



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ pq^6 = 5-x \\ pq^8 = \sqrt{(13x-5)(x+1)} \end{cases}$$

Одз:

$$\begin{cases} x < -1 \\ x > \frac{5}{13} \end{cases}$$

(т.к. для прогрессии
но числ не считается)
(дифференциал прогрессии
не считается)

$$\Rightarrow q^8 = \frac{\sqrt{(13x-5)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-5}{(x+1)^3}}} = (x+1)^2$$

$$q^4 = |x+1| \Rightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pq^6 = 5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{|x+1|} = \sqrt{(13x-5) \cdot \text{sign}(x+1)}$$

т.к. $p > 0$; $pq^8 > 0 \Rightarrow pq^6 > 0 \Rightarrow 5-x > 0 \Rightarrow x < 5$

1) Если $\frac{5}{13} < x < 5 \Rightarrow 5-x = \sqrt{13x-5} \Rightarrow 25-10x+x^2 = 13x-5$

$$\Rightarrow x^2 - 23x + 30 = 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 30 = 529 - 120 = 409$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{409}}{2} \quad \text{т.к. } \sqrt{409} \approx 20 \Rightarrow \frac{23 + \sqrt{409}}{2} > \frac{43}{2} > 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{23 - 20}{2} = \frac{3}{2} - \text{не подходит} \Rightarrow x = \frac{23 - \sqrt{409}}{2} - \text{не подходит}$$

2) Если $x < -1$: $25 - 10x + x^2 = 5 - 13x \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 20 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 20 < 0 - \text{нет корней}$$

Ответ: $\frac{23 - \sqrt{409}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p; \cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x =$$

$$= \cos x \cos 2x - 2\sin^2 x \cos x = \cos x (\cos 2x - (1 - \cos 2x)) =$$

$$= 2\cos x \cos 2x - \cos x$$

$$2\cos x \cos 2x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$$

Пусть $\cos x = t \Rightarrow 2t(2t^2 - 1) + 3(2t^2 - 1) + 5t = p$

$$4t^3 - 2t + 6t^2 - 3 + 5t = 4t^3 + 3t + 6t^2 - 3 = p(t)$$

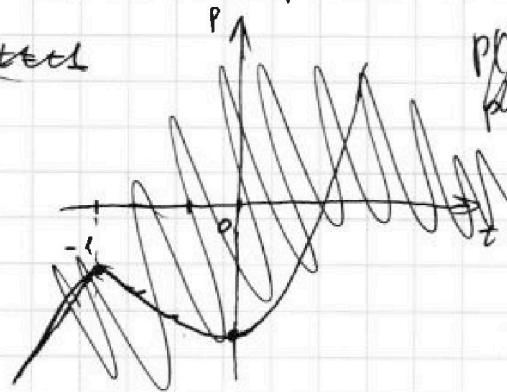
Если $\cos x = t \Rightarrow$ есть корни

$$p' = 3(2t^2 + 1)^2$$

Суммарным выражением: $p' = 12t^2 + 6 + 12t$

$$p' = 0; t = -\frac{1}{2}$$

~~10t^3 + 3t + 6t^2 - 3 = p~~
~~t^3 + 3t + 6t^2 - 3 = p'~~
~~t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p'~~



$$p(0) = -3; p' = 0; t = -\frac{1}{2}$$

$$\text{т.к. } p' \geq 0 \Rightarrow p(t) \nearrow \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{если } t \in [-1; 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \in [-4; 10]$$

Тогда $\cos x = t \Rightarrow x = \pm \arccos t + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \pm \arccos t + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}; p \in [-4; 10] \\ 4t^3 + 3t + 6t^2 - 3 = p \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

~~длина стороны~~ $(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = b-c = p \Rightarrow a=b - \text{не подходит} \\ a-c = p^2 \\ b-c = 1 \leftarrow \text{только две эти стороны} \Rightarrow \\ a-c = -p^2 \text{ т.к. } a > b \\ b-c = -1 \end{cases}$$

