



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

✓ $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

- ✓ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

✓
$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

- ✓ 3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

- ✓ 5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- ✓ 6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

b_1 - первый член геом. посл.

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = q$$

Тогда:

$$b_7 = b_1 q^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$b_{13} = 5-x = b_1 q^{12}$$

$$b_{15} = b_1 q^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

ОДЗ:

$$\frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0$$

$$\frac{+}{-} \quad \frac{-}{+}$$

$$-1 \quad \frac{35}{13}$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

т.к. $b_{15} > 0 \Rightarrow b_{13} > 0 \Rightarrow$
 $5-x > 0$
 $5 > x \quad (**)$

возведем в квадраты:

$$b_7^2 = b_1^2 q^{12} = \frac{13x-35}{(x+1)^3}; \quad b_{13}^2 = b_1^2 q^{24} = (5-x)^2; \quad b_{15}^2 = b_1^2 q^{28} = (13x-35)(x+1) = b_{15}^2$$

Заметим, что:

$$(b_{15}^2)^3 = (b_1^2 q^{28})^3 = b_1^6 q^{84} = (13x-35)^2 (x+1)^3$$

$$(1) \quad b_7^2 \cdot b_{15}^6 = b_1^2 q^{12} \cdot b_1^6 q^{84} = b_1^8 q^{96} = (13x-35)^4$$

$$(2) \quad (b_{13}^2)^4 = (b_1^2 q^{24})^4 = b_1^8 q^{96} = (5-x)^8$$

Заметим, что (1) = (2)

Тогда: $(13x-35)^4 = (5-x)^8$
 $|13x-35| = (5-x)^2$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 13x-35 \geq 0 \\ 13x-35 = 25-10x+x^2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 13x-35 < 0 \\ 35-13x = 25-10x+x^2 \end{array} \right. \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{35}{13} \\ x^2-23x+60=0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{35}{13} \\ x^2+3x-10=0 \end{array} \right. \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{35}{13} = 2\frac{9}{13} \\ (x-20)(x-3)=0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{35}{13} \\ (x+5)(x-2)=0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2\frac{9}{13} \\ x=20 \\ x=3 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 2\frac{9}{13} \\ x=-5 \\ x=2 \end{array} \right. \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=20 \text{ (не подходит)} \\ x=-5 \\ x=2 \text{ (не подходит)} \end{array} \right. \quad \text{Ответ: } 3, -5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

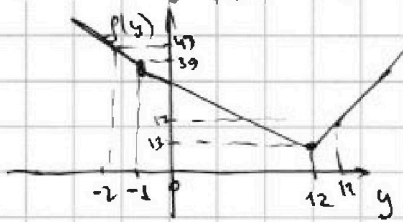
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} - 2 + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2} & (1) \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-x^2} & (2) \end{cases}$$

(2): $\text{кр. } x \in [0; 13]$

$\Delta \wedge x \quad f(y) = |y+1| + 3|y-12| =$



ломаная, раскрывается как $y = kx + b$

$f(-1) = 3 \cdot 13 = 39$

$f(12) = 13$

$f(-2) = 1 + 3 \cdot 14 = 43$

$f(15) = 14 + 3 = 17$

при $y = -1$ — т. перелома
 $y = 12$

Получается что $f(y) \geq 13$
 $\Delta \wedge x \geq 13$

$\Rightarrow \Delta \wedge x = \text{кр. } x = 13$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 12 \end{cases}$$

Подставим в (1)

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}; \quad \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x}$$

(*) $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{x+3} \\ b = \sqrt{4-x} \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 & (3) \\ a - b + 5 = 2ab & (4) \end{cases}$$

Сложим (3) и (4): $a^2 + b^2 + a - b + 5 = 7 + 2ab$

$$(a-b)^2 + a - b - 2 = 0 \quad \text{] } t = a - b$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$(t+2)(t-1) = 0$$

$$\begin{cases} t = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = -2 & (7) \\ \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 1 & (8) \end{cases}$$

~~$\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} = 2$~~

$$\begin{cases} x+3 + 4-x - 2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} = 4 \\ x+3 + 4-x - 2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = 2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} \\ 3 = \sqrt{x+3}\sqrt{4-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 = -4x^2 + 4x + 48 \\ 9 = -x^2 + x + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 39 = 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x - \frac{39}{4} = 0 & (5) \\ x^2 - x - 3 = 0 & (6) \end{cases}$$

