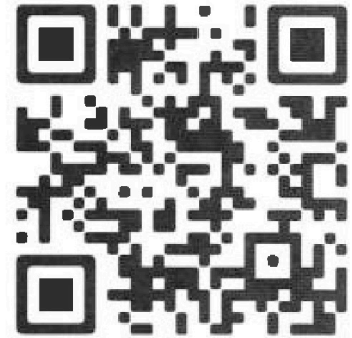




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен  $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$ , двенадцатый член равен  $2 - x$ , а восемнадцатый член равен  $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$ .

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $7 : 20$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $500 \times 120$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы покрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 1000$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 1

Пусть  $k$  - коэффициент, на который умножается каждый следующий член прогрессии.

Тогда  $a_i$  -  $i$ -ый член этой прогрессии, тогда

$$a_{10} = \sqrt{(25x+34)(3x+2)}; \quad a_{12} = 2-x; \quad a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$$

$$a_{12} = a_{11} \cdot k = a_{10} \cdot k^2 = k^2 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$a_{18} = a_{17} \cdot k = a_{16} \cdot k^2 = a_{15} \cdot k^3 = a_{14} \cdot k^4 = a_{13} \cdot k^5 = a_{12} \cdot k^6 = a_{11} \cdot k^7 = a_{10} \cdot k^8 = k^8 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)}$$

$$(25x+34)(3x+2) \geq 0, \Rightarrow \begin{cases} 25x+34 \geq 0 \\ 3x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{34}{25} \\ x \geq -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x+34 \leq 0 \\ 3x+2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{34}{25} \\ x \leq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ x \leq -\frac{34}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{12} = 2-x \\ a_{18} = k^8 \cdot \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 \geq 0 \\ \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \geq 0, \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2-x \geq 0, \Rightarrow x \leq 2$$

$$\begin{cases} a_{18} = k^8 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} \\ a_{18} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \end{cases} \Rightarrow k^8 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 25x+34=0 \\ k^8 = \frac{1}{(3x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{34}{25} \\ k = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{13x+21}} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Если } x = -\frac{34}{25}, \text{ то } a_{10} = \sqrt{(25 \cdot (-\frac{34}{25}) + 34)(3 \cdot (-\frac{34}{25}) + 2)} = \sqrt{0 \cdot (3 \cdot (-\frac{34}{25}) + 2)} =$$

$$= \sqrt{0} = 0, \text{ тогда } \begin{cases} a_{12} = a_{10} \cdot k^2 = 0 \cdot k^2 = 0 \\ a_{12} = 2 - (-\frac{34}{25}) = 2 + \frac{34}{25} = \frac{84}{25} \end{cases} \text{ — невозможно,}$$

значит,  $k = \pm \sqrt{\frac{1}{|3x+2|}}$ ;  $x \neq -\frac{34}{25}$

$$a_{12} = k^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{1}{|3x+2|} \cdot (25x+34)(3x+2)} =$$

$$= \sqrt{|25x+34|}$$

$$a_{12} = 2 - x, \Rightarrow 2 - x = \sqrt{|25x+34|}, \Rightarrow 4 - 2x + x^2 = |25x+34|$$

$$\text{Если } x \in [-\frac{2}{3}; 2], \text{ то } 4 - 2x + x^2 = 25x + 34$$

$$\text{Если } x \in (-\infty; -\frac{34}{25}), \text{ то } 4 - 2x + x^2 = -25x - 34$$

$$\begin{cases} x^2 - 27x - 30 = 0 \\ x \in [-\frac{2}{3}; 2] \\ x^2 + 23x + 38 = 0 \\ x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{27 \pm \sqrt{729 + 120}}{2} = \frac{27 \pm \sqrt{849}}{2} \\ x \in [-\frac{2}{3}; 2] \\ x = \frac{-23 \pm \sqrt{529 - 152}}{2} = \frac{-23 \pm \sqrt{377}}{2} \\ x \in (-\infty; -\frac{34}{25}) \end{cases}$$

Проверим, попали ли корни в диапазоны.

