



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \\ pq^6 = 5-x \\ pq^8 = \sqrt{(13x-5)(x+1)} \end{cases}$$

Одз:

$$\begin{cases} x < -1 \\ x > \frac{5}{13} \end{cases}$$

(т.к. для прогрессии  
но числ не считается)  
(дифференциал прогрессии  
не считается)

$$\Rightarrow q^8 = \frac{\sqrt{(13x-5)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-5}{(x+1)^3}}} = (x+1)^2$$

$$q^4 = |x+1| \Rightarrow q^2 = \sqrt{|x+1|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pq^6 = 5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{|x+1|^3} = \sqrt{(13x-5) \cdot \text{sign}(x+1)}$$

т.к.  $p > 0$ ;  $pq^8 > 0 \Rightarrow pq^6 > 0 \Rightarrow 5-x > 0 \Rightarrow x < 5$

1) Если  $\frac{5}{13} < x < 5 \Rightarrow 5-x = \sqrt{13x-5} \Rightarrow 25-10x+x^2 = 13x-5$

$$\Rightarrow x^2 - 23x + 30 = 0$$

$$D = 23^2 - 4 \cdot 30 = 529 - 120 = 409$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{409}}{2} \quad \text{т.к. } \sqrt{409} \approx 20 \rightarrow \frac{23 + \sqrt{409}}{2} > \frac{43}{2} \geq 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{23 - 20}{2} = \frac{3}{2} - \text{не подходит} \Rightarrow x = \frac{23 - \sqrt{409}}{2} - \text{не подходит}$$

2) Если  $x < -1$ :  $25 - 10x + x^2 = 5 - 13x \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 20 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 20 < 0 - \text{нет корней}$$

Ответ:  $\frac{23 - \sqrt{409}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p; \cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x =$$

$$= \cos x \cos 2x - 2\sin^2 x \cos x = \cos x (\cos 2x - (1 - \cos 2x)) =$$

$$= 2\cos x \cos 2x - \cos x$$

$$2\cos x \cos 2x + 3\cos 2x + 5\cos x = p$$

Пусть  $\cos x = t \Rightarrow 2t(2t^2 - 1) + 3(2t^2 - 1) + 5t = p$

$$4t^3 - 2t + 6t^2 - 3 + 5t = 4t^3 + 3t + 6t^2 - 3 = p(t)$$

Если  $\cos x = t \Rightarrow$  есть корни

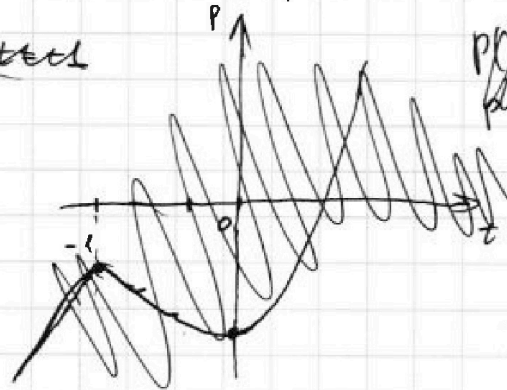
$$p' = 3(2t^2 + 1)^2$$

Суммарные значения:  $p' = 12t^2 + 6 + 12t$

$$p' \geq 0 \Rightarrow t \in [-1; 1]$$

$$p(0) = -3 \quad p' = 0; t = -\frac{1}{2}$$

~~10t^3 + 6t^2 + 5t - 3~~  
~~t^3 + 6t^2 + 5t - 3~~  
~~t^3 + 6t^2 + 5t - 3 = p'~~



$$\text{т.к. } p' \geq 0 \Rightarrow p(t) - \nearrow \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{если } t \in [-1; 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \in [-4; 10]$$

Или  $\cos x = t \Rightarrow x = \pm \arccos t + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $\begin{cases} x = \pm \arccos t + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}; p \in [-4; 10] \\ 4t^3 + 3t + 6t^2 - 3 = p \end{cases}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1    2    3    4    5    6    7    СТРАНИЦА  
                     1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