(5): $D = 1 + 4 \cdot \frac{39}{4} = 40$

$$\begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{40}}{2} \quad (\text{уг. } xx) \\ x = \frac{1 - \sqrt{40}}{2} \quad (\text{уг. } xx) \end{cases}$$

Подставим в (7):

$$\frac{1 + \sqrt{40}}{2} - \sqrt{\frac{8 + \sqrt{40}}{2}} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{40}}{2}} - \sqrt{\frac{7 + \sqrt{40}}{2}} = 260$$

$x = \frac{1 + \sqrt{40}}{2}$ не кор., т.к. ответ > 0

$x = \frac{1 - \sqrt{40}}{2}$ кор., т.к. ответ < 0 .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы во каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(6) \quad x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 3 = 13$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \text{ (решение)}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \text{ (решение)}$$

Проверка:

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ \frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right\}$$

$$y = 12$$

$$z = 0$$

Проверим в (8):

$$\sqrt{\frac{1 + \sqrt{13} + 6}{2}} - \sqrt{\frac{8 - 1 + \sqrt{13}}{2}} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{13}}{2}} - \sqrt{\frac{7 + \sqrt{13}}{2}} = 0$$

если $x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$, то значение < 0 и не подходит

$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ по условию > 0 и подходит



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\text{Т.к. } \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\text{То: } 4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$\cos x = t \quad |t| \leq 1.$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3, \text{ где } |t| \leq 1.$$

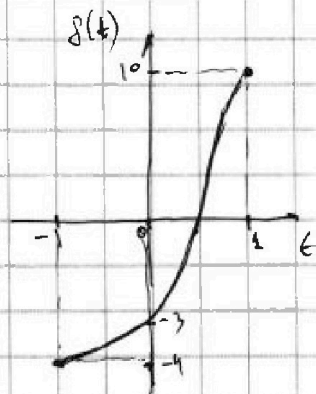
$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 0$$

$$4t^2 + 4t + 1 = 0$$

$$(2t+1)^2 = 0$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{c} t \quad + \quad f'(t) \\ -\frac{1}{2} \quad + \\ \hline \delta(t) \end{array}$$



$$f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$$

$$f(1) = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$f(0) = -3$$

$$\Rightarrow -4 \leq f(t) \leq 10$$

если $p > 10$: корней нет

$-4 \leq p \leq 10$ если корни

$p < -4$: корней нет

Решим ур-ие относительно p .

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$

$$3t = y - \frac{1}{2} \quad y \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$$

$$4\left(y - \frac{1}{2}\right)^3 + 6\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(y - \frac{1}{2}\right) - 3 - p = 0$$

$$4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 (4y - 2 + 6) + 3y - \frac{3}{2} - 3 - p = 0$$

$$(y^2 - y + \frac{1}{4})(4y + 4) + 3y - \frac{3}{2} - 3 - p = 0$$

$$4y^3 + 4y^2 - 4y^2 - 4y + 4y + 1 + 3y - \frac{3}{2} - 3 - p = 0$$

$$4y^3 - \frac{7}{2} - p = 0$$

$$y^3 = \frac{7/2 + p}{4}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{7/2 + p}{4}}$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{7/2 + p}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$\cos x = t$$

$$\cos x = \sqrt[3]{\frac{7/2 + p}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \arccos \left(\sqrt[3]{\frac{7/2 + p}{4}} - \frac{1}{2} \right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$x = \pm \arccos \left(\sqrt[3]{\frac{7/2 + p}{4}} - \frac{1}{2} \right) + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{или } p \in [-4; 10]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

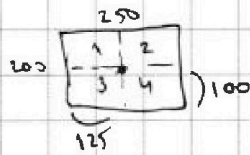


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

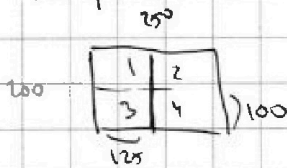
1) рассмотрим симметрию отн. центра: (событие A)



если клетка есть в области 1, то есть клетка, ей симметричная, в об-ти 4. \Rightarrow вместе в клетках, ис-ключно в области 4 клетки.

Вариантов: $\binom{4}{200-125}$

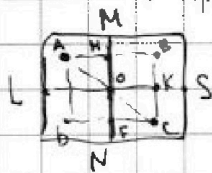
2) рассмотрим симметрию отн. средней линии: (событие B)



если клетка закрашена в об-ти 1, то закрашена клетка, ей симметр. (т.е. либо в об-ти 2, либо в об-ти 3), в равности от выбранной средней линии для симметрии)

Вариантов: $\binom{4}{200-115} \cdot 2$
↑
т.к. закрашена линия

3) рассмотрим случаи, в которых есть и симметрия однос. центра и симметрия относительно средней линии (событие A ∩ B)



] симметрия отн. MN и ч. O.

