



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 820$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b_4 = b_1 \cdot k^3 = \frac{\sqrt{15x+6}}{(x-3)^3}$$

$$b_{10} = b_1 \cdot k^9 = x+4$$

$$b_{12} = b_1 \cdot k^{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)^7}$$

$$\Rightarrow \frac{b_1 \cdot k^{12}}{b_1 \cdot k^9} = k^3 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)^7}{(15x+6)}} = (x-3)^2$$

//] вот $15x+6=0$, тогда $b_4=0=b_1 \cdot k^3 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ b_1=0 \end{cases} \Rightarrow b_{10}=0$, но $b_{10}=x+4=$

т.е. $k^9 = (x-3)^2$ ^{к²⁰р} $\Rightarrow k^4 = x-3, x \geq 3$
 $k^4 = 3-x, x < 3$

т.е. $x \neq -\frac{2}{5}$ //

1) $x \geq 3$, тогда $k^4 = x-3 \Rightarrow k^2 = \sqrt{x-3}$

тогда $b_{10} = b_1 \cdot k^9 = \frac{b_1 \cdot k^{12}}{k^3} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)^7}}{\sqrt{x-3}} = x+4$ \Leftrightarrow

т.к. $b_1 = \frac{\sqrt{15x+6}}{(x-3)^3} : x+3 //$

оп³: $(15x+6)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 & x+3 \\ x \leq -\frac{2}{5} & x+3 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3$ ~~и $x \leq -\frac{2}{5}$ не подходит~~

$\Leftrightarrow \sqrt{15x+6} = x+4 \Leftrightarrow (15x+6) = x^2+8x+16 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x=5$

2) $x < 3$, тогда $k^4 = 3-x \Rightarrow k^2 = \sqrt{3-x}$

тогда $b_{10} = \frac{b_1 \cdot k^{12}}{k^3} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)^7}}{\sqrt{3-x}} = x+4 \Leftrightarrow \sqrt{6-15x} = x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-15x = (x+4)^2 \\ 6-15x \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+23x+10=0 \\ -4 \leq x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-23 \pm \sqrt{529-40}}{2} \\ -4 \leq x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-23 \pm \sqrt{489}}{2} \\ -4 \leq x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\frac{-23+\sqrt{489}}{2} < 3 \Leftrightarrow -8 \leq -23+\sqrt{489} < 6 \Leftrightarrow 15 \leq \sqrt{489} < 29 \Leftrightarrow 489 < 29^2$ ~~и $489 < 29^2$ не подходит~~
 $\frac{-23-\sqrt{489}}{2} < 3 \Leftrightarrow -8 \leq -23-\sqrt{489} < 6 \Leftrightarrow -31 \leq -\sqrt{489} < 29 \Leftrightarrow \sqrt{489} \leq 31$ ~~и $\sqrt{489} \leq 31$ не подходит~~

Ответ: $\left\{ \frac{-23 \pm \sqrt{489}}{2}, 5 \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6$$

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-35+35-2x-x^2+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-35+(5-x)(x+7)+z} \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{225-z^2} \geq 0 \Rightarrow z \in [-15; 15]$$

