



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

✂ $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

- ✂ 4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

- ✂ 5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- ✂ 6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(15x+6)(x-3)}{(x+4)^2} = |x-3| \Rightarrow \frac{(15x+6)(x-3) - |x-3|(x+4)^2}{(x+4)^2} = 0$$

$$1) x > 3: \frac{(15x+6)(x-3) - (x-3)(x+4)^2}{(x+4)^2} = \frac{(x-3)(15x+6 - (x+4)^2)}{(x+4)^2} = 0$$

$$x \neq -4, \text{ т.к. } x > 3 \Rightarrow (x-3)(15x+6 - x^2 - 8x - 16) = 0$$

$$x \neq 3 \text{ и } 3a \text{ од } 3 \Rightarrow \begin{matrix} \text{от } x = x^2 - 8x + 15 \\ \Rightarrow 7x - x^2 - 10 = 0 \end{matrix}$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$2) x < 3: \frac{(15x+6)(x-3) + (x-3)(x+4)^2}{(x+4)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)(15x+6 + x^2 + 8x + 16) = 0 \quad x \neq 3 \text{ и } 3a \text{ од } 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 23x + 22 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -22 \end{cases}$$

Проверим $x = 5$: $b_4 = \sqrt{\frac{15 \cdot 5 + 6}{(5-3)^2}} = \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$

$$b_{10} = 9$$

$$b_{12} = \sqrt{(15 \cdot 5 + 6)(5-3)} = 9\sqrt{2} \quad \text{от } q = \sqrt{2}$$

Проверим $x = -1$: $b_4 = \sqrt{\frac{15 \cdot (-1) + 6}{(-1-3)^2}} = \sqrt{\frac{-9}{-64}} = \frac{3}{8}$

$$b_{10} = 3 \quad b_{12} = \sqrt{(15 \cdot (-1) + 6)(-1-3)} = 6 \quad q = \sqrt{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \in K = ? \quad b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \quad b_{10} = x+4 \quad b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3 \quad b_{10} = b_1 \cdot q^9 \quad b_{12} = b_1 \cdot q^{11}$$

$\frac{16}{15} \neq \left(\frac{2}{5}\right)^3$

$\left[\begin{array}{l} x \leq -\frac{2}{5} \\ x > 3 \end{array} \right.$

$$\textcircled{1} \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = b_1 \cdot q^3$$

$$\textcircled{2} x+4 = b_1 \cdot q^9$$

$$\textcircled{3} \sqrt{(15x+6)(x-3)} = b_1 \cdot q^{11}$$

$$\textcircled{3} : \textcircled{1} \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)(x-3)^3}}{\sqrt{(15x+6)}} = \frac{b_1 q^{11}}{b_1 q^3}$$

при $x \neq -\frac{2}{5}$: ~~$\frac{1}{3} = q^8$~~ $b_1 \neq 0$

$$\sqrt{(x-3)^4} = q^8$$

т.к. $b_4 \geq 0$, то $b_4 \cdot q^6 = b_1 \cdot q^9 = b_{10} \geq 0$, т.к. $q^6 \geq 0$

Значит, $(x-3)^4 = q^8 \Rightarrow q^4 = |x-3|$

$$\textcircled{3} : \textcircled{2} \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = \frac{b_1 q^{11}}{b_1 q^9} = q^2$$

возведем в квадрат.

т.к. $\sqrt{(15x+6)(x-3)} \geq 0$
и $x+4 \geq 0$, то

$$\frac{(15x+6)(x-3)}{(x+4)^2} = q^4$$

$$\frac{(15x+6)(x-3)}{(x+4)^2} = |x-3|$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим $x = -22$: $b_4 = \sqrt{\frac{15(-22) + 69}{(-22 - 3)^2}} = \sqrt{\frac{-624}{2500 - 15025}} =$

$15 \cdot 22 = 15 \cdot 20 + 80 = 690$ $25^2 = 625$ $= \sqrt{\frac{624}{15025}}$

$25^2 = 625$ $25 \cdot 625 = 25(600 + 25) = 625 + 25 \cdot 600 =$
 $= 625 + \frac{100}{4} \cdot 600 = 625 + 100 \cdot 150 = 625 + 15000 = 15625$

$b_{10} = -22 + 4 = -18$ $b_0 = b_1 \cdot 9^6 \Rightarrow b_{10} > 0$, т.к. $b_1 > 0$