$$\frac{27 + \sqrt{849}}{2} = 13,5 + \frac{\sqrt{849}}{2} > 13 > 2 \text{ — не попал.}$$

$$\frac{27 - \sqrt{849}}{2} < \frac{27 - \sqrt{841}}{2} = \frac{27 - 29}{2} = -1 < -\frac{2}{3} \text{ — не попал.}$$

$$\frac{-23 - \sqrt{377}}{2} = -11,5 - \frac{\sqrt{377}}{2} < -11 < -\frac{34}{25} \text{ — попал}$$

$$\frac{-23 + \sqrt{377}}{2} < \frac{-23 + \sqrt{900}}{2} = \frac{-23 + 30}{2} = 1,5 \neq -\frac{150}{100} = -\frac{37,5}{25} < -\frac{34}{25} \text{ — не попал.}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{-23 + \sqrt{377}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1; \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = \cos x (\cos^2 x - 3\sin^2 x) =$$

$$= \cos x (4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$(4p \cos^3 x - 3p \cos x) + (12 \cos^2 x - 6) + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

Если  $p=0$ , то уравнение примет вид

$$3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

его дискриминант равен  $9-12=-3 < 0$  - нет корней, а при  $p \neq 0$  уравнение сводится

к кубическому, а у любого уравнения четной степени

отсутствует хотя бы один корень, но если  $p=0$  не подходит.

подходят все  $p$ , кроме 0.

Решим уравнение при ненулевом  $p$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$(\sqrt[p-1]{p-1} \cos x + \cos x + 1)(\sqrt[p-1]{p-1}^2 \cos^2 x + \sqrt[p-1]{p-1} \cos x (\cos x + 1) + (\cos x + 1)^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt[p-1]{p-1} \cos x + \cos x + 1 = 0 \\ \sqrt[p-1]{p-1}^2 \cos^2 x + \sqrt[p-1]{p-1} \cos x (\cos x + 1) + (\cos x + 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \cos x &= -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \\ \left( \sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right) \cos^2 x - \left( \sqrt[3]{p-1} - 2 \right) \cos x + 1 &= 0 \\ \cos x &= \frac{\sqrt[3]{p-1} - 2 \pm \sqrt{\left( \sqrt[3]{p-1}^2 - 4\sqrt[3]{p-1} + 4 - 4\sqrt[3]{p-1}^2 + 4\sqrt[3]{p-1} - 4 \right)}}{2 \left( \sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right)} = \\ &= \frac{\sqrt[3]{p-1} - 2 \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{p-1}^2}}{2 \left( \sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right)} \end{aligned}$$

Это есть дискриминант. Это такое уравнение равно

$$D = -3\sqrt[3]{p-1}^2, \text{ но } \sqrt[3]{p-1}^2 \geq 0, \Rightarrow -3\sqrt[3]{p-1}^2 \leq 0, \Rightarrow D \geq 0 \text{ только}$$

$$\begin{aligned} \text{при } p-1=0; \Rightarrow p=1, \Rightarrow \cos x &= \frac{\sqrt[3]{1-1} - 2 \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{1-1}^2}}{2 \left( \sqrt[3]{1-1}^2 - \sqrt[3]{1-1} + 1 \right)} = \\ &= \frac{-2 \pm 0}{2} = -1 - \text{подходит} \end{aligned}$$

Но мы знаем что есть квадратное уравнение будет иметь решение только при  $p=1$

$$\text{Вспомогательное, что } \cos x \in [-1; 1], \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \in [-1; 1]$$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \geq -1, \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1}+1 \geq 0 \\ -1 \geq \sqrt[3]{p-1}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1}+1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p-1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p-1 \geq 0 \\ p-1 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 1 \\ p \leq 0 \end{cases}$$

Когда не подходит  $p \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} \leq 1, \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1}+1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1}+1 \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{p-1}+1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \geq -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p-1 \geq 0 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p-1 \geq -1 \\ p-1 \leq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p \leq -7 \end{cases}$$

Когда не подходит  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$  и  $p=0$  не подходит.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При всех  $p \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$  будут

корни  $\cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}$ , а при  $p=1$  будут ещё корни

$$\cos x = -1$$

Ответ:  $p \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$

При  $p \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$  корни уравнения будут

$\cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}$ , а при  $p=1$  корни уравнения

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1} = -1 \Rightarrow \cos x = -1, \text{ то есть} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

при всех  $p \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$  корни уравнения

будут  $\cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}$ ;

