



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 (страница 1 из 2)

$$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = b_1 \cdot q^3$$

$$* \quad \underline{x \neq 3}$$

$$\frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0$$

$$(15x+6)(x-3) \geq 0$$

$$b_{10} = x+4 = b_1 \cdot q^9$$

$$b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = b_1 \cdot q^{11}$$

$$q^8 = \frac{b_{12}}{b_4} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)(x-3)^3}{(15x+6)}}$$

$$= \sqrt{(x-3)^4} = |(x-3)^2| = (x-3)^2$$

$$q^2 = \frac{b_{12}}{b_{10}} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$$

На $15x+6$ и числ. и право сократить, ибо если $15x+6=0$, то $b_4=0$, $b_{10} \neq 0 = -\frac{6}{15} + 4 \neq 0$, это невяжущо

$$q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$$

$$q^8 = \frac{((15x+6)(x-3))^2}{(x+4)^4}$$

$$\cancel{(x-3)^2} = \frac{(15x+6)^2 \cancel{(x-3)^2}}{(x+4)^4} \quad | : (x-3)^2 \neq 0$$

$$(x+4)^4 = (15x+6)^2$$

$$((x+4)^2)^2 - (15x+6)^2 = 0$$

$$((x+4)^2 - (15x+6))((x+4)^2 + (15x+6)) = 0$$

$$(x^2 + 8x + 16 - 15x - 6)(x^2 + 8x + 16 + 15x + 6) = 0$$

$$(x^2 - 7x + 10)(x^2 + 23x + 22) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1 (страница 2 из 2)

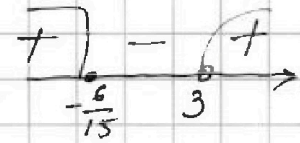
$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ x^2 + 23x + 22 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-5)(x-2) = 0 \\ (x+22)(x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \\ x = -22 \\ x = -1 \end{cases}$$

Осталось учесть, что

$$\begin{aligned} \frac{15x+6}{(x-3)^3} &\geq 0 \\ (15x+6)(x-3) &\geq 0 \end{aligned}$$



$x = 5$ - подх.
 $x = 2$ - не подх.
 $x = -22$ - подх.
 $x = -1$ - подх.

еще одно замечание:
 $b_{10} = b_4 \cdot q$ даже если
 $q < 0$, то $b_{10} > 0$, то есть
 b_{10} и b_4 - одной знака.
Но $b_4 > 0$, то есть $b_{10} > 0$.

Рву $b_{10} > 0$, то $x+4 > 0$. $x > -4$

Так отбрасывается $x = -22$.

Остаётся $x = 5$
 $x = -1$

Ответ: $\{-1; 5\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

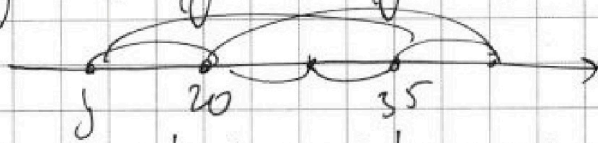
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ страницы 1 из 2

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2} + z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \\ |y-20| + |y-35| + |y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{array} \right.$$

$$|y-20| + |y-35| + |y-35| = \sqrt{225-z^2}$$



$$|y-20| + |y-35| \geq 15 \Leftrightarrow |y-20| + 2|y-35| \geq 15$$

$$0 \leq \sqrt{225-z^2} \leq 15$$

Но тогда это возможно только если

$$\left\{ \begin{array}{l} |y-20| + 2|y-35| \geq 15 \quad (1) \\ \sqrt{225-z^2} = 15 \end{array} \right.$$

$$(1) \text{ если } y \leq 20, \text{ то } |y-20| + 2|y-35| > 15$$

$$20 \leq y < 35, \text{ то } |y-20| + |y-35| \geq 15 \text{ и } |y-35| > 0 \text{ и } \geq 15$$

$$y = 35: |y-20| + 2|y-35| = 15$$

$$y > 35: |y-20| + 2|y-35| > 15$$

$y = 35$

$$\sqrt{225-z^2} = 15 \Leftrightarrow z = 0$$

Остаётся найти x .