Т.к. при <sup>вери-</sup> выделении и <sup>составлении</sup> горизонтальной или вертикальной <sup>линии</sup> контура <sup>и</sup> <sup>однозначного</sup> контура <sup>линии</sup> <sup>или</sup> <sup>однозначного</sup> контура  $\Rightarrow$



Один контур:  $C_{100 \cdot 250}^4$

Один горизонт.:  $C_{100 \cdot 250}^4$ , при этом их пересечения:  $C_{100 \cdot 250}^2$

Один верт.:  $C_{100 \cdot 250}^4$

$\Rightarrow \text{кол-во} = 3C_{25000}^4 - 2C_{12500}^2$  (выделение множеств)

Ответ:  $3C_{25000}^4 - 2C_{12500}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

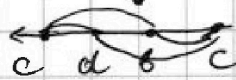
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

~~Треугольник~~ ~~или~~ ~~квадрат~~  $(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c = b-c = p \Rightarrow a=b - \text{не подходит} \\ b-c = p^2 \\ b-c = 1 \leftarrow \text{только две эти пары подходят} \\ a-c = -p^2 \text{ т.к. } a > b \\ b-c = -1 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{cases} a-b+1 = p^2 \\ a-b+1 = p^2 \end{cases} \Rightarrow a-b = p^2 - 1 \Rightarrow \text{если } p \neq 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a-b \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a-b \equiv 0 \pmod{3} - \text{нечисловое}$$

$$\Rightarrow p=3 \Rightarrow a-b = 3-1=2 \Rightarrow a = b+2$$

Т.к.  $a+b^2 = 560 \Rightarrow b+2+b^2 = 560 \Rightarrow b^2+b-558=0$

$$D = 1+4 \cdot 558 = 2209 = 47^2 \Rightarrow b = \frac{-1 \pm 47}{2} = \begin{cases} -24 \\ 23 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a;b) = (-16; -24) \\ (a;b) = (31; 23) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c = -15; -25 \\ c = 82; 22 \end{cases}$$

Ответ:  $\{(31; 23; 82); (31; 23; 22); (-16; -24; -15); (-16; -24; -25)\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

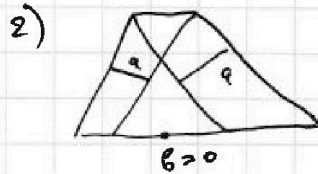
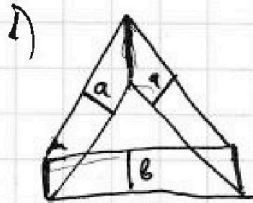
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 4.

Площадь боковой грани — это  $\frac{1}{2}$  из произведения ребра основания ( $a$ ) и высоты на расстояние между соответствующими сторонами вершины и нижнего основания.  $\rightarrow$  т.к. стороны  $\perp$ , то эти высоты ~~также~~ равны 4, 4, 3 ~~см~~

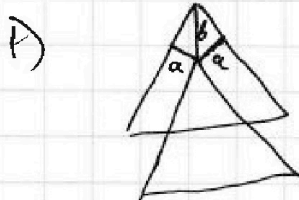
Рассмотрим вид сверху: сверху два равносход. треугольника, стороны — две др. откосинуса др.  $\perp$  ~~высоты~~



высоты

Тогда высоты в проекции вычит:  $a = \sqrt{16 - b^2}$ ;  $b = \sqrt{9 - h^2}$

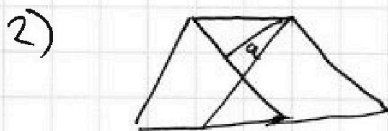
и помним, что  $\sin$  имеет два угла, когда две высоты совпадают (1 и 2). Рассмотрим их:



имеем  $\Delta$  с углом  $30^\circ$ , катетом  $a$ , гипотенузой  $b \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{9 - h^2} = 2\sqrt{16 - h^2}$$

$$9 - h^2 = 4(64 - 4h^2) \Rightarrow 3h^2 = 55 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{55}{3}}$$



Здесь  $b=0 \Rightarrow h=3$ ;  $\sin \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} > 0 - \text{все верно}$$