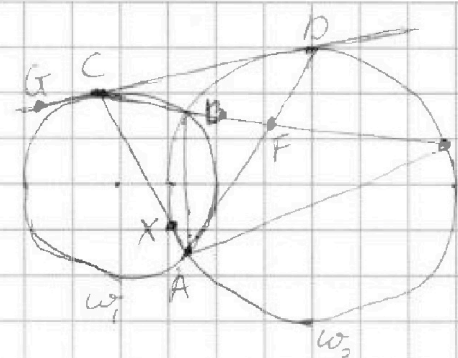
$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}+1}\right) + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

Точка F - точка пересечения

AD и EC, тогда  $\frac{CF}{FE} = \frac{7}{20}$

Четырёхугольник AB, AE, AC, AD.

$\angle CBA = \frac{1}{2} \overset{\frown}{CA} = \angle GCA$ , где G - точка на дуге

CD такой, что G и D лежат на разных сторонах

от точки C.

$\angle ABE = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle GCA = \angle ACD = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{AD})$ , где X - точка, симметричная к C относительно

AC окружности  $\omega_2$ , тогда  $\frac{1}{2} \overset{\frown}{XD} = \angle XAD = \angle CAD$ ,

$\frac{1}{2} \overset{\frown}{DE} = \angle DAE$ ,  $\frac{1}{2} \overset{\frown}{AE} = \angle ABE$ ,  $\Rightarrow \angle ABE = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{AD}) =$

$= \angle ABE + \angle DAE - \angle CAD$ ,  $\Rightarrow \angle DAE - \angle CAD = \angle ABE - \angle ABE = 0$ ,  $\Rightarrow$

AD - биссектриса  $\angle CAE$ ,  $\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{7}{20}$ ;  $AC = \frac{7}{20} AE$

$\angle CDA = \frac{1}{2} \overset{\frown}{CA} = \angle BEA$ ,  $\Rightarrow \triangle CDA \sim \triangle AED$  ( $\angle DAE = \angle DAC$ ,

$\angle CDA = \angle BEA$ , т.к. CD - касательная, а  $\angle BEA$  опирается на

дугу  $\overset{\frown}{DA}$ ),  $\Rightarrow \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$ ,  $\Rightarrow AD^2 = AE \cdot AC$ ,  $\Rightarrow$

$\Rightarrow AD = \sqrt{AE \cdot AC} = \sqrt{AE^2 \cdot \frac{7}{20}} = AE \sqrt{\frac{7}{20}}$ ,  $\Rightarrow$

$\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE} = \frac{AE \sqrt{\frac{7}{20}}}{AE} = \sqrt{\frac{7}{20}}$ ,  $\Rightarrow \frac{ED}{DC} = \sqrt{\frac{20}{7}}$

Ответ:  $\frac{ED}{DC} = \sqrt{\frac{20}{7}}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 5

Будем красить клетки так, что на  $n$ -й шаге по номеру ходов мы бы размещали  $n$ -ю симметричную перегородку по одной из симметричных из условий.

Рассчитаем сначала количество способов разместить эти перегородки относительно центра. Это будет  $500 \cdot 120$  способов выбрать первую клетку,  $500 \cdot 120 - 2$  способов выбрать вторую клетку,  $500 \cdot 120 - 4$  способов выбрать третью клетку и  $500 \cdot 120 - 6$  способов выбрать четвертую клетку, но на последнюю клетку мы считаем двояко, если переключимся это, рассмотрим

всего  $2^4$ , так же как и в случае перегородок

выбора клеток, а так как их конечная конфигурация тогда получится  $4!$ , то  $n$  раз будет  $\frac{5}{2} = 4$

$$500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 2) \cdot (500 \cdot 120 - 4)$$

Тогда количество способов равно

$$2^4 \cdot 4!$$

$$\cdot (500 \cdot 120 - 6)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посчитаем количество способов симметрично  
горизонтальной срединной линии, ~~составим~~

В данном случае мы можем выделить первую

клетку  $250 \cdot 120$  способами, <sup>вторую</sup> ~~вторую~~  $250 \cdot 120 - 1$  способами,  
<sup>третью</sup> ~~третью~~  $250 \cdot 120 - 2$  способами, ~~следующую~~  $250 \cdot 120 - 3$

способами.

Ответ же получим в  $4!$ , так как в каждом  
порядке всегда клетки.