] есть (.) A тогда есть точки B (сим. отн. MN) и C (сим. отн. O)

$$\Delta OABC : \begin{cases} AO = OB \\ AO = OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NO \parallel BC \\ BC \perp LS \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NO \perp LS \\ BC \perp LS \end{cases}$$

$$OK = KC$$

\Rightarrow B и C сим. отн. LS

В т.к. у нас симметрия отн. MN, то \exists точка D, сим. с

$$\begin{cases} DF = FC \\ DF \perp FC \end{cases} \Rightarrow \text{D есть точка}$$

замечим, что тогда (.) A, B, C, D симметричны относительно друг друга

по симм. отн. центра, либо по симм. отн. средней линии.

Т.е. если при таких условиях мы выделяем одну клетку на поле, то однозначно устанавливается 4 клетки.

\Rightarrow всего таких вариантов: $\binom{4}{250 \cdot 200} \cdot \binom{1}{(250 \cdot 200 - 4)} \cdot \frac{1}{4}$

~~Всего вариантов~~

Нам нужно найти: $A \cup B = A + B - (A \cap B) =$

$$= 3 \cdot \binom{4}{25 \cdot 200} - \frac{1}{16} \binom{1}{250 \cdot 200} \cdot \binom{1}{(250 \cdot 200 - 4)}$$

Ответ: ~~3~~ $3 \binom{4}{25000} - \frac{1}{16} \binom{1}{50000} \cdot \binom{1}{49996}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a > b & (1) \\ (a-b) \div 3 & (2) \\ (a-c)(b-c) = p^2 & (3) \\ a+b^2 = 560 & (4) \end{cases}$$

$$\Delta \text{ из (3): } (a-c)(b-c) = p^2$$

$$\text{т.к. } a-c \in \mathbb{Z}$$

$$b-c \in \mathbb{Z}$$

$$p^2 \in \mathbb{Z}$$

то:

$a-c$	$b-c$	$\#$
1	p^2	(7)
p^2	1	(6)
p	p	(7)
-1	$-p^2$	(8)
$-p^2$	-1	(9)
$-p$	$-p$	(10)

$$\text{т.к. } a > b, \text{ то } a-c > b-c$$

$$\text{и т.к. } p^2 \geq 1, \text{ то случаи}$$

(5), (7), (9), (10) не подходят

\Rightarrow случаи (6) и (8)

$$(6) \begin{cases} a = c + p^2 \\ b = c + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (a-b) \div 3 \\ a-b = c + p^2 - c - 1 = p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \div 3 \end{cases}$$

p может иметь при остатке по mod 3: 0; 1; 2, тогда $(p-1)(p+1) \div 3$ $p \equiv 0$, а т.к. p - простое число, то такое может быть только при $p = 3$.

$$\begin{cases} a = c + 9 \\ b = c + 1 \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c = 9 \\ c-b = -1 \end{cases} + \begin{cases} a-b = 8 \\ a+b^2 = 560 \end{cases} \quad \begin{cases} b-a = -8 \\ a+b^2 = 560 \end{cases}$$

$$b + b^2 = 552$$

$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$(b+24)(b-23) = 0$$

$$\begin{cases} b = -24 \Rightarrow a = -16 \Rightarrow c = -25 \\ b = 23 \Rightarrow a = 31 \Rightarrow c = 22 \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-p^2 \end{cases} \quad a-b = \cancel{c-1} - \cancel{c} + p^2 = p^2 - 1 \quad \text{аналогично (6): } p=3$$

$$\begin{cases} a = c-1 \\ b = c-9 \end{cases} \quad \begin{cases} a-c = -1 \\ c-b = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} a-b = 8 \\ a+b^2 = 560 \end{cases} \quad \text{аналогично (6) } \& \#$$

$$\begin{cases} b = -24 \Rightarrow a = -16 \Rightarrow c = -15 \\ b = 23 \Rightarrow a = 31 \Rightarrow c = 32 \end{cases}$$

Ответ: $(-16; -24; -15); (31; 23; 32)$
 $(-16; -24; -25); (31; 23; 22)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(13x - 35)^4 = (5 - x)^8 = (x - 5)^8$$