нормально

Ответ:  $\sqrt{\frac{55}{3}}$  или 3

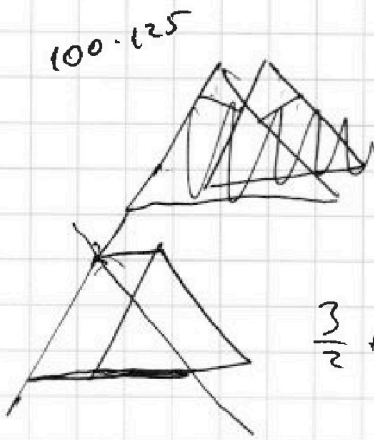


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

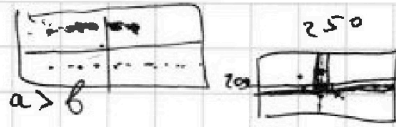
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{16-h^2}$$



$$a > b$$

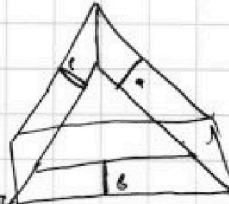
$$(a, b, c)$$

$$a - b \neq 3$$

$$(a - c)(b - c) = p^2$$

$$p + b^2 = 560$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 3$$



$$\cos(x + 2x) = \cos x \cos 2x -$$

$$- \sin x \sin 2x$$

$$2 \sin^2 x \sin \cos x$$

a	b
2	0
1	1
1	2

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$



$$5 \neq$$

$$11$$

$$\begin{cases} a - c = p \\ b - c = p \end{cases}$$

$$1 + 4552$$

$$2208$$

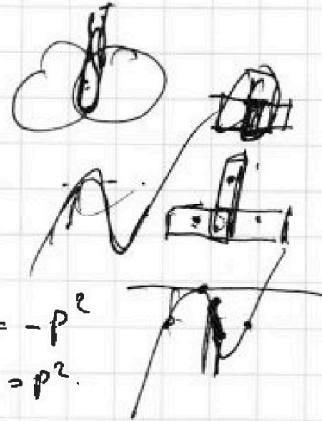
$$2209$$

$$\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - c = 1 \\ b - c = p^2 \end{cases}$$

$$a - b + 1 = p^2$$

$$a - b = p^2 - 1 \text{ or } p = 3$$

$$\begin{cases} b - c = p^2 \\ c = a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - a - 1 = -p^2 \\ a - b + 1 = p^2 \end{cases}$$



$$2 \cos x \cos 2x + 3 \cos 2x + 5 \cos x = p$$



$$\begin{array}{r} 1 \\ 43 \\ \times 43 \\ \hline 142 \\ 1849 \\ \hline 1849 \end{array}$$

$$9$$

$$2$$

$$4$$

$$44$$

$$44$$

$$+ 329$$

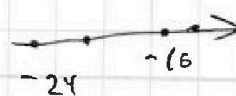
$$188$$

$$2209$$

$$2t(2t^2 - 1) + 3(2t^2 - 1) + 5t = p$$

$$4t^3 - 2t + 6t^2 - 3 + 5t = p$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$