Получимая ~~число~~  $\frac{250 \cdot 120 (250 \cdot 120 - 1) (250 \cdot 120 - 2) (250 \cdot 120 - 3)}{4!} =$

~~Равно~~  $= \frac{500 \cdot 120 (500 \cdot 120 - 2) (500 \cdot 120 - 4) (500 \cdot 120 - 6)}{2^4 \cdot 4!}$

Для симметрично симметрично вертикали

аналогично получим количество способов  
раскладки

$\frac{500 \cdot 60 (500 \cdot 60 - 1) (500 \cdot 60 - 2) (500 \cdot 60 - 3)}{4!} = \frac{500 \cdot 60 \cdot 120 (500 \cdot 120 - 2) (500 \cdot 120 - 4) (500 \cdot 120 - 6)}{2^4 \cdot 4!}$

~~Важно отметить~~  
Однако мы получили по частям

Заметим, что если 8 клеток симметричны  
по вертикали - то 2 из них могут быть симметричны  
то они симметричны и по первой симметрии



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Эти 8 плоскостей — две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  и две пары  $\alpha$  и  $\beta$ ,  
 вертикальные  $\alpha$  и  $\beta$  и две горизонтальные  $\alpha$  и  $\beta$ .

Вертикаль 2 симметричные плоскости из класса  $\beta$ ,  
 горизонталь, они симметричны относительно горизонтальной  
 срединной <sup>плоскости</sup> тогда у каждой из них есть еще по плоскости, симметрич-  
 ные ей по другой симметрии. Если вводить  
 вертикаль симметричные плоскости относительно  
 вертикальной срединной <sup>плоскости</sup> <sup>эти 4 плоскости будут</sup>  
 образовывать призматический, срединная линия  
 лежит в вертикальной плоскости  
 и ее середина совпадает со срединной линией  
 большого призматического, то есть то вертикаль  
 призматического симметричны относительно его  
 центра,  $\Rightarrow$  ребра есть и у него симметрич-  
 н.к. у него этого призматического совпадает  
 с центром большого призматического.

Аналогично, если вводить вертикаль симметричные  
 ребра симметрично центра, то они  
 симметричны <sup>симметричные</sup> <sup>плоскости</sup> <sup>среди</sup> <sup>относительно</sup>  
 срединной <sup>плоскости</sup> <sup>эти 4 плоскости будут</sup>  
 образовывать призматический, срединная линия  
 лежит в вертикальной плоскости  
 и ее середина совпадает со срединной линией



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Анализ удобства всех путей симметричен.

Аналогично, если первые клетки симметричны

друг другу относительно вертикальной средней, и конфигурация удовлетворяет средней линии, то она будет удовлетворять

суду какой-то симметрии, то конфигурация

будет удовлетворять всем условиям симметрии.

Все пары симметричных симметрий разобраны, тогда

если конфигурация удовлетворяет некоторым симметриям, то она удовлетворит и всем симметриям сразу.

Рассчитаем количество таких конфигураций

Будем выделять две клетки в левой верхней

четверти размером  $250 \times 60$  клеток

2 клетки закрепивать суду по 3 симметричные

или по всем симметриям.

$250 \cdot 60$  способов выделить первую клетку и

$250 \cdot 60 - 1$  способов выделить вторую клетку, когда порядок выделения не важен, поэтому поделим на 2!

$$\frac{250 \cdot 60 \cdot (250 \cdot 60 - 1)}{2!} = \frac{250 \cdot 60 \cdot 500 \cdot 120 \cdot (500 \cdot 120 - 1)}{2 \cdot 2!}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда при симметричных <sup>количества</sup> первых двух способов  
мы учтем симметричные варианты, когда  
конфигурация симметрична по всем путям  
симметрично, тогда вычтем это число.