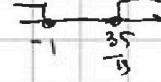
$x = 3$

$$(20 - 35)^4 = (5 - 3)^8$$

$$4^4 = 2^8$$

$$2^8 = 2^8$$

$$(13x - 35)(x + 1) > 0$$



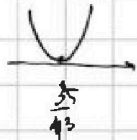
$$a^4 = 6^4$$

$x < 35/13$

$$13x - 35 < 0$$

$$f'(x) = 4(13x - 35)^3 \cdot 13$$

$$x' = \frac{35}{13}$$

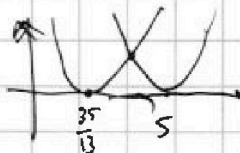


~~$(8 - x)^8 = (13x - 35)^8$~~

~~$f'(x) = 8(8 - x)^7 \cdot (-1) = -8(8 - x)^7$~~

~~$f'(x) = 8(13x - 35)^7 \cdot 13$~~

$$5 = x^2$$



$$13x - 35 = (x - 5)^2$$

$$x \geq \frac{35}{13} = 2 \frac{2}{13}$$

$$13x - 35 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$(x - 20)(x - 3) = 0$$

$$x = 3$$

$$x = 20$$

$$13x - 35 < x^2 - 10x + 25$$

$$35 - 13x < x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 + 3x - 10 < 0$$

Проверка:

$$x = 2: (26 - 35)^4 = 3^4$$

$$3^4 = 3^4$$

$$x = 20$$

$$225^4 = 15^8$$

$$a = -16 \quad b = -24 \quad c = -25$$

$$a = 2 - 16 \quad b = -24 \quad c = -15$$

$$a = 560 - 6^2$$

$$b = 24 \quad a = 2560 - 576 = -16$$

$a \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha = 4$

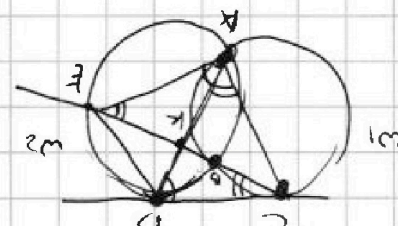
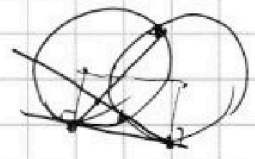
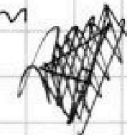
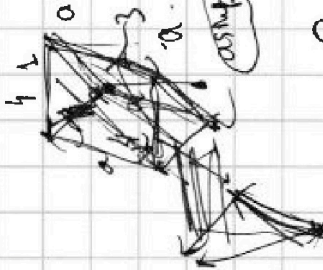
$a \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \beta = 6$

$$(x + 5)(x - 2) = 0$$

$$x = -5$$

$$x = 2$$

Ответ: 20; 3; -5;



$$a + b^2 = 360$$

$$\frac{25}{25} \cdot \frac{60}{60} = 1$$

$$\frac{96}{96} = 1$$

$$\frac{CF}{KE} = \frac{KD}{KE}$$

$$\frac{CF}{KE} = \frac{KD}{KE}$$

$$\frac{CF}{KE} = \frac{3}{10}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Nº1.

$$b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{x+11}} = b_1 q^6$$

$$b_{13} = 5-x = b_1 q^{12}$$

$$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b_1 q^{14}$$

$$\frac{b_{13}}{b_7} = q^6 = \left(\frac{b_{15}}{b_7}\right)^3$$

$$\frac{b_{13}}{b_7} = \frac{b_{15}^3}{b_7^3}$$

$$b_{13}^4 = b_7^4 \cdot b_{15}^3$$

$$(5-x)^4 = \sqrt{\frac{13x-35}{x+11} \cdot \frac{(13x-35)^6 (x+1)^6}{(13x-35)^2 (x+1)^2}}$$

$$\frac{b_{15}}{b_7} = q^6$$

$$\frac{b_{15}}{b_{13}} = q^2$$

$$\frac{b_{15}}{b_7} = q^8$$

$$\frac{b_{15}}{b_7} = q^8$$

$$\frac{b_{15}^3}{b_{13}^3} = \frac{b_{15}}{b_7} \quad \sqrt{x^c} = x$$

$$b_{15}^3 \cdot b_7 = b_{13}^4$$

$$\sqrt{(13x-35)(x+1)} \cdot \sqrt{13x-35} = (5-x)^4$$

$$\sqrt{(13x-35)^2 (x+1)^6} \sqrt{13x-35} = (5-x)^4$$

$$\frac{13x-35}{x+11} > 0$$

$$\frac{x-1}{-1} < \frac{35}{11}$$

$$\sqrt{(13x-35)^2 (x+1)^6} = (5-x)^4$$

$$\sqrt{(13x-35)^2 (x+1)^6} = (5-x)^4$$

$$\sqrt{(13x-35)^2 (x+1)^6} = (5-x)^4$$

$x < -1$:

$$(13x-35)^2 (x+1)^6 > 0$$

$$14-6 = 8 > 0$$

$$y = (5-x)^8$$

$$x \geq \frac{35}{13} = 2\frac{9}{13}$$

$$(13x-35)^2 (x+1)^6 = (5-x)^8$$

$$\sqrt{(13x-35)^2 (x+1)^6} = (5-x)^4$$

$$12-6 = 6 > 0$$

$$b_7 \cdot b_{15}^6 = b_{13}^8$$

$$\sqrt{\frac{13x-35}{x+11}} \cdot (13x-35)^3 (x+1)^3 = (5-x)^8$$

Nº1

$$b_7^2 = b_1^2 q^{12} = \frac{13x-35}{(x+11)^3}$$

$$b_7^2 q^{24} = 12.8 = 96$$

$$b_1 q^{12} = 5-x$$

$$b_7^2 q^{28} = (13x-35)(x+1)$$

$$b_1^6 q^{84} = (13x-35)^3 (x+1)^3$$

$$b_1^6 q^{84} \cdot b_1^2 q^{12} = (13x-35)^4$$

$$b_1^8 q^{96} = (13x-35)^4 = (5-x)^8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \\ a=p^2+c \\ b=1+c \end{cases}$$

$$a > b \text{ (3)}$$

p-нр. число
70

$$2) \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p^2+c-1-c & \neq 3 \\ (p^2-1) & \neq 3 \end{aligned}$$

$$(p-1)(p+1) \neq 3$$

4, 9, 16, 25, 36, 6

31
32

$$a+b^2=560$$

$$p^2+c+1+c+c^2=560$$

$$c^2+3c+p^2-560=0 \quad p^2=560-c^2-3c$$

$$\begin{array}{r} 560 \\ 20 \\ 16 \\ 10 \\ 5 \\ 1 \end{array}$$

$$2 \cdot 5 = 7$$

$$D = 9 - 4p^2 + 4 \cdot 560 = -4p^2 + 2249$$

$$-4p^2 + 2249 > 0$$

$$2249 > 4p^2$$

$$560 > p^2$$

$$\sqrt{560} > p > \sqrt{560}$$

$$4\sqrt{560} > p > \sqrt{560}$$

p	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x										
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
	21	22	23							

$$\begin{cases} p=3 \\ a-c=9 \\ b-c=1 \\ a+b^2=560 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c=9 \\ a+b^2=560 \\ b+b^2=552 \end{cases}$$

$$b(b+1)=552$$

$$D = 24 - 23 = 552$$

$$(b+24)(b-23)=0$$

$$\begin{cases} b=-24 & a=-16 & c=-25 \\ b=23 & a=31 & c=22 \end{cases}$$

$$(a-c)(b-c) = 9 \cdot 1 = 9$$

$$-16+25=9 \quad -24+25$$

$$2) \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=c-1 \\ b=c-p^2 \end{cases}$$

$$a-b = c-1 - (c-p^2) = p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \neq 3$$

$$\begin{cases} a=c-1 & p=3 \\ b-a=-1 & p=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b^2=560 \end{cases} \quad c=a+1$$

$$b+b^2=552$$

$$\begin{cases} b=-24 & a=-16 & c=-15 \\ b=23 & a=31 & c=32 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3+4+5+4 & = 16 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a-b=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 1 \\ \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = -2 \end{cases}$$

$$x+3+4-x-2\sqrt{5}=1$$

$$2\sqrt{5}=6$$

$$\sqrt{5}=3$$

$$-x^2+k+12=9$$

$$-x^2+x+3=0$$

$$x^2-x-3=0$$

$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ 4-x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -3 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$(x+3)(4-x) = 9$$

$$4x - x^2 + 12 - 3x = 9$$

$$-x^2 + x + 3 = 0$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x+3+4-x-2\sqrt{5}=4$$

$$3=2\sqrt{5}$$

$$(x+3)(4-x) =$$

$$-x^2+x+12$$

$$D = 1 + 4 \cdot 3 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$0,3 \text{ ??}$$

$$9 = 4(x+3)(4-x)$$

$$9 = -4x^2 + 4x + 48$$

$$-4x^2 + 4x + 39 = 0$$

$$4x^2 - 4x - 39 = 0$$

$$x^2 - x - \frac{39}{4} = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot \frac{39}{4} = 40$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{40}}{2}$$

