



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



0 1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$; тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

? 3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

~~5.~~ [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

~~6.~~ [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых трапеций равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 11x - 35 = (x^2 - 10x + 25) / (x + 1) \\ 5 \geq x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 - 9x^2 + 2x + 60 = 0 \\ 5 \geq x \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1:

$$a_7 = \sqrt{\frac{11x-35}{(x+1)^3}}$$

$$a_{13} = 5-x$$

$$a_{15} = \sqrt{\frac{(11x-35)(x+1)}{x+1}}$$

$$\text{Одз: } \begin{cases} \sqrt{\frac{11x-35}{(x+1)^3}} > 0 \\ (11x-35)(x+1) > 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

В-значения не являются нулем.

$$= \frac{a_{15}}{a_7} = b^8, \quad b \neq 0 \quad (\text{в том случае } a_{15} = a_7 = a_{11} = 0)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x+1}{(x+1)^3}} &= \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}} = \frac{1}{|x+1|} \\ \Rightarrow b^4 &= \pm \sqrt{\frac{1}{|x+1|}}, \quad b^4 > 0 \Rightarrow b^4 = \frac{1}{\sqrt{|x+1|}} \\ a_7 \cdot b^4 &= a_{13} \\ \sqrt{\frac{11x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{|x+1|}} &= 5-x \end{aligned}$$

$$b^8 = \left(\frac{11x-35}{(x+1)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{11x-35}} = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$$

$$a_7 \Rightarrow b^4 = \pm \sqrt{(x+1)^2}, \quad \text{т.к. } b^4 > 0$$

$$b^4 = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

$$a_7 \cdot b^4 = a_{13}$$

$$\sqrt{\frac{11x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(x+1)^2} = 5-x$$

$$\sqrt{\frac{11x-35}{x+1}} = 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{11x-35}{x+1} = (5-x)^2 \\ 5-x \geq 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 2

$$|y+1| + 9|y-12| = \sqrt{169 - z^2}$$

$$\underbrace{|y+1| + |y-12|}_{2+3} + \underbrace{2|y-12|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = \underbrace{\sqrt{169 - z^2}}_{\substack{\downarrow \\ 13}}$$

из равенства



только

проверка гипотезы при $\sqrt{169 - z^2} = 13$

$$|y-12| = 0$$

$$\Rightarrow z=0$$

проверка:

$$|1+0| + 0 = \sqrt{169} \quad \checkmark$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2(\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{4-x})$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \sqrt{x+3} \\ b = \sqrt{4-x} \end{array} \right.$$

$$b = \sqrt{4-x}$$

$$a^2 + b^2 = 7$$

$$a - b + a^2 + b^2 - 2 - 2ab = 0$$

$$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} a-b = -2 \\ a-b = 1 \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x = \\ &= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow \cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = 0$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x - p = 0$$

$$] \cos x = t \in [-1; 1]$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

каждая покраска, которая образует
хотя бы ~~цвет~~ ^н одну симметрию
около заданной прямой 100×250 и 4
клетками \Rightarrow или C_{2500}^4

\Rightarrow кол-во покрасок, которые обе

ТОЛЬКО ~~о~~ ^н осевая ~~цвет~~ ^н симметрии
 $C_{2500}^4 - C_{1250}^2$

аналогично для только осевых

$+ 2(C_{2500}^4 - C_{1250}^2)$

$+ 2C_{1250}^2$ (обе 3-ья симметрии)

ответ $3C_{2500}^4 - 2C_{1250}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5] заметим, что если обладает
одна из 2-х из 3-х симметрий, то она
обладает и 3-ей.

1 раскраска обладает 2-ми осевыми
симметриями, но не обладает центральными
введём систему координат с центром
в центре прямоугольника

раскраска не сим. относительно центра

$\Rightarrow \exists x_1, y_1: C(x_1, y_1) \neq C(x_1, -y_1) \text{ или } C(x_1, y_1)$
но $C(x_1, y_1) = C(x_1, y_1) = C(-x_1, y_1)$ - цвет клетки
с коорд x, y
сим. относ. верт. ос. сим.
сим. относ. верт. ос. сим.

