



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$ , тринадцатый член равен  $5-x$ , а пятнадцатый член равен  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+5}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\{b_n\}$  - геом. прогрессия,  $q$  - знаменатель:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ b_{13} = 5-x = q^6 b_7 \\ b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = q^8 b_7 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} b_{13} = q^6 b_7 \\ b_{15} = q^8 b_7 \end{array} \right\} \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 \\ (x+1)(13x-35) \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$$

ОДЗ:  $\begin{cases} x \geq \frac{35}{13} \\ x < -1 \end{cases}$

Все преобразования на ОДЗ.

$$\frac{b_{15}}{b_7} = q^8 = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \cdot \sqrt{\frac{(x+1)^3}{13x-35}} = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2 \Rightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|}$$

(если  $b_7 = 0$ , то  $x = \frac{35}{13}$  и  $b_{13} \neq 0$ , не есть  $b_7 = 0$ , то  $b_{13} = 0 \Rightarrow b_7 \neq 0$ )

$$b_{13} = 5-x = b_7 \cdot q^6 = b_7 \cdot (q^2)^3 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (\sqrt{|x+1|})^3 =$$

$$= \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3} \cdot |x+1|^3} = 5-x$$

$$\begin{cases} \frac{13x-35}{(x+1)^3} |x+1|^3 = 25-10x+x^2 \\ 5-x \geq 0 \end{cases}$$

1)  $x > -1$   $\begin{cases} 13x-35 = 25-10x+x^2 \\ x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-23x+60=0 \\ x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=20 > 5 \\ x=3 \leq 5 \end{cases}$

$5 > 3 > \frac{35}{13} > -1$   
т.е.  $x=3$  - ОДЗ

2)  $x < -1$

2)  $x < -1$   $\begin{cases} 13x-35 = -x^2+10x-25 \\ 5-x \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2+13x-10=0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 < -1 \text{ - ОДЗ} \\ x=2 > -1 \text{ - не ОДЗ} \\ x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow x = -5$$

Омб.: Проверим:

$x=3$   $b_7 = \frac{1}{4}$ ;  $b_{13} = 2$ ;  $b_{15} = 4$   
 $q = \sqrt{2}$  - прогрессия

Омб.: при  $\begin{cases} x=3 \\ x=-5 \end{cases}$

$x=-5$   $b_7 = \frac{5}{4}$ ;  $b_{13} = 10$ ;  $b_{15} = 20$   $q = \sqrt{2}$   
- прогрессия

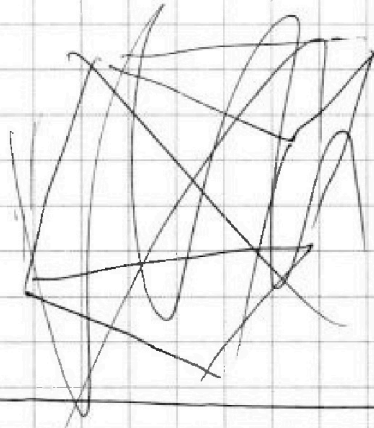


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z} \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} \end{cases}$$

~~5:~~  $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$   
 $4-x-2 \geq 0$   
 $4-z \geq 0, x \geq -3$   
 $\sqrt{169-z^2}$   $z \leq 7$

$$\begin{aligned} x-x^2 &\leq -3+9=6 \\ x_6 &= \frac{1}{2} > -3 \\ \text{при } x < x_6 \quad x-x^2 \uparrow \\ y+x-x^2+z &\leq y+13 \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\sqrt{x+5} = \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-2^2}$$~~

$$t = \cos x \in [-1; 1]$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4t^3 - 3t$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p \quad \text{— имеет } \geq 1 \text{ реш.}$$



$$(1) 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p \quad \text{— имеет } \geq 1 \text{ решение } t_0 \in [-1; 1]$$

~~$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$~~

~~$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2 \geq 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \text{ — кор. мин.}$$~~