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = \sqrt{35-2x-x^2}$$

$$(x+7)(5-x) = 5x-x^2 + 35 - 7x = 35 - 2x - x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+7} = t \geq 0 \\ \sqrt{5-x} = v \geq 0 \end{array} \right.$$

$$t - v + 6 = \sqrt{t^2 - v^2}$$

$$t - v + 6 = |tv|$$

$$t - tv + 6 - v = 0$$

$$t \neq 0$$

$$t^2 + v^2 = x+7 + 5-x = 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2 страница 2 из 2

~~$$t - v + 6 = tv$$~~

~~$$t(1-v) = v - 6$$~~

~~$$t = \frac{v-6}{1-v} = -\frac{6-v}{1-v} = -\left(\frac{5}{1-v} + 1\right)$$~~

~~$$\sqrt{x+7} = 1 - \frac{5}{1-\sqrt{5-x}}$$~~

(если $1 - \sqrt{5-x} = 0$, то $x = -6$, $v = 1$, то $v-6 \neq 0$)

~~$$t - v + \frac{t^2 + v^2}{2} = tv \quad | \cdot 2$$~~

~~$$t - 2v + (t-v)^2 = 0$$~~

~~$$(t-v)(t-v+2) = 0$$~~

~~$$\begin{cases} t=v \\ t=v-2 \end{cases}$$~~

~~$$\begin{cases} \sqrt{x+7} = \sqrt{5-x} \\ \sqrt{x+7} = \sqrt{5-x} - 2 \end{cases}$$~~

~~$$\begin{cases} x+7 = 5-x \\ \sqrt{x+7} + 2 = \sqrt{5-x} \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} 2x = -2 \\ x+7 + 4\sqrt{x+7} + 4 = 5-x(x) \\ x = -1 \end{cases}$$

$$(2) \quad 2x + 6 = 4\sqrt{x+7}$$

$$x+3 = 2\sqrt{x+7}$$

$$(x+3)^2 = 4(x+7)$$

$$x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 = 25 - 8 = 17$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = -\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\sqrt{17} > \sqrt{16}$$

$$-\frac{5 + \sqrt{17}}{2} < -\frac{5 + \sqrt{16}}{2} < -3$$

$$-\frac{5 - \sqrt{17}}{2} < -\frac{5 - \sqrt{16}}{2}$$

Ответ: $\left\{ (-1; 35; 0); \left(-\frac{5 + \sqrt{17}}{2}; 35; 0\right) \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При $p \in [-10; 4]$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 3x - 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

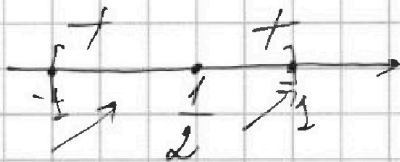
$$4 \cos^3 x - 3 \cos x - 3(2 \cos^2 x - 1) + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x + 3$
и исследуем её на $[-1; 1]$

$$f'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x - 1)^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



$$f(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 3 = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$$

$$f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4.$$

Гало быть, при любом $p \in [-10; 4]$

$f(x) = p$ имеет \neq решение, при $x \in [-1; 1]$

А теперь $f(\cos x) = p$. Поскольку $\cos x \in [-1; 1]$,
то и ур-ие $f(\cos x) = p$ имеет хотя бы 1 решение,
при любом $p \in [-10; 4]$

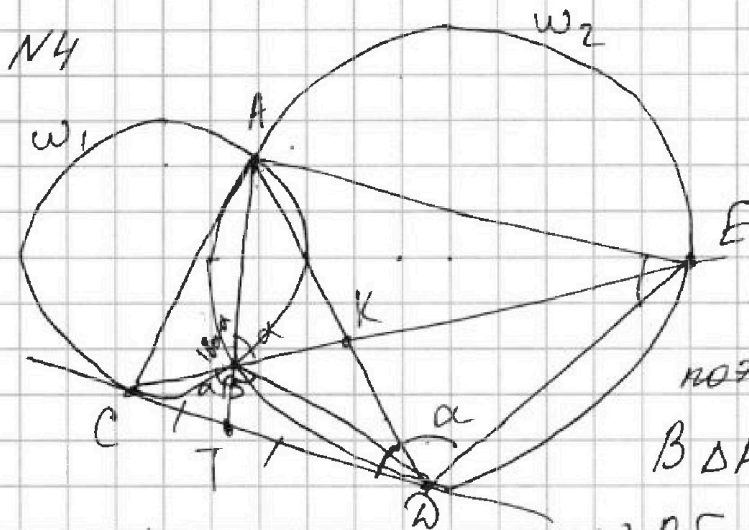


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle AED = \angle ADC$$

$$\parallel \frac{\sphericalangle AD}{2} \parallel \frac{\sphericalangle AD}{2}$$

ABDE - вписанный,
поэтому

в $\triangle ABE$ $\angle CBA$ - внешний

$$\angle CBA = \angle BAE + \angle AEB = \frac{\sphericalangle BE}{2} + \frac{\sphericalangle AB}{2} = \frac{\sphericalangle AE}{2}$$

($\sphericalangle AE \ni D$)

Но тогда $\angle CBA = \frac{\sphericalangle BE}{2} + \angle ADE = \frac{\sphericalangle AE}{2} + \frac{\sphericalangle AE}{2} = 180^\circ$

$\angle AB \cap CD = T$, $AD \cap CE = K$.