↓
∅

Таким образом, подешим числа $x = -1$ и $x = 5$

Ответ: $x = -1$
 $x = 5$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases}$$

ОДЗ: 1) $x \geq -7$, 2) $225 - z^2 \geq 0 \Rightarrow z^2 \leq 225 \Rightarrow z \in [-15; 15]$

~~1) $5-x-3z \geq 0 \Leftrightarrow x+3z \geq 5$~~

~~4) $y-2x-x^2+z \geq 0 \Leftrightarrow x^2+2x-z \leq y \Leftrightarrow y \geq x^2+2x-z \Rightarrow$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 - z \geq y+1 \Rightarrow y \geq (x+1)^2 - z - 1$~~

3) $3z \geq 5-x \Rightarrow z \geq \frac{5-x}{3}$ $x \geq -7 \Rightarrow -x \leq 7$

\downarrow
4) $z \leq \frac{5+7}{3} = 4$

~~$y \geq (x+1)^2 - z - 1$~~

4) $y \geq (x+1)^2 - z - 1$ $y \geq 0 - 4 - 1 \Rightarrow y \geq -5$

5) $y \geq 35$: $y-20+2y-70 = \sqrt{225-z^2} \Rightarrow 3y-90 = \sqrt{225-z^2}$

На ОДЗ: $9(y-30)^2 = 225-z^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p \quad p = ? \text{ ? 1 реш.}$$

Заметим, что если $x = x_0$ корень, то $x = -x_0$ также является корнем данного уравнения:

$$\cos(-3x_0) + 6 \cos(-x_0) = 3 \cos(-2x_0) + p \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x_0) + 6 \cos(x_0) = 3 \cos(2x_0) + p.$$

Значит, чтобы было единственное решение, $x = 0$
при $x = 0$: ~~1+6~~ $1+6 = 3+p \Rightarrow p = 4$ $p = 4$:

$$\underbrace{\cos 3x + 6 \cos x}_{\in [-7; 7]} - \underbrace{3 \cos 2x}_{\in [-3; 3]} = 4$$

$\{-4; 4\}$ \Rightarrow все ~~было~~ достигается по единично \Rightarrow ~~4=0~~
 $\Rightarrow x \in 2\pi k$
 $k \in \mathbb{Z}$

$$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x = \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x \cos x$$

$$= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 3x + 6 \cos x - 3 \cos 2x = p \Rightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x - 3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x = p \quad (\Rightarrow) \quad 4 \cos^3 x + 3 \cos x - 3 \cos^2 x - 3 \cos^2 x + 3 = p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p \quad \cos^3 x = t$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

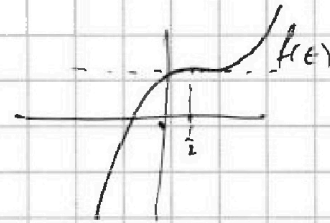
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$

Тогда $f'(t) = 12t^2 - 12t + 3$



$f'(t) = 0$: ~~$12t^2 - 12t + 3 = 0$~~ , $4t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow$
 $(2t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Минимум $f(t)$ достигается при $t = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{8} - 6 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

т.к. производная $f'(t)$ всегда ≥ 0 , то $f(t)$ ~~возрастает~~ ^{неубывающая} ~~на $t \in [-1; 1]$~~ ^{на $t \in [-1; 1]$} .
 Значит, т.к. $t \in [-1; 1]$: ~~$f(t) \in [f(-1); f(1)]$~~ \Rightarrow

$$\Rightarrow f(t) \in [-10; 4]$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 4 \in [-10; 4]$$