~~$$f'(1) \geq 0$$~~

~~$$f(1) = 0 \text{ — с.т.т.}$$~~

$\Rightarrow f \uparrow \Leftrightarrow f(t) = p$   
 Система имеет  
 хотя бы один  
 корень  $t_0 \in [-1; 1]$   
 при  $f(1) \leq p \leq f(1) = 10$   
 $-4 = f(-1) \leq p \leq f(1) = 10$

~~$$p \in [-4; 10]$$~~

~~$$(1) \Leftrightarrow \left( 3\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 - 3 - \frac{1}{2} = p$$~~

~~$$f(t) = \left( 3\sqrt{4}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 - \frac{7}{2} = p$$~~

н.р.  $\uparrow \Rightarrow \geq 1$  корень  $t_0 \in [-1; 1]$   
 при  $f(-1) \leq p \leq f(1)$  т.е.  $p \in [-4; 10]$

$$\begin{cases} 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = (at+b)^3 + c \\ a^3 = 4 \\ 3ab^2 = 6 \\ b^3 + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt[3]{4} \\ b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ c = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

~~$$3\sqrt{4}t = \sqrt[3]{p + \frac{7}{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$~~

~~$$t = \sqrt[3]{\frac{p}{4} + \frac{7}{8}} - \frac{1}{2} = \cos x$$~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{при } p = 10 \quad \cancel{f=1} \quad \cos x = 1 \quad x = \cancel{\frac{\pi}{2}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{при } p = -4 \quad \cos x = -1 \quad x = +\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{при } p \in (-4; 10) \quad x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}}\right) =$$
$$x = \pm \arccos\left(\left(\sqrt[3]{2p+7} - 1\right) \cdot \frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $\therefore$  1 корень при  $p \in [-4; 10]$

$$\text{при } p = 10 \quad x = \cancel{\frac{\pi}{2}} + 2\pi k \quad x = 2\pi k$$

$$\text{при } p = -4 \quad x = +\pi + 2\pi k \quad x = \pi + 2\pi k$$

$k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{при } p \in (-4; 10) \quad x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}\right) + 2\pi k$$

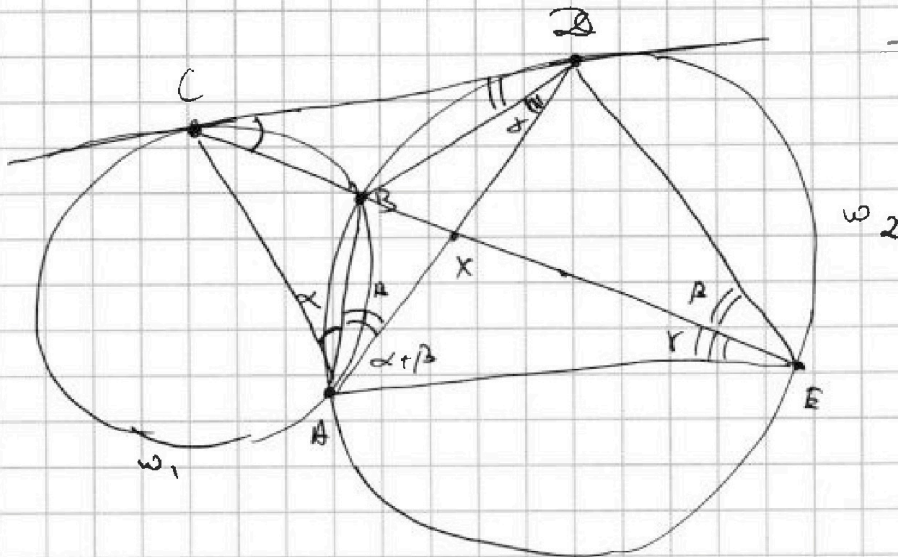


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CX}{XE} = \frac{3}{10}$$

- $\angle CAB = \alpha$  1)  $\angle DCB = \angle CAB = \alpha$  (касая. и хордой) и впис.  $\angle$   
 $\angle BAX = \beta$  2)  $\angle DCB = \angle DAB = \beta$  (касая. и хордой и впис.  $\angle$ )  
 $\angle BDA = \gamma$  3)  $\angle BDA = \angle BEA = \gamma$  (впис.  $\angle$ )  
 $\angle BAE = \beta$  (впис.  $\angle$ )