$$-24$$

$$-16$$

$$31$$

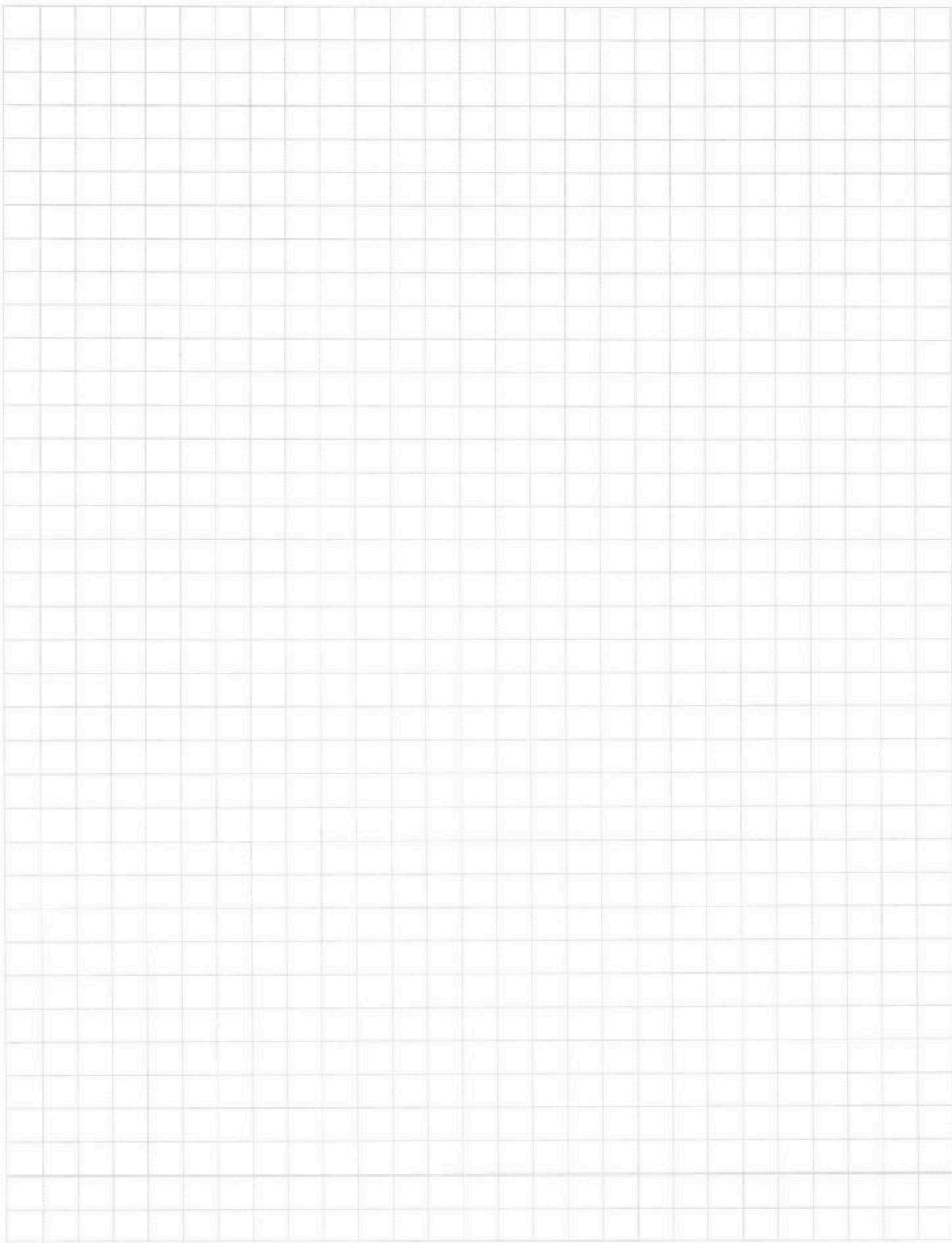


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

7 p  $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$

13 pg<sup>5</sup>  $5-x$

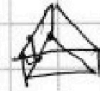
15 pg<sup>8</sup>  $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$h \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$

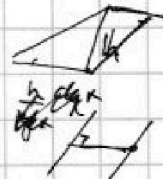
$\frac{h}{\sin \alpha} = 1 = 3$

$h = 3 \sin \alpha$



$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$q^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}} = (x^2+1)^2$



64-9  
55

$q^7 = (x+1)$

$q^2 = \sqrt{x+1} \Rightarrow 5-x = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3} \cdot x+1}$

$h \operatorname{ctg} \alpha$

23  
x 2 3  
+ 6 9  
4 6  
5 2 9

$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-2} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+2}$

$|y+1 + 3|y-2| = \sqrt{16y-x^2}$

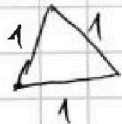
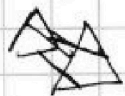
$\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}} = 1 = 3$

$y=2$

$x+3 + (4-x-2) - 2\sqrt{(x+3)(4-x-2)} = 4$   $h^2 + \frac{3}{4} = 9$   
 $4h^2 + 3 - 36 = 0$

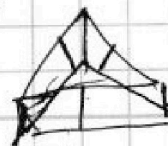
$\geq 4(y+x-x^2+2) + 25 - 20\sqrt{y+x-x^2+2}$   $h^2 = \frac{33}{4}$

