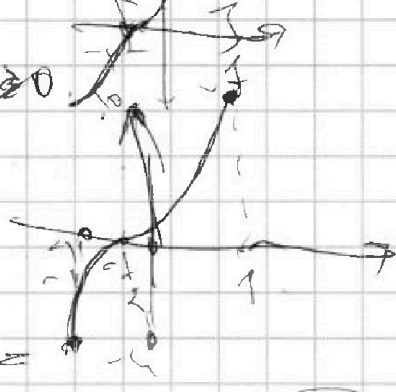
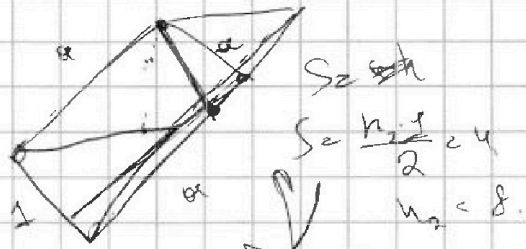
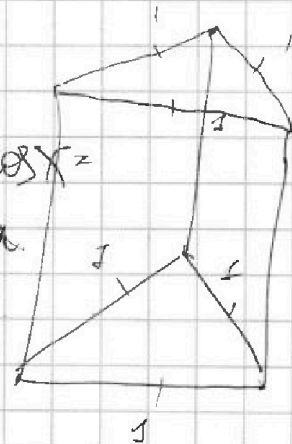
$$f_{\min}(b) = -4, \quad f_{\max}(b) = 10.$$

$$4b^3 + 6b^2 + 3b - (3+P) = 0.$$

$$\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$$

$$2\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2(\cos 2x + \cos x) + \cos x = 0$$

$$2\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 4\cos x = 0$$





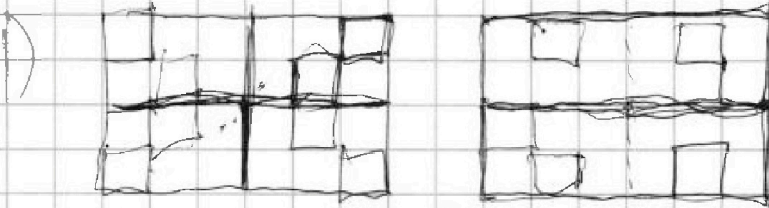
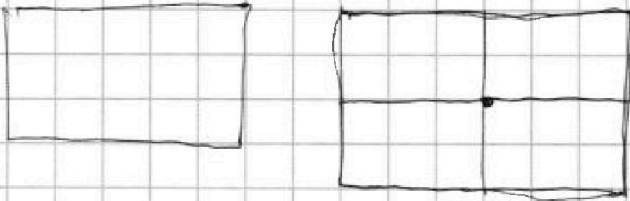
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

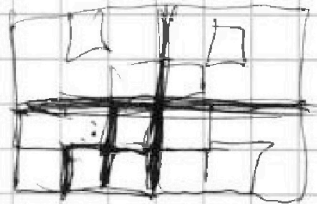
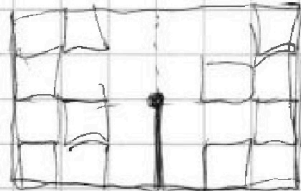
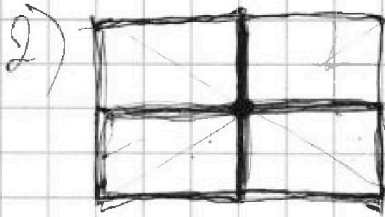
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5.

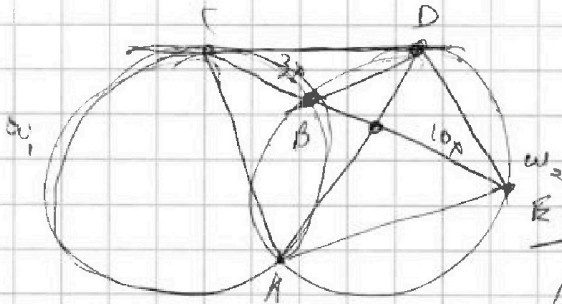


$C_8$   
200250



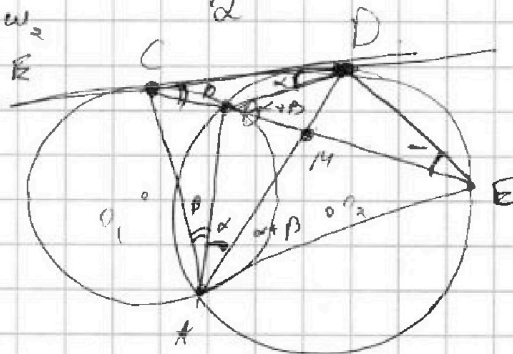
$\frac{ED}{CD}$

4.



$C_4$   
200250  
2

$\frac{CM}{ME} = \frac{2}{10}$



$\triangle CBD \sim \triangle CDE$   
 $\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{CB}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{3}{10} = \frac{CM}{ME}$



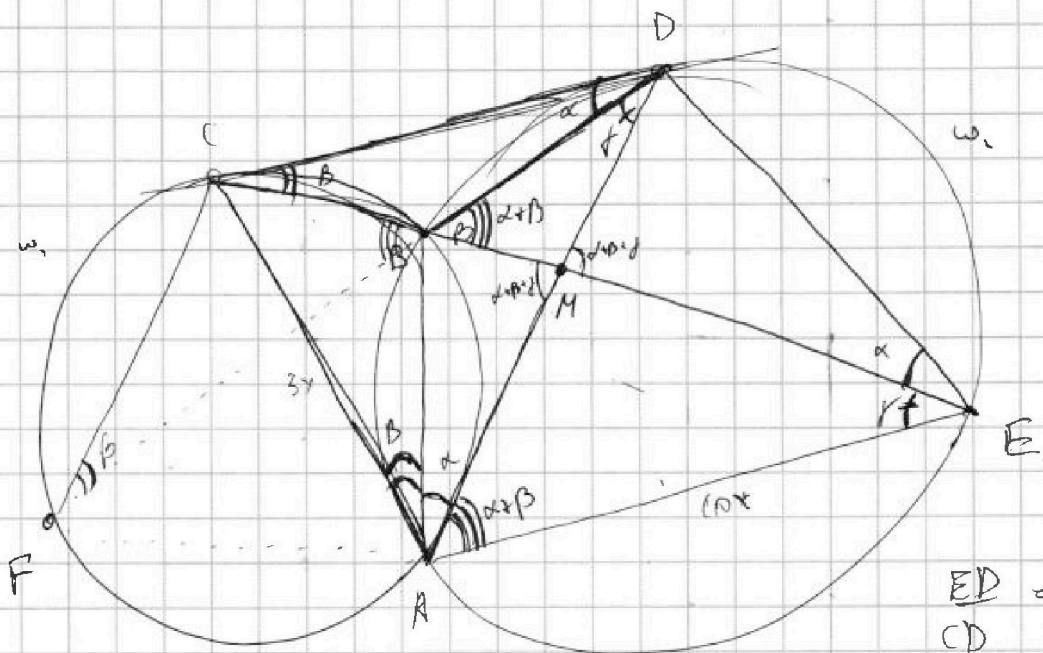
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4.



$$\frac{CM}{MB} = \frac{3}{10} = \frac{AC}{AE}$$

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CB}{CD}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ADC$$

$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$\frac{AE}{DE} = \frac{AC}{AD}$$

$$\frac{BM}{ME} = \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AD}$$

$$AD^2 = AC \cdot AB = 30x^2$$

$$AD = x\sqrt{30}$$