$\overbrace{c \quad d \quad b \quad c}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b+1 = p^2 \\ a-b+1 = p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b = p^2 - 1 \Rightarrow \text{если } p \neq 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a-b \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a-b \text{ делится на } 3 - \text{противоречие}$$

$$\Rightarrow p=3 \Rightarrow a-b = 3^2 - 1 = 8 \Rightarrow a = b + 8$$

Т.к. $a+b^2 = 560 \Rightarrow b+8+b^2 = 560 \Rightarrow b^2 + b - 552 = 0$

$$D = 1 + 4 \cdot 552 = 2209 = 47^2 \Rightarrow b = \frac{-1 \pm 47}{2} = \begin{cases} -24 \\ 23 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a; b) = (-16; -24) \\ (a; b) = (31; 23) \end{cases} \text{ или еще } \begin{cases} c = -15; -25 \\ c = 82; 22 \end{cases}$$

Ответ: $\{(31; 23; 52); (31; 23; 22); (-16; -24; -15); (-16; -24; -25)\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

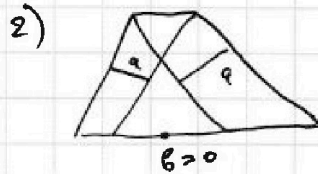
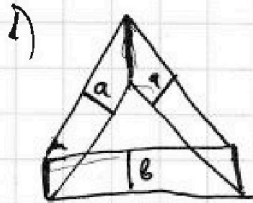
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Площадь боковой грани — это $\frac{1}{2}$ из произведения ребра основания (a) и высоты на расстояние между соответствующими сторонами вершины и нижнего основания. \rightarrow т.к. стороны \perp , то эти высоты ~~также~~ равны 4, 4, 3 ~~см~~

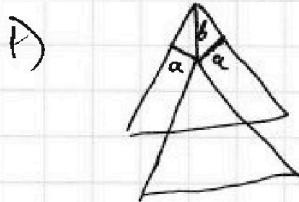
Рассмотрим вид сверху: сверху два равносход. треугольника, стороны — две др. откосинуса др. \perp ~~высоты~~



вверху два равносход. треугольника, стороны — две др. откосинуса др. \perp ~~высоты~~

Тогда высоты в проекции вычит: $a = \sqrt{16 - b^2}$; $b = \sqrt{9 - h^2}$

и помним, что b и h — др. угла, тогда др. высоты совпадают (1 и 2). Рассмотрим их:



имеем Δ с углом 30° , катетом a , гипотенузой $b \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{9 - h^2} = 2\sqrt{16 - b^2}$$

$$9 - h^2 = 4(64 - 4h^2) \Rightarrow 3h^2 = 55 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{55}{3}}$$



Здесь $b=0 \Rightarrow h=3$; $a=4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} > 0 - \text{все верно}$$