$$\Rightarrow p \in [-10; 4]$$

Ответ: $p = 4$; $x = 0$, ~~$x = 1$~~
 $t \in \mathbb{Z}$

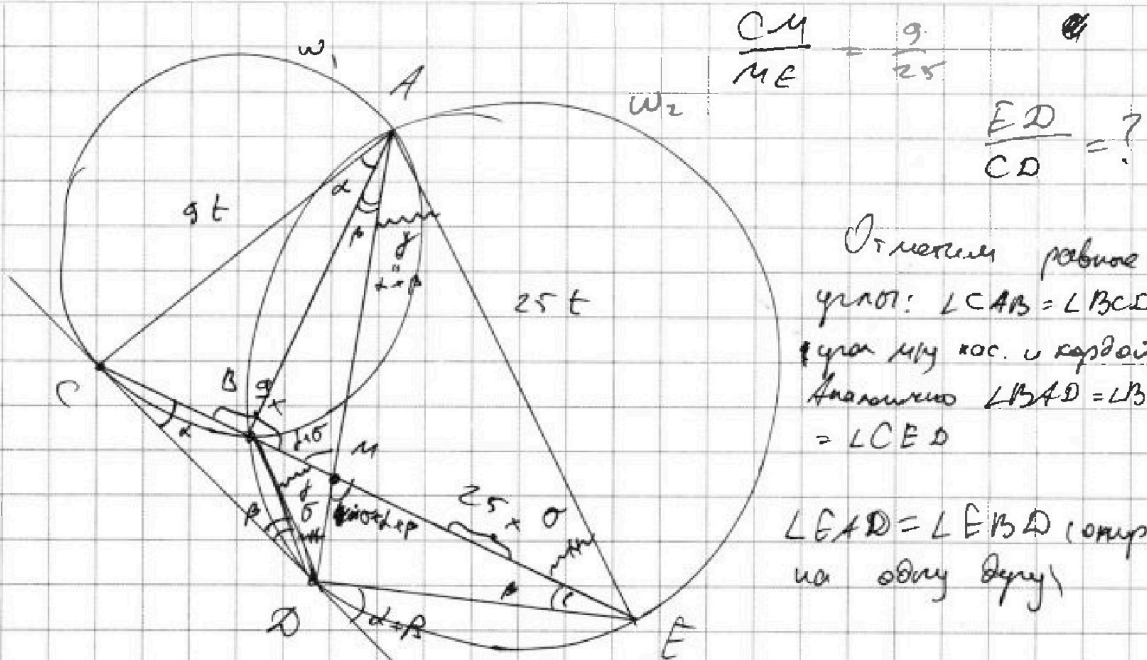


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CM}{ME} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{ED}{CD} = ?$$

Отметим равные углы: $\angle CAB = \angle BCD$ (как угол между кас. и хордой)
Аналогично $\angle BAD = \angle BDC = \angle CED$

$\angle EAD = \angle EBD$ (опер. на одну дугу)

Пусть $\angle CAB = \alpha$, $\angle BAD = \beta$, $\angle EAD = \gamma$, $\angle AEB = \sigma$

т.к. $\gamma = \alpha + \beta$, то AM — дуг. $\Delta ACE \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{9}{25} = \frac{CM}{ME}$

$$\angle CDE = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma = 180 - \alpha - 2\beta$$

$$\angle ACE = 180^\circ - \alpha - 2\beta - \sigma$$

$$\angle ACD = \angle ACE + \angle ECD = 180^\circ - \alpha - 2\beta - \sigma + \beta = 180^\circ - \alpha - \beta - \sigma$$

$$\angle AED = \sigma + \beta$$

$\Delta ACD \sim \Delta ADE$ по углам
 $\angle CDA = \angle AED$ и $\angle CAD = \angle DAE$

~~тогда $\angle ACD = \angle ADE$~~

$$\Delta ACD \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$$

$$AC \cdot AE = AD^2 \Rightarrow 9t \cdot 25t = AD^2 \Rightarrow AD = 15t$$

тогда $\frac{DE}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{15t}{9t} = \frac{5}{3}$ Ответ: 5:3

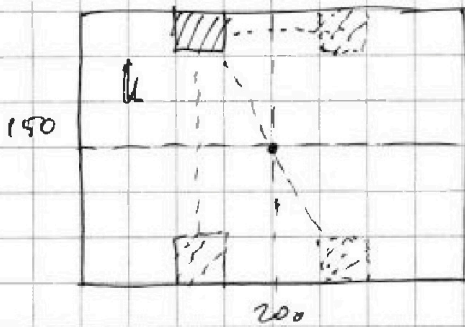


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Посчитаем кол-во соседей зак-расить клетки тогда была центральная симметрия

Выберем первую клетку тогда ей сопоставится автоматически вторая клетка после симметрии.

Выберем ~~вторую~~ третью. Сопоставится 4-ая

и так далее. Каждый код сопоставим.

Выборать 1-ую клетку ~~сделаю~~ 150 · 200 соседей.