(a, b, c) 5/10

$$a = 3k + a_1$$

$$b = 2l + a_2$$

$$c = 3m + a_3$$

$$a > b$$

$$(a-b) \cdot 3$$

$$ac - (a-c)(a-c) = p^2$$

$$a+b^2=560$$

$$3(k-m) + a_1 - a_3 = p$$

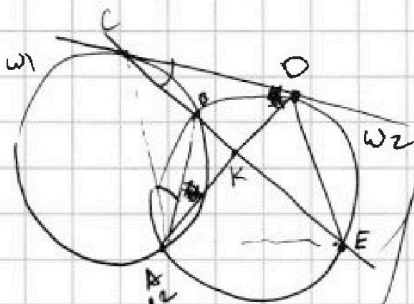
$$ab - ac - bc + 2 = p^2$$

$$560 - b^2 - bc + 2 = p^2$$

$$7 \cdot 12 + 3 + 4 + 5 + 16 + 4 = 16$$

$$\frac{EK}{KE} = 9$$

$$\frac{EK}{KE} = \frac{3}{10}$$



$$1) a-c=p$$

$$b-c=p$$

$$a=p+c$$

$$b=1+c$$

$$2) \begin{cases} a-c=1 & a=1+c \\ b-c=p^2 & b=p^2+c \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} a-c=p^2 & a=p^2+c \\ b-c=1 & b=1+c \end{cases}$$

$$(p^2+c-1-c) \cdot 3$$

$$(p^2+1) \cdot 3$$

$$a+b^2=560$$

$$p^2+c+1+2c+c^2=560$$

$$c^2+3c+p^2-559=0$$

$$\frac{1-\sqrt{10}}{2} \approx -3$$

$$\frac{1+\sqrt{10}}{2} \approx 6$$

$$\frac{1+\sqrt{10}}{2} \approx 6$$

$$\frac{1+\sqrt{10}}{2} \approx 6$$

$$1) a-c=p$$

$$b-c=p$$

$$a=c-p$$

$$b=c-p^2$$

$$2) a-c=1$$

$$b-c=p^2$$

$$a=c-1$$

$$b=c-p^2$$

$$a=c-p^2$$

$$b=c-1-x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 1$$

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{2}+3} - \sqrt{4-\frac{1+\sqrt{13}}{2}}$$

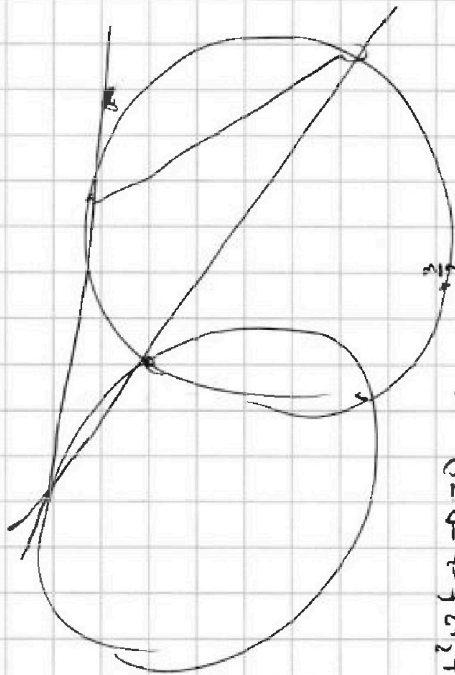
$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}+6}{2}} - \sqrt{\frac{8-1-\sqrt{13}}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{2}} > 0$$