нормально

Ответ: $\sqrt{\frac{55}{3}}$ или 3

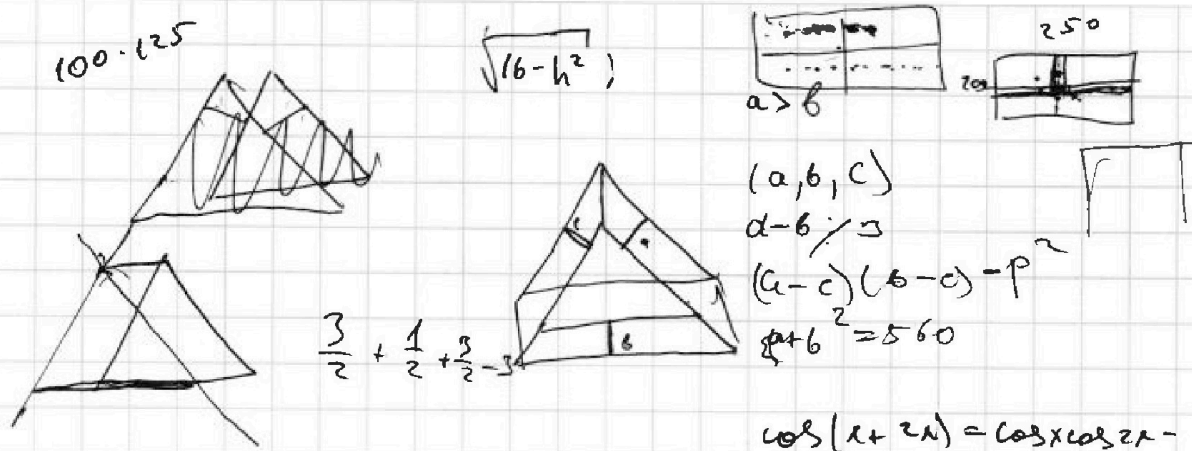


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



a	b
2	0
1	1
1	2

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = P$$

$$\cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$

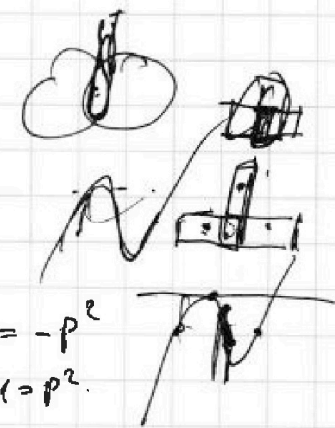
$$2\sin^2 x \sin \cos x$$

$$\begin{cases} a-c = p \\ b-c = 1 \end{cases}$$

1+4552
2208
2209

$$\begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b+1 = p^2 \\ a-b = p^2 - 1 \text{ or } p=3 \\ b-c = p^2 \\ c = a+1 \Rightarrow b-a-1 = -p^2 \\ a-b+1 = p^2 \end{cases}$$



$$2\cos x \cos 2x + 3\cos 2x + 5\cos x = P$$

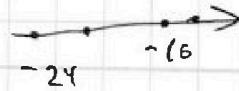


$$2t(2t^2-1) + 3(2t^2-1) + 5t = P$$

$$4t^3 - 2t + 6t^2 - 3 + 5t = P$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = P$$