$\angle TBD = \angle AED$, т.к. ABDE - вписанный

$$\left. \begin{aligned} TC^2 &= TB \cdot TA \\ TD^2 &= TB \cdot TA \end{aligned} \right\} TC = TD$$

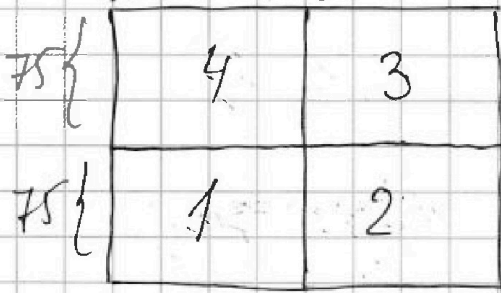


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NS (сторона 1 и 2)



Разобьем прямоугольник средними линиями на 4 прямоугольника, как на рисунке.

Вместо того, чтобы закрашивать в клетку, закрасим 4, а дальше

придем к нужной симметрии.

Случай 1: все 4 закрашенные клетки - в одном прямоугольнике (длина которого 75×100)

и выбрать их C_{750}^4 . Далее есть 3 варианта, как их отразить: относительно вертик. ср. линии, горизонт. и отн. центра. То есть, $3 \cdot C_{750}^4$

Случай 2: Замечание: эти 4 клетки мы выбираем в 1-ом ~~прямоугольнике~~ ~~Поскольку нас интересуют симметр. расклады, то выбирая 4 клетки в 3 и 4 бессмысленно, ибо они углены в 1 и 2.~~

Аналогично для прямоугольника 2: тоже $3 \cdot C_{750}^4$, только нужно выгнать случай отражения в 1-ый. То есть, $2 \cdot C_{750}^4$. Итого, для 1-го случая: $6 \cdot C_{750}^4$ *

Случай 2: 2.1) в 1-ом - 3, во 2-ом - 1. Тогда возможны только симм. от гор. и центра. Способов выбрать 4 клетки так: $C_{750}^3 \cdot C_{750}^1$ 2 симметрии $\rightarrow 2 \cdot C_{750}^3 \cdot C_{750}^1$

Аналогично во 1-ом - 1, во 2-ом - 3. Получаем те же $2 \cdot C_{750}^3 \cdot C_{750}^1$. Итого, суммарно - $4 \cdot C_{750}^3 \cdot C_{750}^1$

2.2) в 1-ом и 2-ом по 2 клетки. Способов их так выбрать: $C_{750}^2 \cdot C_{750}^2$. И можно отразить 2-мя способами.

НО! При определенном раскладе эти симметрии могут совпасть когда 4 точки получатся симметричными. Таких случаев в C_{750}^2 Выгнем их и получим $(C_{750}^2 \cdot (C_{750}^2 - C_{750}^1) \cdot 2 + C_{750}^2)$

* + если все 4 точки - в 4-ом и симметричны в 3.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5 (страница 2 из 2)

Итого: 1) все 4 клетки в одном-прямоуг.: $6 \cdot C_{7500}^4$

2) 1) 1 клетка в 1-ом, 3-во 2-ом: $2 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$

2) 3 клетки в 1-ом, 1-во 2-ом: $2 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$

3) 1 клетка в 1-ом, 3-во 4-ом: $2 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$

4) 3 клетки в 1-ом, 1-во 4-ом: $2 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$

но надо понимать, что при центр. симм в сл. 3) 4) мы углы лишние, углы в сл. 1) 4) Итого, для 2) $6 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1$

3) 1) 2 в 1-ом, 2-во 2-ом: $(C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 - C_{7500}^2) \cdot 2 + C_{7500}^2$

2) 2 в 1-ом, 2-во 4-ом $(C_{7500}^2 \cdot C_{7500}^2 - C_{7500}^2) \cdot 2$
(аналогично, как в 1), только слугаб полной симметрии уже не учитываем).

Итого: $6 \cdot C_{7500}^4 + 6 \cdot C_{7500}^3 \cdot C_{7500}^1 + 4 \cdot (C_{7500}^2)^2 - 3C_{7500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$a - b \equiv 1 \pmod{3}:$$

$$(a - c)(b - c) = ab - ac - bc - c^2 =$$

$$= ab - c^2 - c(a + b)$$

Если $a < c$ $a > b$, то $a - c > b - c$.