Выборать 2-ую клетку: $150 \cdot 200 - 2$ 5-ую: $150 \cdot 200 - 4$

7-ую $150 \cdot 200 - 6$. ~~на~~ клетки под номерами 2, 4, 6 и 8

Выборать автоматически

Тогда кол-во соседей будет

Выборав первую клетку, симметрично ей ~~клетка~~ закрасятся еще три клетки $1/2$ -за то что клетка симметрична относительно центра ~~и симметрична~~ ^{и симметрична} ~~то~~ ^{то} ~~и~~ ^и ~~одной~~ ^{одной} ~~прямой~~ ^{прямой} ~~углом~~ ^{углом} ~~отделится~~ ^{отделится} ~~на~~ ^{на} ~~3~~ ³ ~~другие~~ ^{другие} ~~прямоугольника~~ ^{прямоугольника}.
(~~каждый~~ ^{каждый} ~~прямоугольник~~ ^{прямоугольник} ~~разбивается~~ ^{разбивается} ~~средними~~ ^{средними} ~~линиями~~ ^{линиями} ~~ча~~ ^{ча} ~~и~~ ^и ~~каждой~~ ^{каждой} ~~клетки~~ ^{клетки})
~~маленькая~~

Таким образом, если выбрать одну клетку на одном из ~~малых~~ ^{малых} ~~прямоу-гол~~ ^{прямоу-гол}, то ~~клетка~~ ^{клетка} закрасятся еще 3 клетки на ~~других~~ ^{других} ~~трех~~ ^{трех} ~~полок~~ ^{полок} ~~прямоу-гол~~ ^{прямоу-гол}. Вобщем, при выборе этой клетки: 6, 7 и 8 клетки закрасятся сами.

Выборать первую клетку можно $75 \cdot 100 = 7500$ способами, а выборать вторую: $75 \cdot 100 - 1 = 7499$ (т.к. одна из клеток уже выбрана). Итого $7500 \cdot 7499$. Но надо еще поделить на 2, т.к. выбирать можно в любой ~~порядке~~ ^{порядке}, а ~~пер~~ ^{пер} ~~во~~ ^{во} ~~двух~~ ^{двух} ~~одна~~ ^{одна} ~~и~~ ^и ~~то~~ ^{то} ~~же~~ ^{же}. Итого $\frac{7500 \cdot 7499}{2}$

Ответ: C 2500



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b \quad a - b : 3 \quad (a - c)(b - c) = p^2 \quad a + b^2 = 820$$

$$(a - c)(b - c) = ab - ac - bc + c^2$$

$$\text{т.к. } (a - c)(b - c) = p^2$$

то при разложении p^2 на множители получим несколько случаев:

$$1) p^2 = p \cdot p \quad (\text{оба множителя} = p)$$

$$2) p^2 = (-p)(-p) \quad (\text{оба множителя} = -p)$$

$$3) p^2 = 1 \cdot p^2$$

$$4) p^2 = (-1)(-p^2) \quad \text{Поскольку } p \text{ простое, то}$$

других множителей у p^2 , кроме как $\pm 1, p$ и p^2

не может быть

$$1) p^2 = p \cdot p \Rightarrow (a - c) = (b - c) \Rightarrow a = b \quad (\text{противоречит 1 условию}) \quad \emptyset$$

$$2) p^2 = (-p)(-p) \text{ — аналогично } c - a = c - b \Rightarrow a = b \quad \emptyset$$

$$3) p^2 = 1 \cdot p^2 \Rightarrow \begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c + 1 \\ b = p^2 + c \end{cases}$$

$$4) p^2 = (-1)(-p^2) \Rightarrow \begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c + p^2 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a - b = 8 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \Rightarrow b^2 + b = 812 \quad b^2 + b - 812 = 0$$

$$\begin{array}{r} 812 \overline{) 2} \\ 406 \overline{) 2} \\ \hline 205 \end{array}$$

или

$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 812}}{2} = \frac{-1 \pm 57}{2}$$

$$b = -29 \text{ или } b = 28$$

$$1 + 4 \cdot 812 = 1 + 3248 = 3249$$

$$3200 + 48 \cdot 28 = 3200 + 1344 = 4544$$

$$\begin{array}{r} 53 \\ \times 53 \\ \hline \end{array}$$

$$(50+3)(60+3) = 2500 + 150 + 150 + 9 = 2809$$

$$300 - 60 + 1 = 241 \quad 57 - 57 = 0 \quad (60-3)(60-3) = 3600 - 180 - 180 + 9 = 3249$$