4)  $\angle CXD =$

$\angle XAE = 180^\circ - \angle AXE - \angle AEX = 180^\circ - \angle CXD - \gamma =$   
 (сум.  $\Delta$ -ов) (впис.  $\angle$ )

$= 180^\circ - (180^\circ - (\angle XCD + \angle BDC + \angle BDAX)) - \gamma = \alpha + \beta + \gamma - \gamma = \alpha + \beta.$

$\angle BDC = \gamma$

5)  $\angle CAE = \angle XAE = \alpha + \beta \Rightarrow AX$  - бисс-са  $\Delta CAE \Rightarrow \frac{CX}{XE} = \frac{AC}{AE}$  (свойство бисс-сы)

т.е.  $\frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}$

6)  $\left. \begin{matrix} \angle CAD = \angle DAE = \alpha + \beta \\ \angle CDA = \angle DEA = \beta + \gamma \end{matrix} \right\} \Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE}$

$\left(\frac{CD}{DE}\right)^2 = \frac{AC \cdot AD}{AD \cdot AE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{CD}{DE} = \sqrt{\frac{3}{10}}; \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{10}{3}}$

Ответ:  $\frac{CD}{DE} = \sqrt{\frac{3}{10}}; \frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{10}{3}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

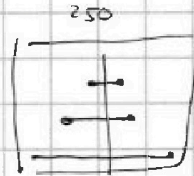
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Т.к.  $200 \cdot 2$  и  $250 \cdot 2$  то все клетки между клетками которые  
гориз. которые проходят средней линией  
защрастят ~~клетки~~ 8 клеток  
так, чтобы множество обладало  $\geq 1$  симметрии.

I) Верт. симметрия (отн. верт. сред. лин.)

Каждой клетке левой половины  
будет соответствовать  
клетка правой. Тогда

коп-во способов ~~будет~~ раскрасить 8 клеток = коп-ву  
способов раскрасить 4 клетки левой половины.



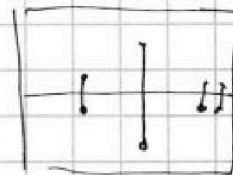
В левой половине  $\frac{250 \cdot 200}{2} = 25000$  клеток.

выбрать 4 е  $A = C_{25000}^4$

II) Гор. симметрия (отн. гор. ср. лин.)

Аналогично: Верхняя половина  $\leftrightarrow$  нижней

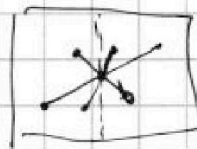
способов раскрасить  $B = C_{25000}^4$



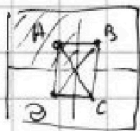
III) Центр. симметрия:

Аналогично: левая половина  $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$  прав. половина  $\rightarrow C = C_{25000}^4$   
способов раскрасить



2) Заметим, что если рисунок имеет  $\geq 2$  сим., то  
он имеет все 3 сим.  
при  $4 \times 24$  сим.



и правда: без 2 востанавливать из точки A  
точки B, C и D.

Тогда четверть доски однозначно задаёт  
раскраску всей доски. Выбрав тогда коп-во способов  
раскрасить  $\geq$  коп-ву способов раскрасить 2 клетки  
в четверти доски (там  $\frac{250 \cdot 200}{4} = 12500$  клеток)





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В A, B, C учитывается D по одному разу.

Тогда кол-во способов раскрасить доску:  $A+B+C-2D =$

$$= 3 C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$$

Отв.:  $3 C_{25000}^4 - 2 C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c)$$

$$a > b \Rightarrow a-c > b-c$$

$$(a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p \neq p\text{-простое}$$

$$1) \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \text{ т.к. } p \neq 2$$

$$a-b = p^2 - 1 \quad /3$$

$$1) p \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3} \quad - \text{не воз.}$$

$$2) p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow p^2 - 1 \equiv 4 - 1 \equiv 0 \pmod{3} \quad - \text{не воз.}$$