\Rightarrow противоречие

аналогично не сложно доказать от
2 случая.

~~для каждой~~ каждая раскраска имеет 3-ю
симметрию одну из заданных прямых
 100×125 , в которой шаг $\frac{1}{4} = 2$ клетки
 \Rightarrow только раскраска C_{12500}^2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) b = 23$$

$$\Rightarrow a = 31$$

~~или~~

$$(31 - c)(23 - c) = 9$$

$$713 - 54c + c^2 = 9$$

$$c^2 - 54c + 704 = 0$$

$$(c - 32)(c - 22) = 0$$

$$\begin{cases} c = 32 \\ c = 22 \end{cases}$$

Ответ: $(31, 23, 22)$
 $(31, 23, 32)$
 $(-16, -24, 15)$
 $(-16, -24, 25)$

$$2) b = -24$$

$$a = -16$$

$$(-16 - c)(-24 - c) = 9$$

$$(c + 24)(c + 16) = 9$$

$$c^2 + 40c + 375 = 0$$

$$(c - 15)(c - 25) = 0$$

$$\begin{cases} c = 15 \\ c = 25 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$(a-c)(b-c) = p^2, p - \text{простое}, a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ и } (a-c) \neq (b-c) \text{ т.к. } a > b$$

$\Rightarrow 4$ случаев

$$a-c = p^2$$

$$a-c = -p^2$$

$$a-c = 1$$

$$a-c = -1$$

$$b-c = 1$$

$$b-c = -1$$

$$b-c = p^2$$

$$b-c = -p^2$$

$$\Rightarrow (a-c) - (b-c) = \pm(p^2 - 1)$$

$$a-b = \pm(p^2 - 1)$$

$$\text{если } p \neq 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow a-b \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p = 3$$