$$30-2)(2-2) = 900 - 120 + 4 = 784 \quad 3600 - 360 + 9 = 3249$$

1) $b = -29$: $a - (-29) = 8 \Rightarrow a = 8 - 29 = -21 \quad a > b$

$$-21 + 29^2 = -21 + 841 = 820 \quad b = c + 1 \Rightarrow c = -30$$

2) $b = 28$: $a - 28 = 8 \Rightarrow a = 36 \quad 36 + 784 = 820$

$$b = c + 1 \Rightarrow c = 27$$

Рассм 4) случай: $\begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \\ a = c - p^2 \\ a = c - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases} \quad \text{т.к. } p^2 \geq 1$
и $a > b$

$$\begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - p^2 \end{cases} \Rightarrow a - b = p^2 - 1. \quad \text{Отсюда же следует только } p = 3.$$

тогда $\begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 8 \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \quad b^2 + b - 812 = 0$

$$\begin{cases} b = -29 & a = -21 \\ b = 28 & a = 36 \end{cases}$$

1) $a = c - 1 \Rightarrow c = a + 1 = -20 \quad \checkmark$

2) $a = c - 1 \Rightarrow c = a + 1 = 37 \quad \checkmark$

Ответ: $\begin{cases} a = -21 \\ b = -29 \\ c = -30 \end{cases}, \begin{cases} a = 36 \\ b = 28 \\ c = 27 \end{cases}, \begin{cases} a = -21 \\ b = -29 \\ c = -20 \end{cases}, \begin{cases} a = 36 \\ b = 28 \\ c = 37 \end{cases}$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассм. 3) случай:

$$\begin{cases} a = c+1 \\ b = p^2 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = c+1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{т.к. } p^2 > 1: \\ \text{чт } a > b: \end{matrix}$$

$$a - b = p^2 - 1$$

$$a + b^2 = (p^2 + c) + (c+1)^2 = p^2 + c + c^2 + 2c + 1 = p^2 + c^2 + 3c + 1 = 819$$

Проверим $p^2 - 1 \mid 3$

p	p^2	$p^2 - 1$	ϕ
2	4	3	✓
3	9	8	✓
5	25	24	✓
7	49	48	✓
11	121	120	✓
13	169	168	✓
17	289	288	✓
19	361	360	✓
23	529	528	✓

$\Rightarrow p = 3$

$$c^2 + 3c \geq 0 \Rightarrow \frac{c}{-3} \geq 0$$

$$c = -2: 4 - 6 = -2$$

$$c = -1: 1 - 3 = -2$$

$$\Rightarrow p^2 \leq 819 + 2 = 821$$

Возможны все простые числа p такие, что $p^2 \leq 821$

$$29 \cdot 29 = (30-1)(30-1) = 900 - 60 + 1 = 841$$

Поделим также $p = 3 \Rightarrow$ ~~$a - b = p - 1 = 2$~~ $\Rightarrow \begin{cases} a - b = 8 \\ a + b^2 = 820 \end{cases}$