$$\begin{aligned}
 3 \cdot \frac{500 \cdot 120 \cdot (500-120-2) \cdot (500-120-4) \cdot (500-120-6)}{2^4 \cdot 4!} &= \frac{500 \cdot 120 \cdot (500-120-4)}{2^4 \cdot 2} = \\
 &= \frac{500 \cdot 120 \cdot (500-120-4)}{2^4} \left( \frac{3 \cdot (500-120-2) \cdot (500-120-4)}{4!} - 1 \right) = \\
 &= 3 \cdot \frac{500 \cdot 60 \cdot (500-60-4) \cdot (500-60-2) \cdot (500-60-4)}{4!} - \frac{4! \cdot 500 \cdot 60 \cdot (500-60-4)}{4!} = \\
 &= \frac{(500-60-2) \cdot (500-60-3)}{(500-60-1) \cdot (500-60-3)} = 3 \cdot \binom{4}{30000} - \frac{4!}{(500-60-1) \cdot (500-60-3)} \cdot \binom{4}{50000} = \\
 &= 3 \cdot \binom{4}{30000} \left( \frac{500-60-29998^2-1-8}{29998^2-1} \right) = 3 \cdot \binom{4}{30000} \frac{(30000+3)(30000-3)}{(30000-3)(30000-1)} = \\
 &= 3 \cdot \binom{4}{30000} \frac{30000+3}{29999} = \binom{4}{30000} \cdot \frac{30009}{29999}
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\binom{4}{30000} \cdot \frac{30009}{29999}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 6

$$\begin{cases} a, b, c, p \in \mathbb{Z} \\ (a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p - \text{ простое число,} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} - \text{невозможно, т.к. } b \neq a, \text{ т.к. } b > a$$

$$\begin{cases} a-c = -p \\ b-c = -p \end{cases} - \text{невозможно, т.к. } b \neq a, \text{ т.к. } b > a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \\ a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a-1 \\ c = p^2 \cdot p^2 \\ c = a+1 \\ c = b+p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-p^2 = a-1 \\ c = a-1 \\ b+p^2 = a+1 \\ c = a+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-a = p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \\ c = a-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-a = p^2 - 1 = -(p-1)(p+1) \\ c = a+1 \end{cases}, \text{ т.к. } b-a \not\equiv 3, \Rightarrow \begin{cases} p-1 \not\equiv 3 \\ p+1 \not\equiv 3, \Rightarrow p \equiv 3, \text{ т.к.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \equiv 1 \\ p \equiv 2 \end{cases}, \text{ а } a \text{ и } b \text{ делятся на 3 или все 3 остатка } \{0, 1, 2\}, \Rightarrow$$

$$p \equiv 0, \Rightarrow p \equiv 3, \text{ т.к. } p - \text{ простое число,} \Rightarrow p = 3, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-a = 8 \text{ (т.к. } p^2 - 1 = 9 - 1 = 8) \\ c = a-1 \\ b-a = 1-9 = -8 \\ c = a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a+8 \\ c = a-1 \\ b = a-8 \\ c = a+1 \end{cases}$$

$$\text{т.к. } a^2 + b = 1000, \Rightarrow \begin{cases} a^2 + a + 8 = 1000 \\ b = a+8 \\ c = a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 992}}{2} \\ b = a+8 \\ c = a-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + a - 8 = 1000 \\ b = a-8 \\ c = a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 1008}}{2} \\ b = a-8 \\ c = a+1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a = \frac{-1 \pm \sqrt{63}}{2} \\ b = a + 8 \\ c = a - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$b = a + 8$$

$$c = a - 1$$

$$\begin{cases} a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 31 \cdot 3}}{2} \\ b = a + 8 \\ c = a - 1 \end{cases}$$

$$b = a + 8$$

$$c = a - 1$$

$$c = a - 1$$

$$\begin{cases} a = \frac{-1 + \sqrt{63}}{2} = 31 \\ b = a + 8 = 31 + 8 = 39 \\ c = a - 1 = 30 \end{cases}$$

$$b = a + 8 = 31 + 8 = 39$$

$$c = a - 1 = 30$$

$$\begin{cases} a = \frac{-1 - \sqrt{63}}{2} = -32 \\ b = a + 8 = -32 + 8 = -24 \\ c = a - 1 = -32 - 1 = -33 \end{cases}$$

$$b = a + 8 = -32 + 8 = -24$$

$$c = a - 1 = -32 - 1 = -33$$

Ответ:  $\begin{cases} a = 31; b = 39; c = 30 \\ a = -32; b = -24; c = -33. \end{cases}$