1
43
x 43
+ 129
142
184
3
2
4
44
x 44
+ 329
188
2209



31

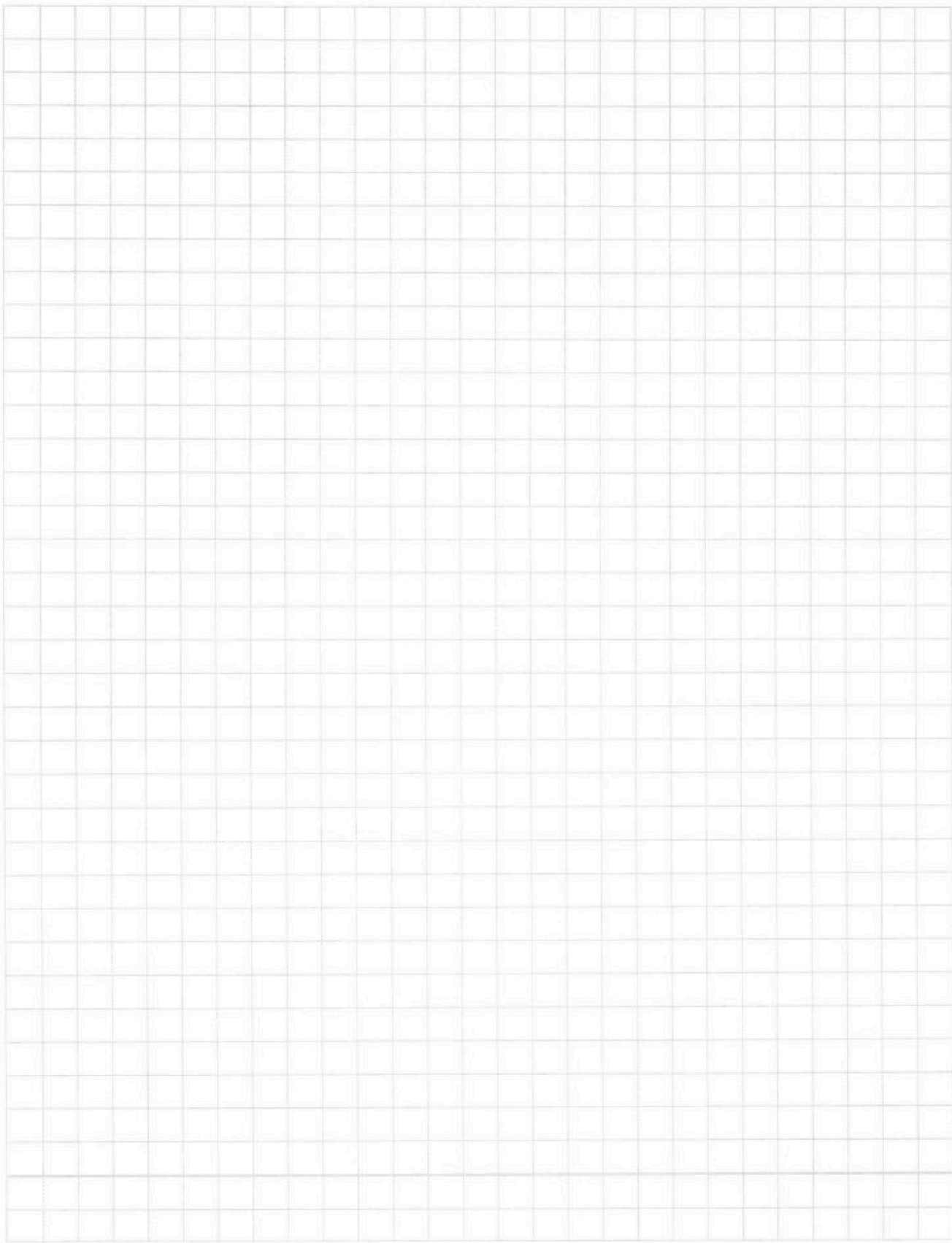


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



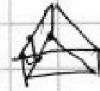
Черновик

$$\frac{h}{\sin \alpha} = 1 = 3$$

$$h = 3 \sin \alpha$$

$$h \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$$



$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{array}{ccc} 7 & 13 & 15 \\ p & pq^5 & pq^8 \\ \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} & 5-x & \sqrt{(13x+35)(x+1)} \end{array}$$

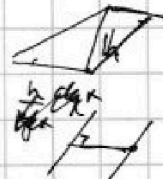
$$q^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = (x^2+1)^2$$

$$q^7 = (x+1)$$

$$\begin{array}{r} 64-9 \\ 55 \end{array}$$

$$q^2 = \sqrt{x+1} \Rightarrow 5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3} (x+1)}$$

$$h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$$



$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline + 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2}$$

$$|y+1 + 3|y-2| = \sqrt{16y-x^2}$$

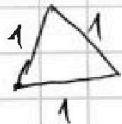
$$\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}} = 1 = 3$$

$$y = 2$$

$$x+3 + (4-x-2) - 2\sqrt{(x+3)(4-x-2)} = 4 \quad \begin{array}{l} h^2 + \frac{3}{4} = 9 \\ 4h^2 + 3 - 36 = 0 \end{array}$$