$$\Rightarrow a-b = \pm 8, i, k = a > b$$

$$a-b = 8$$

$$a = 8 + b$$

$$a + b^2 = 560$$

$$8 + b + b^2 = 560$$

$$b^2 + b - 552 = 0$$

$$(b + 24)(b - 23) = 0$$

$$\begin{cases} b = 23 \\ b = -24 \end{cases}$$

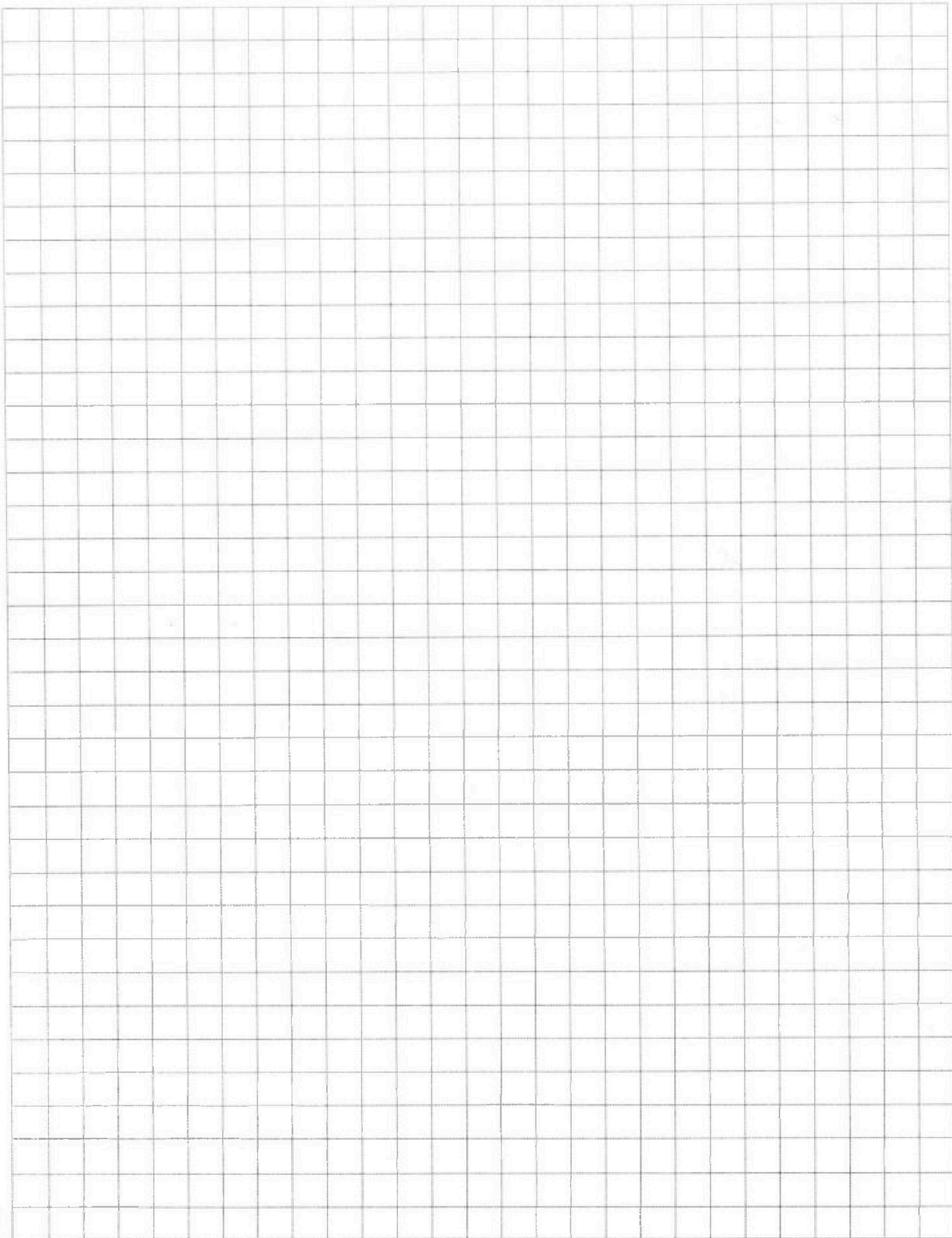


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

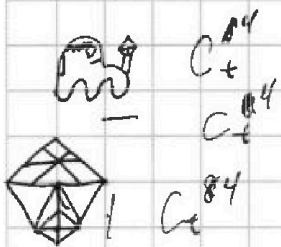
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