~~$a = 9 + c$~~
 ~~$b = 6 + c$~~ \Rightarrow ~~$a - b = 3$~~ $a = b + 8$

Подставим $a = b + 8: b^2 + b + 8 = 820$

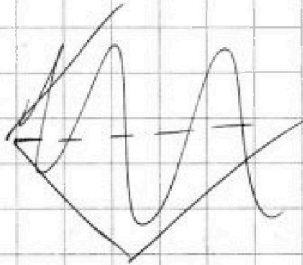


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

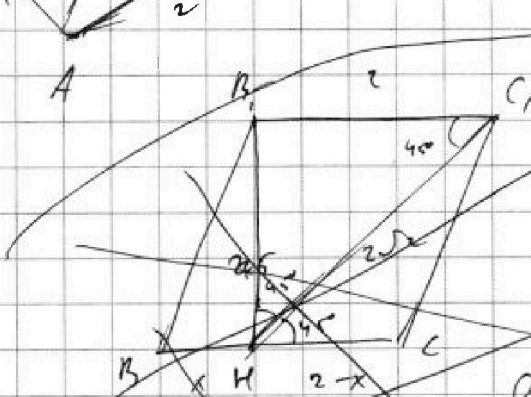
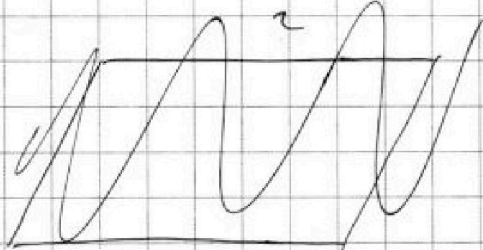
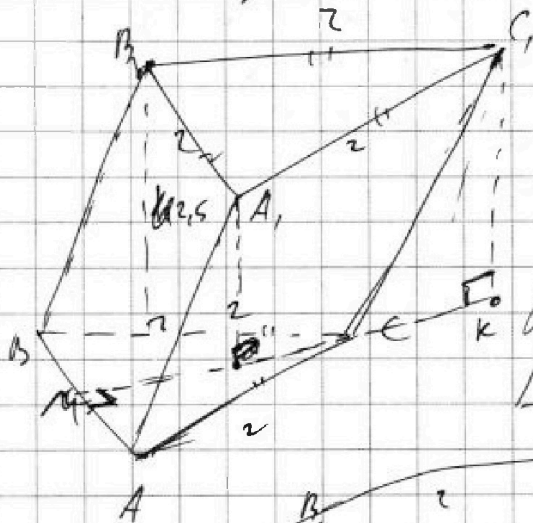
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $S_{\Delta A_1 B_1 C_1} = S_{\Delta A_1 C_1 A} = 4,5$
 $S_{\Delta A_1 B_1 A} = 8$

Проведем высоту $B_1 H$ в основании
 параллельно стороне $B_1 C_1$

$S_{\Delta A_1 B_1 C_1} = B_1 H \cdot B_1 C_1 = 4,5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow B_1 H = 2,5$



Получа $HC_1 = 2\sqrt{2}$

Получа $\angle B_1 C_1 H = \angle C_1 H C_1 = 45^\circ$
 как искомое решение.

Получа по теореме в $\Delta C_1 H C_1$:

$QC_1^2 = HC_1^2 + HC_1^2 - 2HC_1 \cdot HC_1 \cdot \cos 45^\circ$

~~$QC_1^2 = 8 + (x-2)^2 - 4\sqrt{2} \cdot (x-2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow QC_1^2 = 8 + (x-2)^2 - 4(x-2) = 8 + 4x - 4 = x^2 - 4x + 12$~~

Поскольку $S_{\Delta A_1 B_1 C_1} = S_{\Delta A_1 C_1 A}$, то $AA_1 \cdot AC \cdot \sin \alpha = AA_1 \cdot BC \cdot \sin \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$, т.к. $AA_1 = AA_1$, $AC = BC$

Значит, параллелограмм равен.

~~на основании равенства CH и BC или AC~~



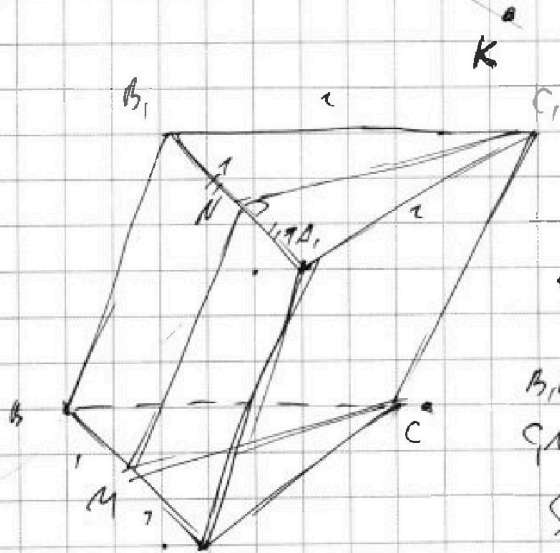
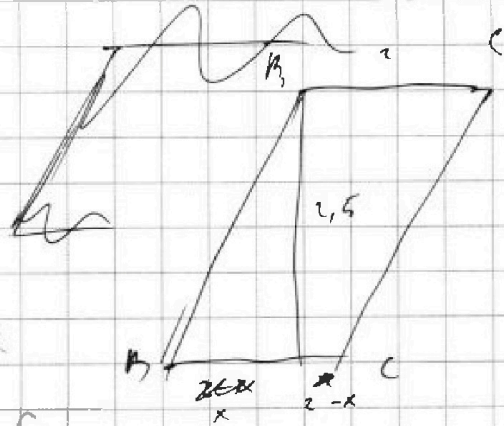
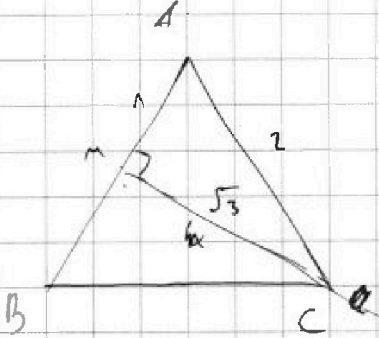
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проведем прямую высоту CC_1N
в $\Delta K, M, C$