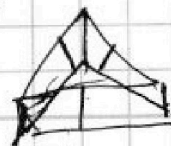
$$\geq 4(y+x-x^2+2) + 25 - 20\sqrt{y+x-x^2+2} \quad h^2 = \frac{33}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{33}}{2}$$



$$(1+3)(4-x-2) = 4x - x^2 - 2x + 12 - 8x - 32$$

$$x - x^2$$



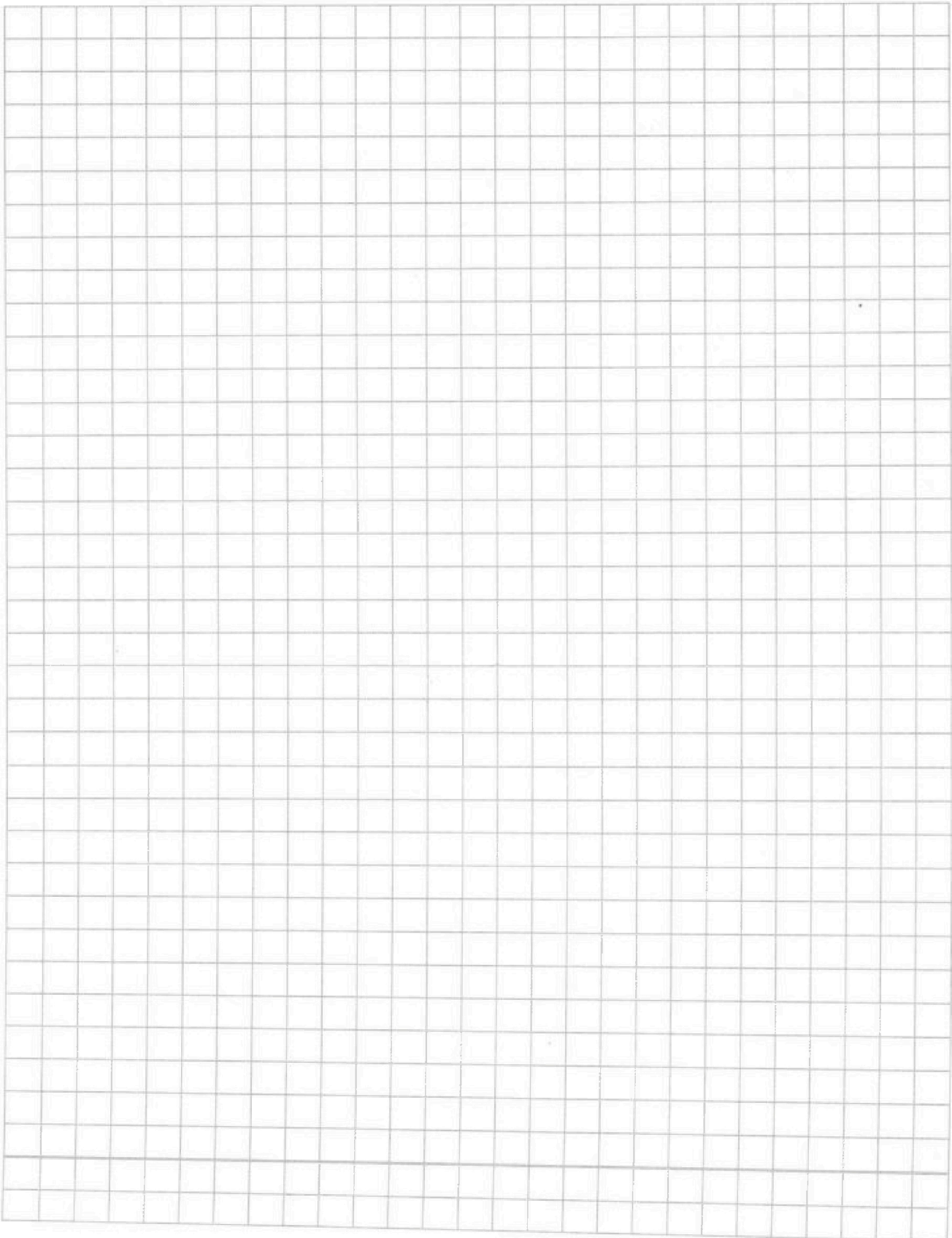


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