$$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}+6}{2}}$$



$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = 0$$

$$t = y - \frac{3}{2}$$

$$4(y - \frac{3}{2})^3 + 6(y - \frac{3}{2})^2 + 3(y - \frac{3}{2}) - 3 = 0$$

$$4(y-a)^3 + 6(y-a)^2 + 3(y-a) - 3 = 0$$

$$t = y - a$$

$$4(y - \frac{1}{2})^3 + 6(y - \frac{1}{2})^2 + 3(y - \frac{1}{2}) - 3 = 0$$

$$4(y - \frac{1}{2})^3 + 6(y - \frac{1}{2})^2 + 3(y - \frac{1}{2}) - 3 = 0$$

$$4(y - \frac{1}{2})^3 + 6(y - \frac{1}{2})^2 + 3(y - \frac{1}{2}) - 3 = 0$$

$$4(y - \frac{1}{2})^3 + 6(y - \frac{1}{2})^2 + 3(y - \frac{1}{2}) - 3 = 0$$



$$4y^3 - 6y^2 + 3y - 3 = 0$$

$$-2a + 3 - 4a = 0$$

$$-6a + 3 = 0$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$4(y - \frac{3}{2})^3 + 6(y - \frac{3}{2})^2 + 3(y - \frac{3}{2}) - 3 = 0$$

$$4(y - \frac{3}{2})^3 + 6(y - \frac{3}{2})^2 + 3(y - \frac{3}{2}) - 3 = 0$$

$$4(y - \frac{3}{2})^3 + 6(y - \frac{3}{2})^2 + 3(y - \frac{3}{2}) - 3 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№2. } \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2} + 2$$

$$y+11+3|y-12| \geq \sqrt{169-2^2}$$

$$4-x-x^2+y+1-x^2+x^2 > \\ = 4+y-x^2$$

$$4+y-x^2 \geq 0$$

$$x \geq -3$$

$$-13 \leq 2 \leq 7$$

$$x+3+4-x-x^2 = 7-2x$$

$$|2x| \leq 13$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x-2 \geq 0 \\ |2x| \leq 13 \end{cases}$$

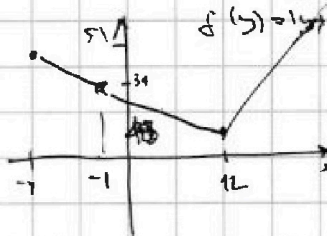
$$\begin{cases} x \geq -3 \\ 4 \geq x+2 \\ -13 \leq 2x \leq 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -3 \\ -13 \leq 2x \leq 13 \\ x+2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x-2 \geq 0 \\ 7-2x \geq 0 \\ 2x \geq 2 \end{cases}$$

$$y \geq -4$$

$$3+4 \geq 5 \\ 5^2 = 10^2 - 2^2 \\ 2x \leq 13 \Rightarrow 5^2$$



$$|y+11+3|y-12| \geq 13.$$

$$|2x| = 0$$

$$|y| = 12$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} - 5$$

$$x+3+4-x-2\sqrt{12+x-x^2} = 4(12+x-x^2)+25-20\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\begin{aligned} (x+3)(4-x) - \\ = 4x - x^2 + 12 - 3x = \\ = 12 + x - x^2 \end{aligned}$$

$$20\sqrt{12+x-x^2} - 25\sqrt{12+x-x^2} = 4(12+x-x^2) + 25 - 20\sqrt{12+x-x^2}$$

$$10\sqrt{12+x-x^2} = 2x - 2x^2 + 32.$$

$$a-b = 2ab-5$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} = a \\ \sqrt{4-x} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b = 2ab-5 \\ a^2+b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow a(1-2b) = b-5$$

$$a-b+a^2+b^2 = 7+2ab-5 \Rightarrow a^2+b^2 = 7$$

$$a-b+a^2-2ab+b^2 = 2$$

$$a-b+(a-b)^2 = 2$$

$$a-b = t$$

$$\begin{cases} t+t-2=0 \\ (t+1)(t-2)=0 \end{cases}$$

$$(t-1)(t+2)=0 \Rightarrow \sqrt{4-x} = 2$$

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{4-x} + 2$$

$$\left(\frac{b-5}{1-2b}\right)^2 + b^2 = 7$$

$$b^2 - 10b + 25 + b^2 - 4b^3 + 4b^4 = 7$$

$$4b^4 + 2b^2 - 4b^3 - 10b + 25 = 7 - 28b + 28b^2$$

$$4b^4 - 4b^3 - 26b^2 + 18b + 18 = 0$$

$$2b^4 - 2b^3 - 13b^2 + 9b + 9 = 0.$$

$$2+2-13+9=0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$N^{\circ} 2$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2}$$

$$|y+1| + 3|y+2| = \sqrt{169-x^2}$$

$169-x^2 \geq 0$
 $169 \geq x^2$
 $|x| \leq 13$
 $17 \geq x \geq -3$

$4-x-2 > 0$
 $4 > x+2$
 $x < 2$

$x+3 - 2\sqrt{4-x-2} = 2\sqrt{y+x-x^2+2} - 5$
 $x+3 - 2\sqrt{4-x-2} = 4(y+x-x^2+2) - 20\sqrt{y+x-x^2+2}$