$\begin{cases} a = -32; b = -24; c = -33. \end{cases}$

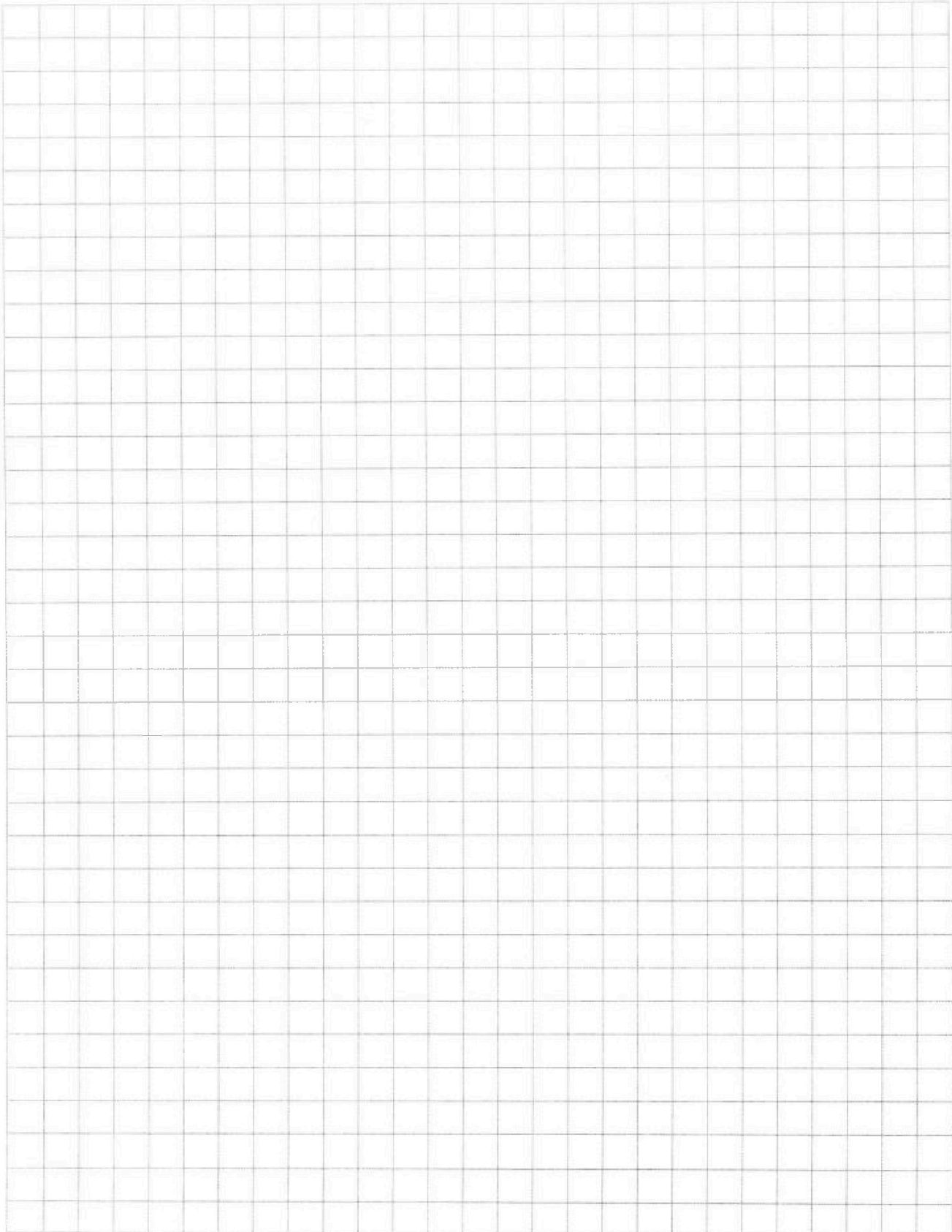


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



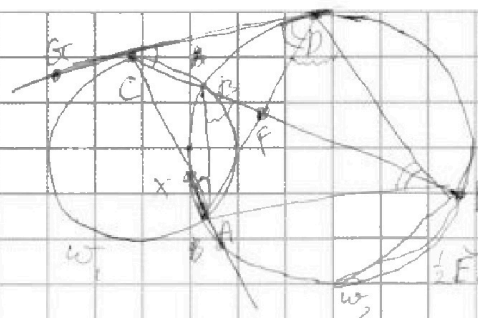
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CA}{FB} = \frac{7}{20}$$