Следовательно $(a - c)$ и $(b - c)$ — 2 разных числа.
Но тогда, чтобы это был квадрат простого,

надо, чтобы один из них был квадратом простого,
а другой — 1.

$$\boxed{a - c = 1; b - c = p^2}$$

$$a - c - (b - c) = 1 - p^2$$

$$a - b = 1 - p^2 < 0. \text{ противоречие.}$$

$$\boxed{b - c = 1; a - c = p^2}$$

$$b \mid p^2 - 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$p^2 - 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$p^2 = 3 \cdot (k + 1) \Rightarrow k = 2.$$

$$p = 3 \quad \begin{cases} b - c = 1 \\ a - c = 9 \end{cases}$$

$$k = a = 1 \quad a - b = 8$$

$$\begin{cases} a + b^2 = 820 \dots \end{cases}$$

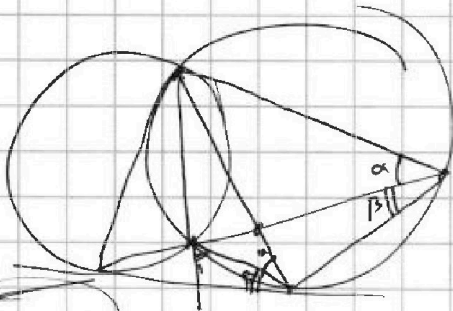


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

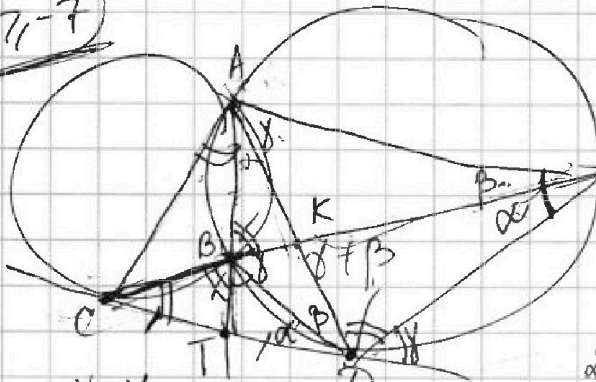
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

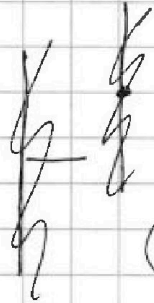
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$x=7, z=7$



$x+y+5-x = 3z = -3z+5$



$-15 \leq z \leq 15$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$

$BK \cdot KE = AK \cdot KA$

$C^2 = TB \cdot TA$
 $(\frac{2AC}{y})^2 = CB \cdot CE$

$2\sqrt{y+z-1} - (x-1)^2$

$\sqrt{x+y} \Rightarrow \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+2}$

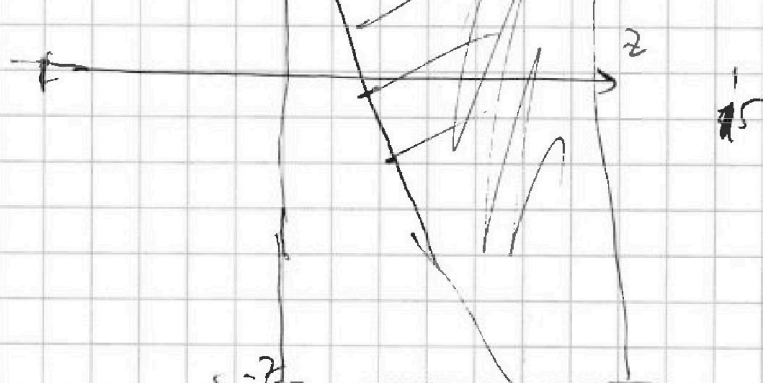
$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}$

$x=7, z=7$
 $-15 \leq z \leq 15$

$5-x-3z \geq 0$
 $x = 5-3z$

$\frac{CB \cdot CE}{TB \cdot TA} = 4$

$\frac{CB}{TB} = 4 \frac{TA}{CE}$





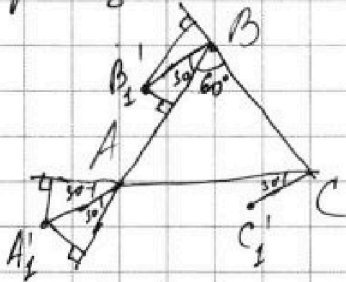
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 7
страница 2



$$h_{AA_1, C_1, C} = h_{AA_1, B, B} = \frac{5}{2} = 2,5 = \sqrt{h_{\text{прямая}}^2 + \rho^2(A_1; AC)}$$

$$h_{CC_1, B, B} = \frac{4}{2} = 2 = \sqrt{h_{\text{прямая}}^2 + \rho^2(B_1; BC)}$$

Заметим что $BB_1 \perp BC$. Стало бы BB_1 ,
то $\rho(B_1; BC) = BB_1$.

$AA_1 = BB_1$ как проекции равных отрезков.