$$3) p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 - 1 \equiv -1 \pmod{3} \neq 0 \quad - \text{воз.}$$

$$\Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p = 3.$$

$$\begin{cases} a-c = 9 \\ b-c = 1 \\ a-b = 808 \\ a+b^2 = 560 \end{cases}$$

$$b(b+1) = b^2 + b = 560 - 8 = 552 = 2^3 \cdot 3 \cdot 23$$

$$b^2 + b = 460$$

$$b(b+1) = 460$$

$$\text{реш. вып.: } \begin{cases} b+1 = 24 \\ b = 23 \\ b+1 = -23 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$b^2 + b = 560 - 8 = 552 = 4 \cdot 13 \cdot 11$$

$$b(b+1) = 4 \cdot 13 \cdot 11 = 44 \cdot 13 = 1 \cdot 552 = 52 \cdot 11$$

$b \in \mathbb{Z}$  - реш. мат. не представимо в виде

254 ген. от мантатонических real

$$2) \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases}$$

$$a-b = p^2 - 1 \Rightarrow p = 3$$

анал. н. 1

$$b = 23 \Rightarrow a = 31 \Rightarrow c = 22 \quad (31, 23, 22)$$

$$\begin{cases} a+b^2 = 560 \\ a+b = 8 \end{cases}$$

$$b(b+1) = 552 \quad - \text{реш. 6 значений real (аналог. н. 1)}$$

$$3) \begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \\ a-b = 0 \end{cases} \quad /3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b = 23 \Rightarrow a = 31 \Rightarrow c = 22$$

$$(31; 23; 22)$$

$$b = -24 \Rightarrow a = -16 \Rightarrow c = 25$$

$$(-16; -24; 25)$$

$$2) \begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -p^2 \end{cases} \text{ где } p^2 \in \mathbb{Z}$$

$$a - b = p^2 - 1 \Rightarrow p = 3$$

аналогично

$$\begin{cases} a + b^2 = 560 \\ a - b = 8 \end{cases} \Rightarrow b(b+1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 23$$

$$\begin{cases} b = 23 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$b = 23 \Rightarrow a = 31 \Rightarrow c = 32$$

$$(31; 23; 32)$$

$$b = -24 \Rightarrow a = -16 \Rightarrow c = -15$$

$$(-16; -24; -15)$$

$$3) \begin{cases} a - c = p \\ b - c = p \end{cases} \Rightarrow a - b = 0 ; 3 - \text{не воз.}$$

$$4) \begin{cases} a - c = -p \\ b - c = -p \end{cases} \Rightarrow a - b = 0 ; 3 - \text{не воз.}$$