$$\begin{array}{r} 3969 + 4 \cdot 16 \\ \times 34 \\ \hline 13032 \\ + 1584 \\ \hline 13368 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \angle CBA &= \frac{1}{2} \widehat{CA} = \angle C(A) = 180^\circ - \angle DCB \\ \frac{1}{2} \widehat{EA} &= \angle ABE = 180^\circ - \angle CBA = 180^\circ - (180^\circ - \angle PCA) = \\ &= \angle PCA = \frac{1}{2}(\widehat{DE} + \widehat{AE} - \widehat{DA}^x) = \\ &= \frac{1}{2} \widehat{AE} + \angle DAE - \angle DAC \\ \angle DAE - \angle DAC &= \frac{1}{2} \widehat{EA} - \frac{1}{2} \widehat{EA} = 0, \Rightarrow \end{aligned}$$

AD - диаметр.  $\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CF}{FE} = \frac{7}{20}; AC = \frac{7}{20} AE \quad AD = \sqrt{AC \cdot AE} = AE \cdot \sqrt{\frac{7}{20}}$$

$$\frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AE \cdot \sqrt{\frac{7}{20}}}{AE} = \sqrt{\frac{7}{20}}$$

Умножим:  $\frac{(500-120) \cdot (500-120-1) \cdot (500-120-2) \cdot (500-120-3) \cdot (500-120-4) \cdot (500-120-5) \cdot (500-120-6)}{(500-120-7) \cdot (500-120-8) \cdot (500-120-9) \cdot (500-120-10) \cdot (500-120-11) \cdot (500-120-12)}$

$$60 \cdot 500 \cdot (60-500-1) \cdot (60-500-2) \cdot (60-500-3) = \frac{f}{2^4}$$

$$120 \cdot 250 \cdot (120-250-1) \cdot (120-250-2) \cdot (120-250-3) = \frac{f}{2^4}$$

$$3f = 250 \cdot 120 \cdot (250-60-1) = 3 \cdot 500 \cdot 120 \cdot (500-120-2) \cdot (500-120-4) \cdot (500-120-6)$$

$$= \frac{500 \cdot 120 \cdot (500-120-4)^2 \cdot 500 \cdot 120 \cdot (500-120-4)}{2^4} \cdot (3/500-120-2)$$

$a < b, b-a \neq 3, (a-c)(b-c) = p^2, p$  - простое

$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \\ a-c=p \\ b-c=p^2-1 \end{cases}$$

$a-c=1, b-c=p^2-1$

$$c = a-1, b-a = p^2-1 = (p-1)(p+1)$$

$a = b+1, c = a-1 = b$

$$c = a-1, c = b-9, b-a = 9-1 = 8, b = a+8$$

$$a^2 + b = 1000, a^2 + 8a + 8 = 1000, a^2 + a - 992 = 0, a = -1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 992} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3969}}{2} = \frac{-1 \pm 63}{2} = \begin{cases} 31 \\ -32 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 32 \\ b = -24 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 30 \\ c = -35 \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

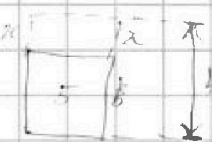
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$S = 4; \quad \frac{\sqrt{10}^2}{4} = 4; \quad a = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$$



$$S_{\text{полн}} = 6 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot x = 30 + 22x$$

$$S_{\text{полн}} = 5 = (6-x) \cdot 4$$

$$b = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{42}{5} = 2,4$$

$$5 = (2,4-x) \cdot 4 \sqrt{3} = 9,6\sqrt{3} - 4x\sqrt{3}$$

$$V = b \cdot S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot x \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 16$$

$$S = \frac{a^2}{2} + \frac{S_{\text{полн}}}{2} = \frac{a^2}{2} + 2,5, \quad \frac{2b}{\sqrt{3}} = 6 - 2,5$$

$$b = \left( \frac{2\sqrt{3}}{4} - x \right) \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 2 - x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 2; \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V = b \cdot S = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x = \frac{2\sqrt{3}}{4} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1; \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= \cos x (\cos^2 x - 3\sin^2 x) = \cos x (4\cos^2 x - 3) = 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x - 3p \cos x + 12 \cos^2 x - 6 + 3p \cos x + 12 \cos x + 10 = 0$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 4 = 0$$

$$p \cos^3 x + 3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + (\cos x + 1)^3 = 0$$