Тогда $\rho(A_1; AB) = \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2} BB_1$.

$$\begin{cases} 6,25 = h_{\text{прямая}}^2 + \rho^2(A_1; AB) = h_{\text{прямая}}^2 + \frac{1}{4} (BB_1)^2 \\ 4 = h_{\text{прямая}}^2 + (BB_1)^2 \end{cases}$$

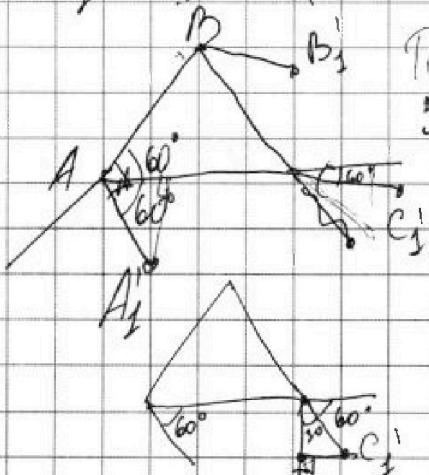
$$2,25 =$$

по т. о трех перп. $BB_1 \perp BC$

~~$\rho(BB_1; AB) \parallel AA_1$~~ ~~$\rho(BB_1; BC) \perp BC$~~ а ~~$BB_1, C_1, C$~~ - прямые.

Тогда $BB_1 \cdot BC = 4 \Rightarrow BB_1 = 2$. Но тогда BB_1 высота равна стороне, что невозможно. Значит,

A_1 лежит на биссектрисе внешнего угла A_1CBAC .



Тогда BB_1 не $\perp BC$...

это $AA_1 \perp AB$. — $BB_1 \parallel AA_1$ и $CC_1 \parallel AA_1$

и все, наконец, мы можем

сказать, что

$$h_{AA_1, C_1, C}^2 = h_{\text{прямая}}^2 + \left(AA_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$h_{BB_1, C_1, C}^2 = h_{\text{прямая}}^2 + \left(CC_1 \cdot \frac{1}{2} \right)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N7 страница 3.

$$\begin{cases} 6,25 = h_{\text{прям}}^2 + (AA_1')^2 \cdot \frac{3}{4} \\ 4 = h_{\text{прям}}^2 + (AA_1')^2 \cdot \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$2,25 = \frac{1}{2} AA_1'^2$$

$$AA_1'^2 = 4,5$$

$$h_{\text{прям}}^2 = 6,25 - \frac{4,5 \cdot 3}{4} = \frac{6,25 \cdot 4 - 13,5}{4} =$$

$$= \frac{25 - 13,5}{4} = \frac{11,5}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{11,5}{4}} = \frac{\sqrt{11,5}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{11,5}}{2}$

$(CC_1' = AA_1')$ как проекции
равных
отрезков)

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4,5 \\ \times 3 \\ \hline 13,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13514 \\ -12113 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,5 \\ \times 6,25 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$(6 + 0,25) \cdot 4 = 44 + 1 = 25$$

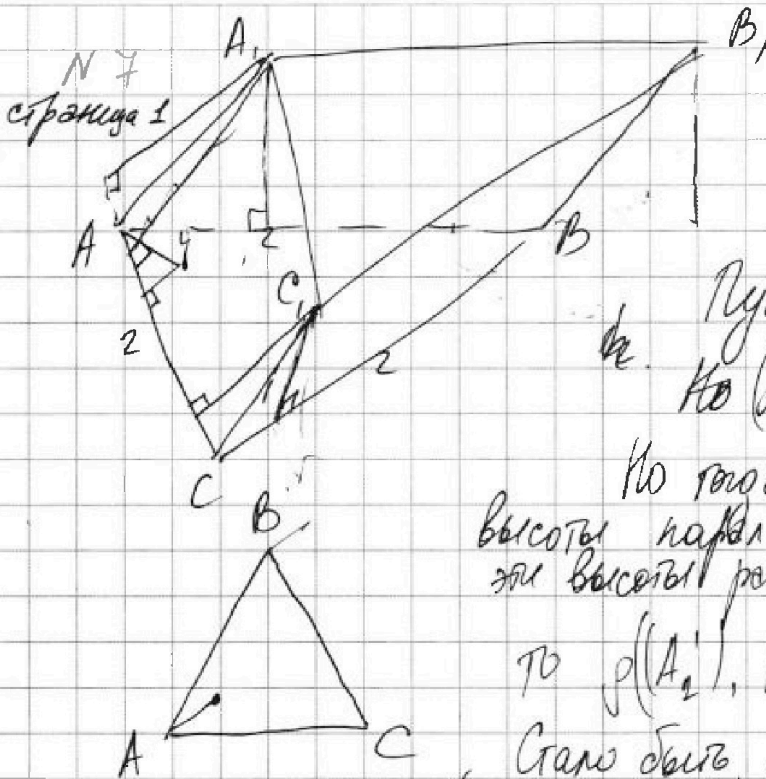


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



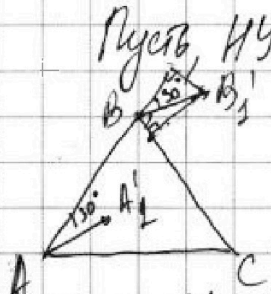
$$S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = 5$$

$$S_{CC_1B_1B} = 4$$

Пусть высота призмы - h
 $h \perp (A_1C_1)$
 $h \perp (A_1B_1)$
 $h \perp (A_1C_1)$

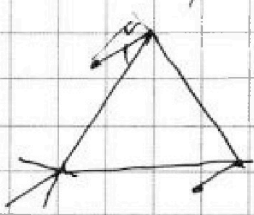
Но тогда, поскольку $S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B}$,
 высоты параллелограммов равны, а
 эти высоты равны $\sqrt{h^2 + \rho^2(A_1', AB)}$
 $\sqrt{h^2 + \rho^2(A_1', AC)}$,
 то $\rho(A_1', AB) = \rho(A_1', AC)$.