$h = \frac{\sqrt{33}}{2}$



$(1+3)(4-x-2) = 4x - x^2 - 2x$   
 $+12 - 3x - 32$

$x - x^2$



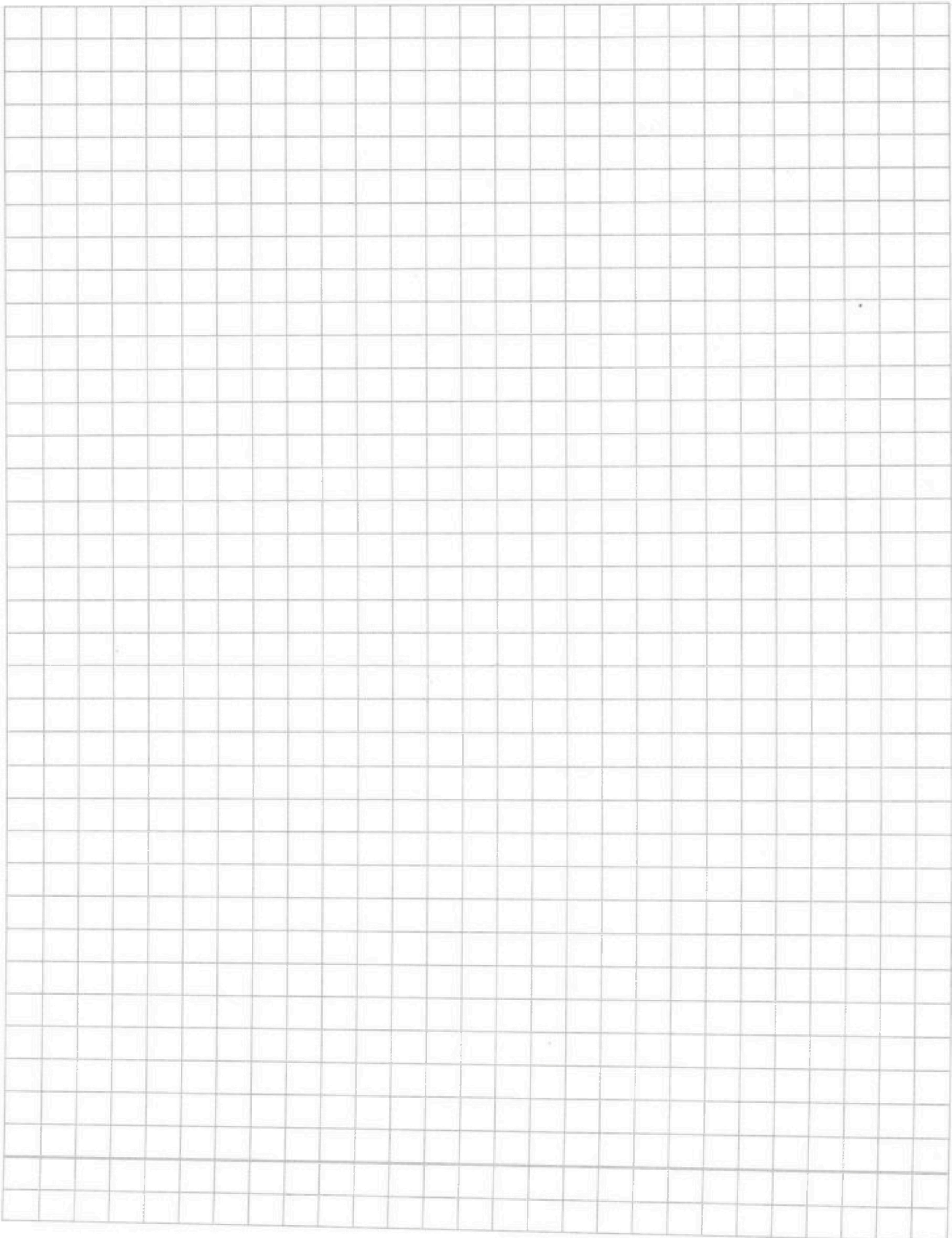


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