-15

Ответ:  $(31; 23; 22); (-16; -24; 25); (31; 23; 32); (-16; -24; -15)$



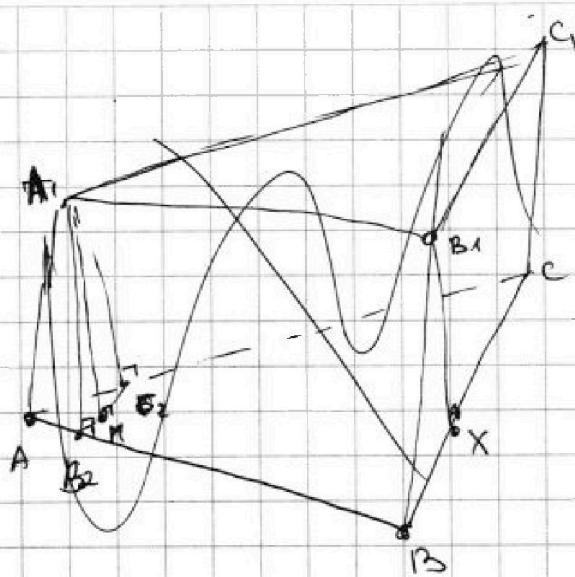


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

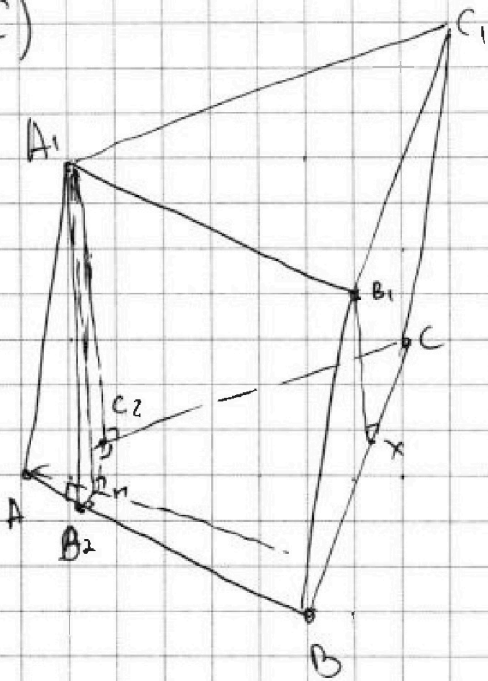
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & S_{A_1B_1C_1} = S_{A_1B_2C_2} = 4 \\ & S_{B_1C_1C_1} = 3 \end{aligned} \right\} \\ & ABC, A_1B_1C_1 - \text{основания} \\ & \left. \begin{aligned} & A_1B_2 \perp AB \\ & S_{A_1B_1B_1} = A_1B_2 \cdot AB = A_1B_2 = 4 \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} & A_1C_2 \perp AC \\ & S_{A_1C_1C_1} = A_1C_2 \cdot AC = A_1C_2 = 4 \end{aligned} \right\} \\ & B_1X \perp BC \\ & S_{B_1C_1C_1} = B_1X \cdot BC = B_1X = 3 \\ & A_1C_2 = A_1B_2 = 4 \end{aligned}$$

I)



$$\left. \begin{aligned} & A_1H \perp (ABC), H \in (ABC) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{По Th Пифагора: } & AB_2 = \sqrt{AA_1^2 - A_1B_2^2} = \\ & = \sqrt{AA_1^2 - A_1C_2^2} = AC_2 \\ B_2H = & \sqrt{AB_2^2 - A_1H^2} = \sqrt{AC_2^2 - A_1H^2} = C_2H \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & A_1H \perp (ABC) \\ & A_1C_2 \perp AC \\ & HC_2 = \text{пр}(A_1C_2)_{ABC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow HC_2 \perp AC$$

по Th 3<sup>er</sup> I-x

$$\left. \begin{aligned} & A_1H \perp (ABC) \\ & A_1B_2 \perp AB \\ & HB_2 = \text{пр}(A_1B_2)_{ABC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow HB_2 \perp AB$$

по Th 3<sup>er</sup> I-x

$$\left. \begin{aligned} & \angle AC_2H = \angle AB_2H \\ & AC_2 = AB_2 \\ & HC_2 = B_2H \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta AC_2H = \Delta AB_2H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle C_2AH = \angle B_2AH \Rightarrow AH$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} & \text{I) } AH - \text{вис-са } \Delta ABC \\ & \Delta ABC - \text{пл} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH \perp BC$$

$$\left. \begin{aligned} & AH \perp BC \\ & A_1H \perp BC \\ & (\text{т.к. } A_1H \perp (ABC)) \end{aligned} \right\} \Rightarrow BC \perp (AA_1) \Rightarrow BC \perp AB_1 (\text{т.к. } AB_1 \perp AA_1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