Рассм $\Delta MM, B, C, C$

$$\text{Его } S = 5 \Rightarrow h = 2,5$$

$$\text{Тогда } BM_1 = \sqrt{2,5^2 + x^2} = \sqrt{6,25 + x^2}$$

$$B_1B = MM_1 = CC_1 = \sqrt{6,25 + x^2}$$

$$CN = CM = \sqrt{3}$$

$$S_{AA_1A_1} = 4 \Rightarrow B_1P = 2$$

$$\angle APA = \angle B_1A_1P = 45^\circ$$

Получим, что $AM_1 = AA_1 = \sqrt{6,25 + x^2} =$
 $= t^2 + 4 \Rightarrow t^2 = 2,25 + x^2$

$$\sin \angle B_1BA = \frac{2}{\sqrt{t^2 + 4}}$$

Тогда высота призмы будет являться высотой CC_1NM .

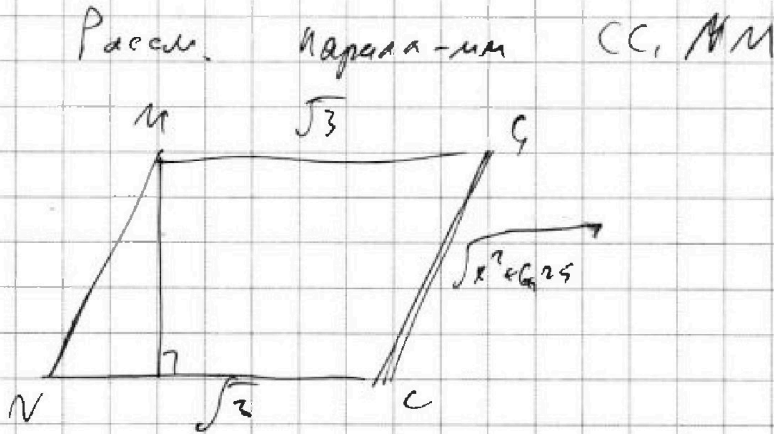


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} - 6$$

$$x+7 + 5-x-3z - 2\sqrt{(x+7)(5-x-3z)} = 4(y-2x-x^2+z) + 36 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \sqrt{y-2x-x^2+z}$$

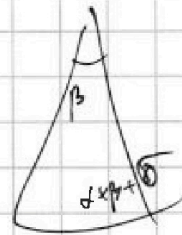
$$12-3z - 2\sqrt{5x-x^2-3xz+35-7x-2z} = 4(y-2x-x^2+z) + 36 - 4 \cdot 6 \sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$a = -21 \quad b = -29 \quad c = -30$$

$$-21-29 \quad 21+29 \quad (29+30) = 9 \cdot 1$$

$$55 \cdot 59 = (55-4)(55+4) = 56^2 - 16$$

чернов.



$$36 \quad 28 \quad 27 \quad 36 \rightarrow 27 = 9$$

$$4t^3 - 6t^2 + 7t + 3 < 4$$

$$4t^3 - 6t^2 + 7t - 1 \leq 0$$

$$\cos 3x + 3 \cos x + 3 \cos x - 3 \cos 2x = p$$

$$4 \cos^3 x + 3(\cos x - \cos 2x) = p$$

$$\cos x - \cos 2x = -2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2}$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3 = 4$$

$$-4 = 6 - 3 + 3 = 10$$

$$12t^2 - 12t + 3 = 0$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$$

$$2t(2t-3) + \frac{3}{2}(2t-3)$$

$$-4 - 6 - 3 + 3 = -10 \quad t = \frac{1}{2}$$

$$-4 - 6 - 3 + 3 =$$

$$4 - 6 + 3 + 3 = 4$$

$$f(-1) = -10$$

$$f(0) = 3 \quad (3+4+5) \quad 10$$

$$f(\frac{1}{2}) = 3.5 \quad (5+4+4+5) \quad 10$$

$$f(1) = 4 \quad 31$$

$$180 - 2\alpha = 2\beta + 2\gamma$$

$$90\alpha = \beta + \gamma$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