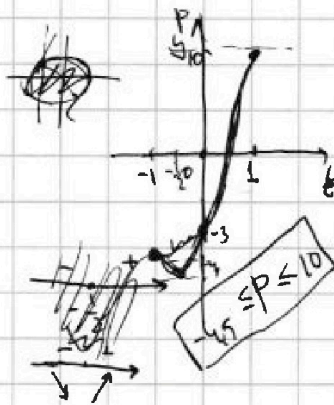
$y+1+3y-36 = \sqrt{169-x^2}$
 $4y-35 = \sqrt{169-x^2}$
 $y+1-3y+36 = \sqrt{169-x^2}$
 $37-2y = \sqrt{169-x^2}$
 $y \leq -1$
 $-y-1-3y+36 = \sqrt{169-x^2}$
 $-4y+35 = \sqrt{169-x^2}$

$y = \frac{\sqrt{169-x^2}}{4}$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
 $\sin^2 x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$
 $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x =$
 $= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$
 $f(x) = 4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$
 еж. корень $\cos x \in [-1; 1]$
 $f(x) = f(x+2\pi)$
 $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$
 $x \in [0; 2\pi]$
 $y = 12t^2 + 12t + 3 = 0$
 $4t^2 + 4t + 1 = 0$
 $(2t+1)^2 = 0$
 $t = -\frac{1}{2}$



$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$
 $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = 0$
 $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$
 $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$
 $f(-\frac{1}{2}) = 4 \cdot (-\frac{1}{2})^3 + 6 \cdot (-\frac{1}{2})^2 + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) - 3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 3 = -4.5$
 $4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$
 $f(x) = f(x+2\pi)$
 $4 \cdot 3t^2 + 6 \cdot 2t + 3 =$
 $= 12t^2 + 12t + 3$



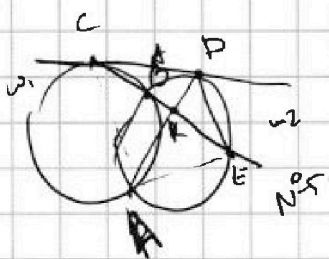
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

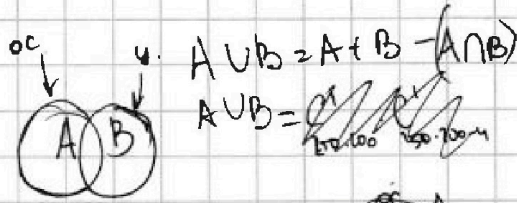
СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

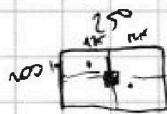
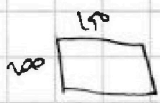
$$3+4+5+5+4+4+6 = 31$$



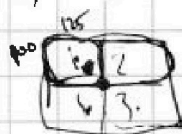
$$\frac{CE}{KE} = \frac{3}{10}$$



$$A \cup B = A + B - B$$



1) 2 1/2 часа



2 1/2

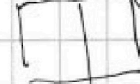
$$C^4_{125 \cdot 200}$$

$$250 \cdot 100 = 100 \cdot 125 \cdot 2$$

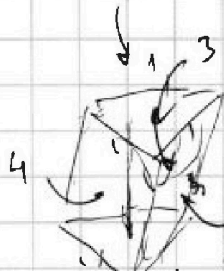


$$C^4_{100 \cdot 200}$$

3)

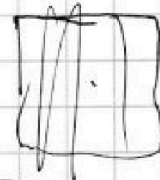


$$C^4_{100 \cdot 250}$$



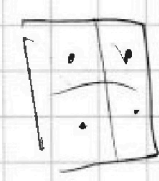
$$\frac{(a-b) \cdot 3}{(a-c)(b-c)} = \frac{1}{2}$$

$$a + b + c = 250$$



15, 4

$$C^1_{200 \cdot 200} \cdot C^1_{(250 \cdot 100 - 4)}$$



$$2 C^1_{100 \cdot 250} + C^1_{125 \cdot 200} - C^1_{100 \cdot 200} \cdot C^1_{(250 \cdot 100 - 4)}$$

$$= 3 C^1_{125 \cdot 200} - C^1_{100 \cdot 200} \cdot C^1_{(250 \cdot 100 - 4)}$$

$$\frac{125 \cdot 200}{250 \cdot 100}$$