Стало быть, A_1' лежит на прямой,
 содержащей биссектрису $\angle BAC$!
 Но тогда AA_1' лежит в плоскости α , тогда, это
 α содержит бисс. $\angle A$ и $\alpha \perp ABC$.
 $CC_1 \parallel AA_1, BB_1 \parallel AA_1, \dots$ $B_1' = \text{Pr}_{ABC}(B_1)$
 $C_1' = \text{Pr}_{ABC}(C_1)$



Пусть нуль A_2' лежит внутри $\triangle ABC$. Тогда
 высота паралл. $AA_2'CC_2, BB_2'BB_2 \leq$ высоты AA_1, BB_1 ,
 стало быть, расстояние от B_2' до $BC <$
 расстояние от B_2' до AB .

Если A_2' - внутри $\triangle ABC$, то $\rho(B_2', AB) = \frac{BB_2'}{2}$ противоречие
 $\rho(B_2', BC) = \frac{\sqrt{3}}{2} BB_2'$
 Значит, A_2' вне $\triangle ABC$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$q^8 = (x-3)^2$
 $\frac{b_{12}}{b_{10}} = (q^2)^4$
 $\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = \frac{(15x+6)(x-3)^2}{(x+4)^4}$
 $(x-3)^2 = \frac{(15x+6)(x-3)^2}{(x+4)^4}$
 $x=3$
 $(x+4)^4 = 15x+6$
 $\frac{b_{12}}{b_4} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{(15x+6)(x-3)^3}} = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3) \cdot (x-3)^3}{(15x+6)^2}}$
 $= \sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2 = q^8$
 $\frac{b_{12}}{b_{10}} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} = q^2$
 $\frac{(15x+6)^2(x-3)^2}{(x+4)^4} = q^8$
 $(x-3)^2 = \frac{(15x+6)^2(x-3)^2}{(x+4)^4}$
 $(x+4)^4 = (15x+6)$
 $((x+4)^2 - (15x+6))(x+4)^2 + (15x+6) = 0$
 $15x = -6$
 $x = -\frac{6}{15}$
 $4\cos^3 x + 3\cos x = 6\cos^2 x - 3 + p$

$\cos 3x = \cos(2x+x) =$
 $= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$
 $= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x =$
 $= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x =$
 $2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x =$
 $4\cos^3 x - 3\cos x$
 $4\cos^3 x - 4\cos^2 x + 4\cos^2 x + 2\cos x$
 $\cos x(4\cos^2 x - 4\cos x + 2\cos x + 2)$
 $4x^3 - 6x^2 + 3x + 3 = p$
 $4x^3 - 4x^2 + x + 2x^2 + 2x + 2 = p$
 $x(2x-1)^2 - 2(x^2 - x - 1) = p$
 $-1 \leq \leq 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