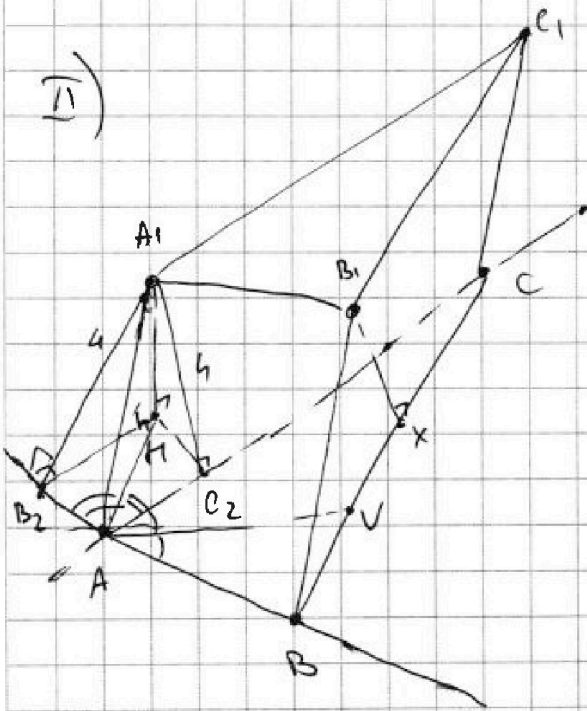
СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{array}{l} BB_1 \perp BC \\ B_1K \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BB_1 \times \in B_1 \Rightarrow BB_1 = 3 = AA_1 \quad (\text{т.к. } AA_1 \perp BB_1) \\ \text{т.к. призма}$$

Тогда в  $\triangle AB_2A_1$  катет  $A_1B_2 = 4 \Rightarrow$  гипотенузы  $AA_1 = 3$ .

Такого быть не может. Значит  $A$  лежит на внешней бис-се



т.ч. о.  $C_2 \in [AC]$   
 $B_2$  лежит на  $AB$  за пределами  $AB$

$\exists$   $AV$ -бис-са  $\triangle ABC$   
Тогда  $AH \perp AV$ , т.ч.  
 $\angle CAH + \angle CAV = \frac{1}{2}(\angle CAB_2 + \angle CAB) =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$

$\left. \begin{array}{l} AV \perp AH \\ AV \perp AH \\ AV \perp BC \quad (\text{т.ч. бис-са } AV) \\ AV, BC, AH \in (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow AH \parallel BC$

$$\left. \begin{array}{l} AH \parallel BC \\ AA_1 \perp BB_1 \end{array} \right\} \Rightarrow (AA_1H) \parallel (BB_1C)$$

$$\left. \begin{array}{l} AH \parallel BC \\ AA_1 \perp AH \\ BB_1 \perp \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1H \perp AH \\ B_1X \perp BC \\ AH \parallel BC \\ A_1H, AH \subset (AA_1H) \\ B_1X, BC \subset (BB_1C) \\ (AA_1H) \parallel (BB_1C) \end{array} \right\} \Rightarrow A_1H \parallel B_1X$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1H \parallel B_1X \\ A_1, B_1 \in (A_1B_1C_1) \\ H, X \in (ABC) \\ (ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \end{array} \right\} \Rightarrow A_1H = B_1X = 3 \Rightarrow \text{высота призмы } h = A_1H = 3.$$

Отв.:  $h = 3$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

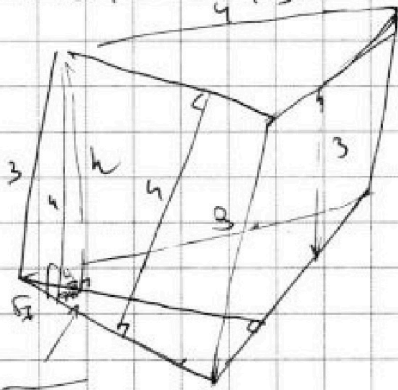
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 16 = \frac{1}{4} + 9$$