$$\left( \sqrt[3]{p-1} \cos x + \cos x + 1 \right) \left( \sqrt[3]{p-1} \cos^2 x + \sqrt[3]{p-1} \cos x (\cos x + 1) + (\cos x + 1)^2 \right) = 0$$

$$\left( \sqrt[3]{p-1} \cos x + 1 \right) \cos x = -1$$

$$\left( \sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right) \cos^2 x - \left( \sqrt[3]{p-1} + 2 \right) \cos x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \\ \sqrt[3]{p-1} + 1 \neq 0 \Rightarrow p \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3969 \\ 61 \\ \hline 9039 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 84 \\ \times 1024 \\ \hline 4096 \end{array}$$

~~используем~~  
Решим для  $p=0$  в исходном урав.

$$\left( \sqrt[3]{0-1}^2 - \sqrt[3]{0-1} + 1 \right) \cos^2 x - \left( \sqrt[3]{0-1} + 2 \right) \cos x + 1 = 0$$

$$(1 + 1) \cos^2 x - (2 - 1) \cos x + 1 = 0$$

$$3 \cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x \in \left[ \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{6} \right] = \left[ \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{6} \right] \Rightarrow \text{нет решений}$$

$p \neq 0$

$$\left( \sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right) \cos^2 x - \left( \sqrt[3]{p-1} + 2 \right) \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{\sqrt[3]{p-1} + 2 \pm \sqrt{\left( \sqrt[3]{p-1} + 2 \right)^2 - 4 \left( \sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right)}}{2 \left( \sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{p-1} + 2 \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{p-1}^2 + 5\sqrt[3]{p-1}}}{2 \left( \sqrt[3]{p-1}^2 - \sqrt[3]{p-1} + 1 \right)}$$

$$D = \sqrt[3]{p-1}^2 (8 - 3\sqrt[3]{p-1}) \geq 0$$

$$\begin{cases} p=1 \\ \sqrt[3]{p-1} \leq \frac{256}{27} \\ p < 8 \\ p-1 \geq \frac{256}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=1 \\ p < 8 \\ p \geq \frac{283}{27} > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p=1 \\ 1 < p < \frac{283}{27} \end{cases} \Rightarrow 1 < p < \frac{283}{27}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$k^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = 2-x$   $x \neq -\frac{2}{3}, -\frac{34}{25}, 2$

$k^2 \sqrt{(25x+34)(3x+2)} = \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^2}}$   $25x+34 \geq 0$

$k^2 \cdot \frac{(3x+2)^2}{4} = 1$   $x \geq -\frac{34}{25}$

$k = \pm \sqrt{\frac{4}{(3x+2)^2}}$   $3x+2 \geq 0$

$k = \pm \frac{2}{3x+2}$   $x \geq -\frac{2}{3}$

$\sqrt{\frac{(25x+34)(3x+2)}{|3x+2|}} = 2-x = \sqrt{25x+34}$   $25x+34 \leq 0$

$4 - 2x + x^2 = 25x + 34$   $2(3x+2) \leq 0$

$x^2 - 27x - 30 = 0$   $\Rightarrow x \leq -\frac{34}{25}$

$x = \frac{27 \pm \sqrt{849}}{2}$   $27 \pm \sqrt{849} = 13,5 \pm \frac{\sqrt{849}}{2} > 2$  - не подходит

$\frac{34}{25} \geq x$

$4 - 2x + x^2 = -25x - 34$

$x^2 + 23x + 38 = 0$

$x = \frac{-23 \pm \sqrt{529 - 152}}{2} = \frac{-23 \pm \sqrt{377}}{2}$

$\frac{27 - \sqrt{849}}{2} < -\frac{2}{3}$

$\frac{\sqrt{849} - 27}{2} > \frac{2}{3}$

$\frac{27 + \sqrt{849}}{2} > \frac{2}{3}$

$\frac{27 + \sqrt{849}}{2} > \frac{34}{25}$

$\frac{27 - \sqrt{377}}{2} < -\frac{34}{25}$  - не подходит

$\sqrt{377} < \sqrt{400} = 20$

$-23 + \sqrt{377} < -3$

$\frac{-23 + \sqrt{377}}{2} < -\frac{34}{25}$  - не подходит

$25 - 1,5 = 25 + 12,5 = 37,5$