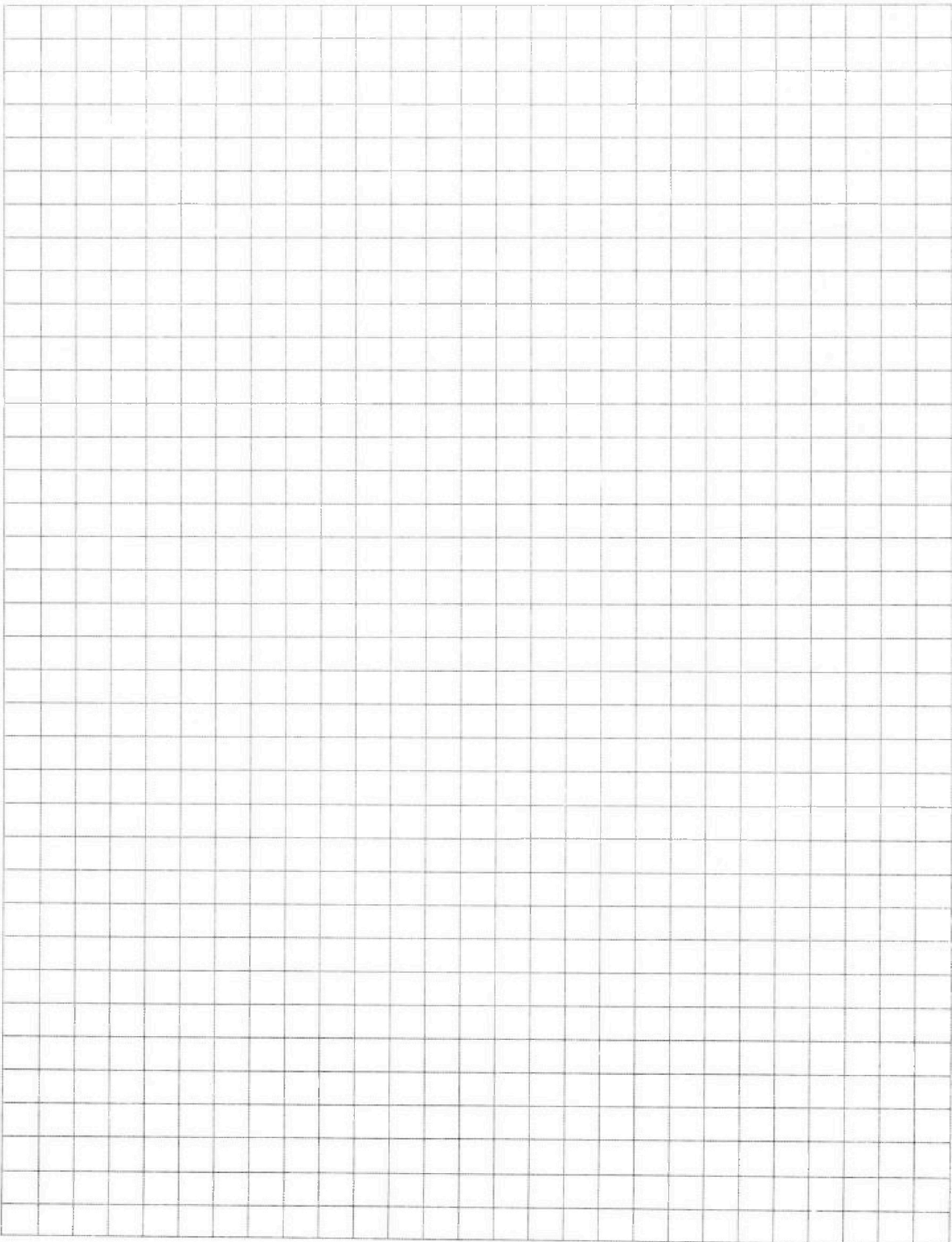
5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1

$$b_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = b_1 \cdot q^3$$

$$b_{10} = x+4 = b_1 \cdot q^9$$

$$b_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = b_1 \cdot q^{11}$$

$$b_{10} \cdot b_{12} = b_1^2 \cdot q^{20} = (b_1 \cdot q^{10})^2 = (b_{11})^2$$

$$b_4 \cdot b_{12} = b_1^2 \cdot q^{14} = (b_1 \cdot q^7)^2 = (b_8)^2 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$b_4 \cdot b_{10} = b_1^2 \cdot q^{12} = (b_1 \cdot q^6)^2 = (b_7)^2 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot (x+4)$$

$$q^2 = \left(\frac{b_8}{b_7}\right)^2 = \frac{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot \sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot (x+4)}$$

$$b_4 \cdot b_{10} = (b_7)^2$$

$$b_4 \cdot b_{12} = (b_8)^2$$

$$b_{10} \cdot b_{12} = (b_{11})^2$$

$$\frac{b_{12}}{b_4} = \frac{b_1 \cdot q^{11}}{b_1 \cdot q^3} = q^8$$

$$\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)(x-3)^3}{(15x+6)}} = \sqrt{(x-3)^4} = (x-3)^2$$

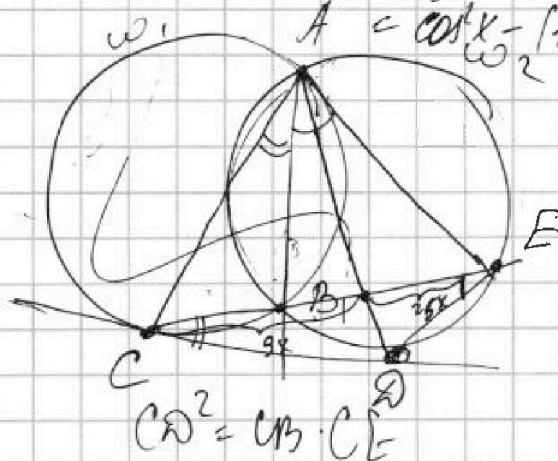
$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 &= \cos^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \cdot i \sin \varphi + 3 \cos \varphi \cdot (i \sin \varphi)^2 + (i \sin \varphi)^3 \\ &= \cos^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \cdot i \sin \varphi + 3 \cos \varphi \cdot (-\sin^2 \varphi) + i^3 \sin^3 \varphi \\ &= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi) \end{aligned}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos k + x =$$