$$x^2 = \frac{1}{4} < 0$$

$$x^2 + 64 = \frac{1}{4} + 36$$

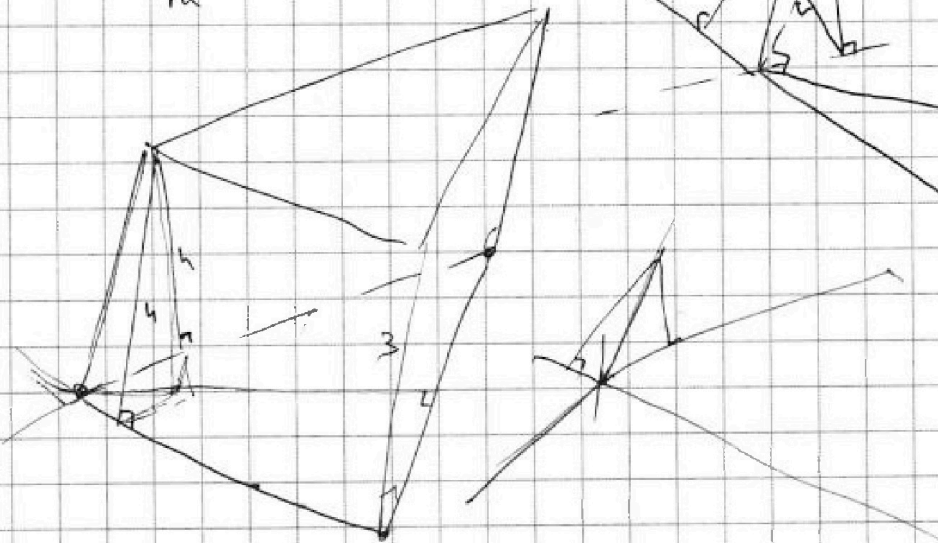
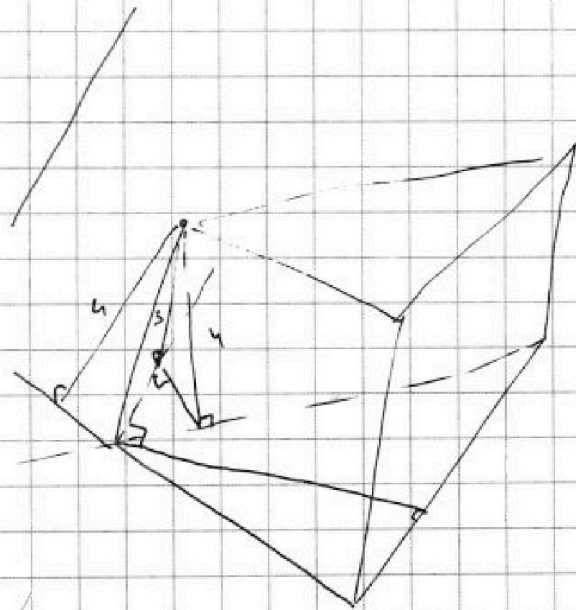
$$16 - 9 = 7$$



$$\sqrt{16 - h^2}$$

h

$$9 - h^2 = 16 - h^2 + 7$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = P$$

$$6\cos^2 x - 3 + 6\cos x$$

$$2\cos^2 x + 2\cos x - 1$$

$$\textcircled{+} = 1 + 2$$

$$2\cos 2x \cdot \cos x + 3\cos 2x + 5\cos x = P$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = P$$

$$2t + t - 1$$

~~$$4t^3 - 3t + 6t^2 - 3 + 6t = P$$~~

~~$$4t^3 + 3t$$~~

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$$

$$4t^2 + 4t + 1$$

$$4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = 4t^2 + 4t + 1$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f(1) = 10$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$$

$$a^3 = 4 \Rightarrow a = \sqrt[3]{4}$$

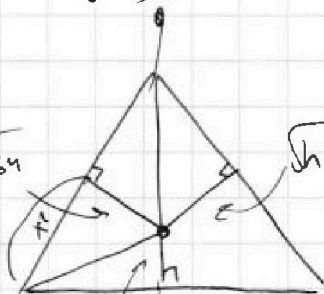
$$3a^2b = 6$$

$$b = \frac{2}{(\sqrt[3]{4})^2} = 3\sqrt{\frac{8}{16}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$f(t) = \left(\sqrt[3]{4}x + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3$$

$$\frac{1}{2}h = 4$$

$$h = 8, 8; 6$$

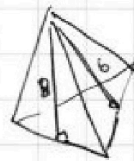


$$\frac{1}{4} + 9 = x^2 + 16$$

$$x^2 = 5 - \frac{1}{4}$$

$$x^2 = \frac{19}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{19}}{2}$$



$$\frac{1}{4} +$$

$$h^2 - 36 + \frac{1}{4} - h^2 + 64 = \frac{\sqrt{113}}{2}$$

$$\frac{24}{223}$$

$$\frac{72}{4852}$$

$$\frac{\sqrt{19}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{19}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{19}}{2}$$