200x250

$$11 \cdot 100 \cdot 250 = +$$



$$3C_{\frac{200}{2}}^4 - 2C_{\frac{250}{2}}^4$$

$$ab - ac - bc + c^2 = d^2$$

$$ab - ac - bc = d^2 - c^2$$

$$(a-c)(b+c)$$

$$|z| \leq 19$$

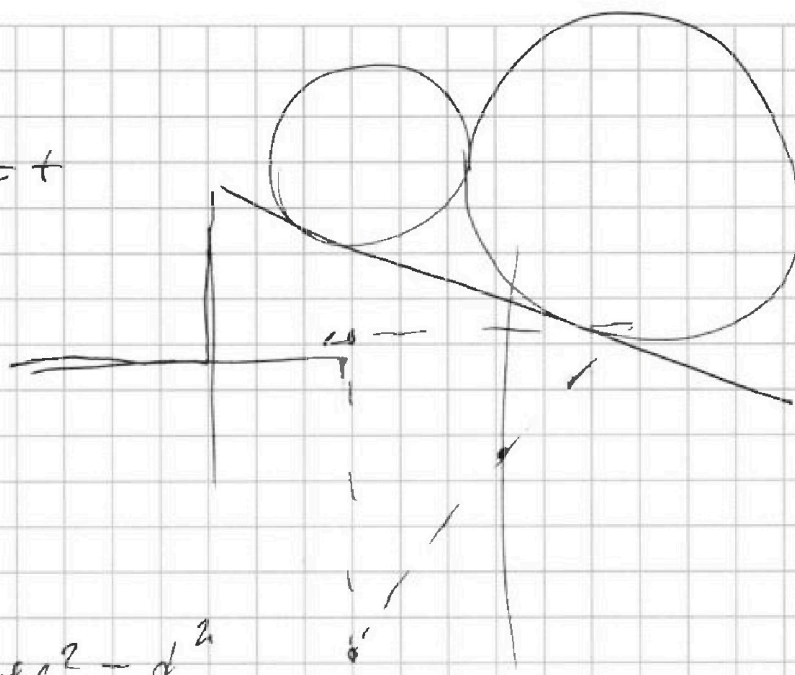
$$z=0$$

$$y = 112$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2} \quad \sqrt{48+1}$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{(4-x)(3+x)} + \sqrt{4-x}$$

$$\frac{x+3 + 4-x}{\sqrt{x+3} + 5} = \sqrt{4-x} (2\sqrt{3+x} + 1)$$

$$a-b+5 = 2\sqrt{ab} \quad 2\sqrt{ab}$$

$$a-b - 2\sqrt{ab} = -5 \quad a-b+5 = 2ab$$

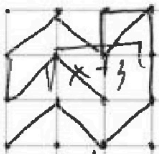


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

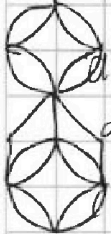
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{x+3} + 2 = \sqrt{4-x}$$

4 13 15

$$a - b + 2 = 2ab$$



$$a^2 + b^2 = 1$$

$$a - b + a^2 + b^2 - 2ab + 4 = 0$$

$$a - b + (a - b)^2 + 4 = 0$$

$$a - b$$

$$\frac{2}{2} = 1$$

$$a - b + a^2 + b^2 - 2 = 2ab = 0$$

$$(a - b) + (a - b)^2 - 1 = 0$$

$$(a - b) = -1 \pm \sqrt{1}$$

$$(a - b + 2)(a - b - 1) = 0$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = -2$$

$$\begin{aligned} a - c &= 1 \\ b - c &= 9 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x+3} + 2 = \sqrt{4-x}$$

$$x + 3 + 4 + 4\sqrt{x+3} = 4 - x$$

$$\begin{aligned} a - c &= 1 \\ b - c &= p^2 \end{aligned}$$

$$a - b = 1 - p^2$$

$$4\sqrt{x+3} = -2x - 3$$

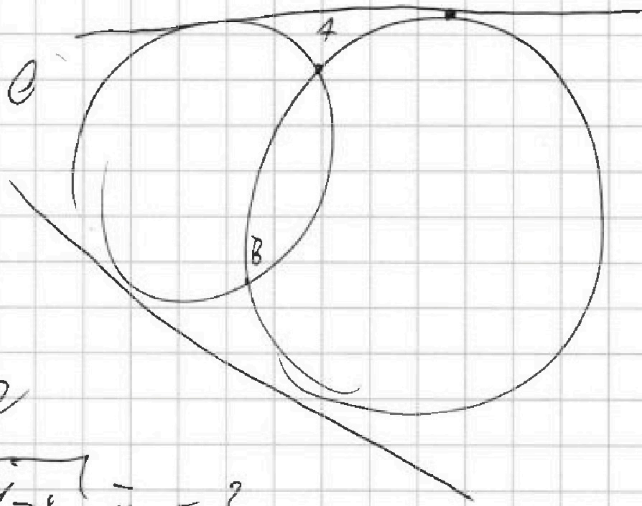
$$16x + 48 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$a - c = -1$$

$$p^2 =$$

$$c = 4x^2 - 4x - 39$$

$$-p$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on a grid background. It shows a system of linear equations in augmented matrix form:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & 2 & 60 & \\ 1 & -8 & -6 & & \\ 2 & -7 & -22 & & \\ 3 & -6 & -16 & 12 & \\ 4 & -5 & -18 & -12 & \\ 5 & -4 & -18 & -30 & \\ 6 & -3 & -16 & -36 & \end{array}$$

Below the matrix, there are several calculations and notes:

- 48
- $\frac{3}{28}$
- $\frac{4}{72}$
- $6 \cdot 16 = 96$
- $26 - 35$
- $60 = 4 \cdot 5 \cdot 7$
- 101
- 1
- 12
- -30
- 1
- -12
- 23
- 48
- 15
- 1
- 6
- 92
- 10
- 1
- -9
- 2
- 60
- -11
- -10
- 12
- 36
- -21
- -11
- 24
- -1
- $\frac{25}{13}$
- 5
- -31
- -12
- 38
- $x = x = x$
- $x + 7 =$
- -4
- -13
- 521
- -2
- -5
- -14
- 72
- $\sqrt{\frac{17-3t}{t}} = 5 - 2t$
- $\frac{13t - 48}{t} = 6 - t$
- $t^2 - 12t^2 + 23t + 48 = 0$
- $13t - 48 = t^2 - 12t + 36$
- $13t - 48 = t^2 - 12t + 36$

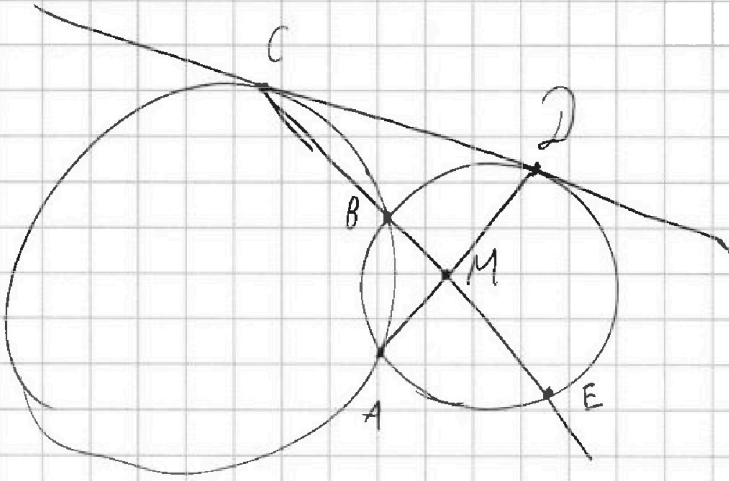


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
_ _ ИЗ _ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



752 2 · 2146
 4 · 176 4 · 498
 8 · 88 8 · 69
 16 · 2744 8 · 7 · 23
 24 · 23
 31 32 · 22
 29
 ———
 99
 62
 413
 2
 24
 16
 ———
 444
 24
 304

24
 23
 ———
 42
 48
 ———
 512

5 · 45
 25 · 15
 375



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$y:$ $AB^8 = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}^8}$ $x^3 - 10x^2 + 25x$
 $AB^8 = \frac{1}{\sqrt{x+1}^8}$ $- +x^2 - 10x + 25$
 $AB^8 = \frac{1}{\sqrt{x+1}^{1-2}}$ $x^3 - 10x^2 + 15x + 25$
 $AB^8 = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ $\downarrow \quad \downarrow$
 $AB^8 = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ $2x \quad 60$

$\frac{\sqrt{13x-35}}{(x+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{13x-35}{x+1} = 5 - \frac{4}{x+1}$

$\frac{13x-35}{x+1} = \frac{25-10x+x^2}{x^2} \quad \begin{array}{r|l} 1 & -7 \\ -2 & 1 \quad -11 \quad 24 \\ -3 & 1 \quad -12 \end{array}$

$13x-35 = x^3 - 10x^2 + 25x + x^2 - 10x + 25$
 $13x-35 = x^3$ $\begin{array}{r} 3 \quad 1 \quad -6 \quad -16 \\ 4 \quad 1 \quad -5 \quad -18 \end{array}$

$\cos^3 x = \cos x \cos^2 x - \sin x \cdot \sin x =$
 $= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x =$
 $= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$ $\begin{array}{r} 5 \quad 1 \quad -4 \quad -18 \\ -5 \quad 1 \quad -14 \quad 22 \end{array}$

$\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 6 \cos^2 x$
 $\cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = P$
 $\cos^3 x + 3 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = P$
 $4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = P$