$$= \cos x \cos x - \sin x \sin x =$$

$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$



$$CD^2 = CB \cdot CE$$

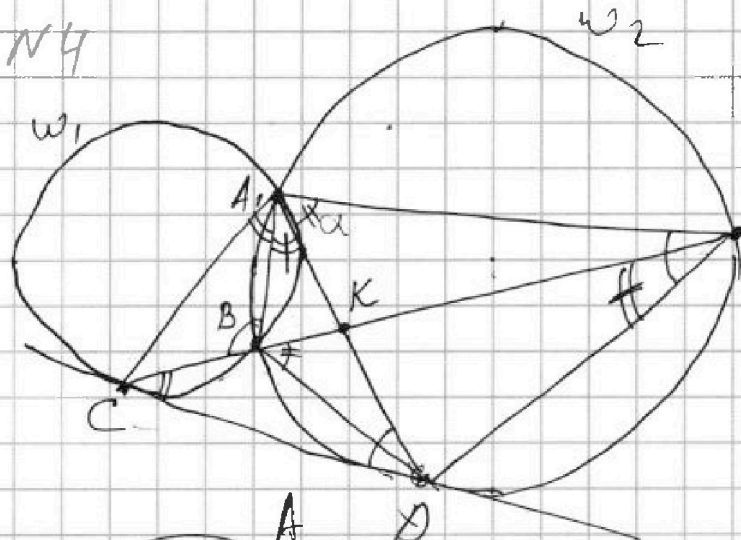


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle AED = \angle ADC$$

$$E \frac{ED}{\sin \alpha} = 2R_{\omega_2}$$

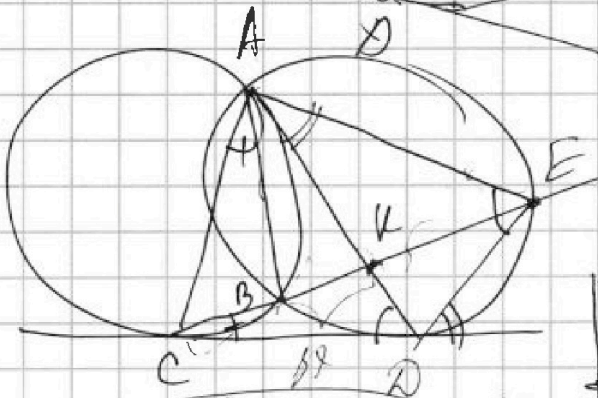
$$CD^2 = CB \cdot CE$$

$$\] CE = 34x$$

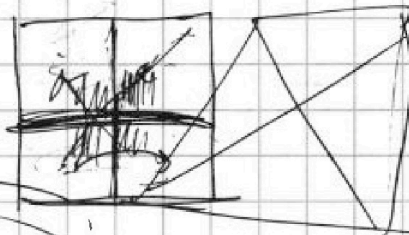
$$CK = 9x$$

$$KE = 25x$$

$$AK \cdot KD = BK \cdot KE$$



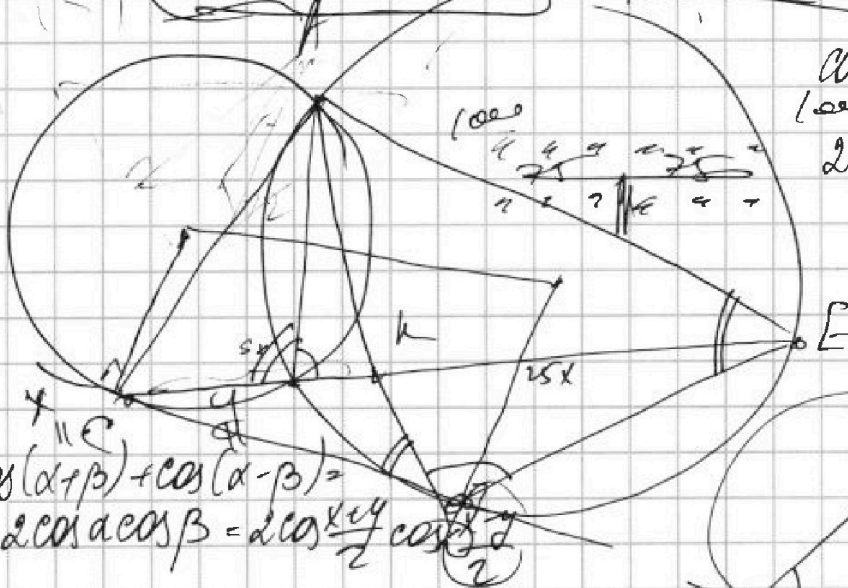
$$\cos 3x = \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x$$



$$\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x$$

$$2 \cos 2x \cos x + \cos x =$$

$$= 3 \cos 2x + \cos x$$



$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) =$$

$$= 2 \cos \alpha \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