4+6+3-3

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin x \cdot \cos x$$

-21

-216 -333

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{30}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{5}} - \frac{65}{\sqrt{5}} - \frac{35}{\sqrt{5}}$$

$$4t^2 + 3$$

$$-100 \quad \frac{5}{4}$$

$$+\frac{1}{2} \quad \frac{100}{4 \cdot 4} \cdot \frac{25}{4 \cdot 4}$$

$$22 \quad \frac{25}{\sqrt{2}}$$

$$64 - 36 = 28$$

$$28 - 4$$

$$80 + 32$$

$$112 + 1$$

$$\frac{113}{2}$$

$$\frac{\sqrt{19}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{19}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$$

$$15$$

→

$$\sqrt{\frac{39-35}{4^2}} = \sqrt{\frac{4}{4^2}} = \frac{1}{10} \quad \frac{-65-35}{-4^2} = \frac{100}{4^2} = \frac{25}{4^2}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$4 \cdot 4$$

$$4^2 = \sqrt{2} \cdot 6 = 8$$

$$16 \quad 6^2 = 2$$

$$\sqrt{2}$$

$$8$$

$$100 \cdot 4$$

$$200$$

$$25 \cdot 4 \cdot 4$$

$$5 \cdot 4$$

$$x \geq -3$$

$$4 \rightarrow x+2 \geq 2-3$$

$$z \leq 7$$

$$\sqrt{20} \quad 20 \cdot \frac{5}{4} = 400 \cdot 20$$

$$\sqrt{2}$$

$$\cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x \sin x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \sin x + 2\sin^2 x$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$f'(t) > 0$$

$$\frac{x}{4}$$

$$-4+6-3-3$$

10

$$\text{при } p \in [f(-\frac{1}{2}); f(1)] = [-4; 10]$$

$$\cos(2x+x) = \cos 3x$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{CF}{CE} = ?$

$\frac{CY}{YE} = \frac{3}{10}$   
 $\frac{CA}{AB} = \frac{3}{10}$

$CD^2 = CB \cdot CE$

$\frac{CD}{CE} = \frac{CB}{CE}$

$\frac{ED}{AB} = \frac{EX}{XA}$

$\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$

$\left(\frac{CD}{DE}\right)^2 = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AE}$

$180^\circ - (1 - \alpha + \beta - \gamma)$

$\cos(3x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$   
 $= 2\cos^2 x - \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x =$   
 $= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$



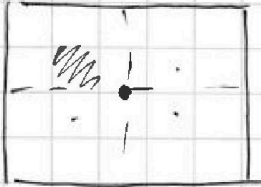


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 25000 \\ -2 \\ \hline 25000 \\ -2 \\ \hline 25000 \\ \cdot 2 \\ \hline 50000 \end{array}$$

$$\frac{200 \cdot 250}{2} = 25000$$

$$\frac{25000}{2}$$

$u - u = 2$

$$\begin{array}{r} C_{25000}^4 \\ - C_{25000}^2 \\ \cdot C_{25000}^2 \\ \hline u - u = C_{12500}^2 \end{array}$$

всего:  $3 C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2 = 25000!$

$a > b$   $552 | 4$   
 $138$

$a - b \neq 3$

$(a - c)(b - c) = p^2$

$a = c$

$a - c = p^2$

$b - c = 1$

$3 \cdot 17 = 11$

$a + b^2 = 560$

$138 | 2$   
 $69$

$a - b = p^2 - 1$

$561 | 3$   
 $187 | 3$   
 $62.9$

$a + b^2 = 560$

$b^2 + b = 560 - p^2$

$561 - p^2$

$b(b + 1) =$

$7^2$	0	0
$14^2$	1	1
$21^2$	2	1
$28^2$	3	0

$p = 3$

$a - c = p = b - c$

$552 | 4$   
 $138$

$8.3$   $2) a - c = -1$   
 $2^4$   $b - c = p^2$

$12$   
 $22$   
 $529$   
 $31$

$23$   
 $23$   
 $529$   
 $69$