$$\text{c) } A: |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \Rightarrow \begin{cases} y-20+2y-70 = \sqrt{225-z^2}, y \geq 35 \\ y-20-2y+70 = \sqrt{225-z^2}, 20 \leq y < 35 \\ 70-y+70-2y = \sqrt{225-z^2}, y \leq 20 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 3y-90 = \sqrt{225-z^2}, y \geq 35 \\ 50-y = \sqrt{225-z^2}, 20 \leq y < 35 \text{ - не пойд.} \\ 90-3y = \sqrt{225-z^2}, y \leq 20 \text{ - не пойд.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 35 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ тогда:}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = \sqrt{35-35+(5-x)(x+7)+0} \Rightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = \sqrt{(5-x)(x+7)}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x+7 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x+7+5-x-2\sqrt{(x+7)(5-x)} = (5-x)(x+7)+36-12\sqrt{(5-x)(x+7)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{e) } \begin{cases} -7 \leq x \leq 5 \\ (5-x)(x+7) \pm 24 = 0 \sqrt{(x+7)(5-x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 \leq x \leq 5 \\ (\sqrt{(x+7)(5-x)} - 4)(\sqrt{(x+7)(5-x)} - 6) = 0 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} -7 \leq x \leq 5 \\ \sqrt{(x+7)(5-x)} = 4 \\ \sqrt{(x+7)(5-x)} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35-2x-x^2=16 \\ 35-2x-x^2=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x-19=0 \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 \leq x \leq 5 \\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+76}}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} -7 \leq x \leq 5 \\ x = -1 \pm 2\sqrt{5} \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\parallel \begin{cases} -7 \leq -1-2\sqrt{5} \leq 5 \\ -7 \leq -1+2\sqrt{5} \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq -2\sqrt{5} \leq 6 \\ -6 \leq 2\sqrt{5} \leq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{5} \leq 6 \\ \sqrt{5} \leq 3 \text{ - не!} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \{(-1+2\sqrt{5}; 35; 0); (-1-2\sqrt{5}; 35; 0); (-1; 35; 0)\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos^3 x + 6 \cos x = 3 \cos^2 x + p \Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p \quad \text{по}$$

тогда с) $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$, где $t = \cos x \Rightarrow t \in [-1; 1]$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(4t^2 - 4t + 1) = 3(2t - 1)^2$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, \text{ ищем } f(t) \text{ на } [-1; 1]$$

$$f(0) = 0 - 0 + 0 + 3 = 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{6}{4} + \frac{3}{2} + 3 = 3,5$$

$$f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 = -10$$

$$f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 = 4$$

попр. График $y = f(t)$

~~$$f(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 3 = 0$$~~

~~$$D = \frac{9}{4} + 12 = \frac{57}{4}$$~~

тогда $p \in [-10; 4]$ и y -я есть решение

с) $p \in [-10; 4]$, тогда:

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p \Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x - \frac{1}{2} = p - 3,5 \Leftrightarrow$$

~~$$\Leftrightarrow (\cos x - \frac{1}{2})^3 = p - 3,5 \Leftrightarrow (2 \cos x - 1)^3 = 2p - 7 \Leftrightarrow 2 \cos x - 1 = \sqrt[3]{2p - 7} \Leftrightarrow$$~~

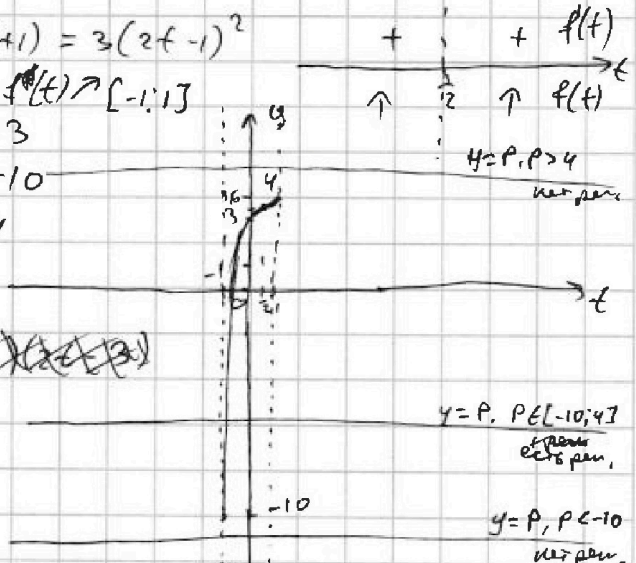
~~$$\Leftrightarrow 2 \cos x = \sqrt[3]{2p - 7} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt[3]{2p - 7} + \frac{1}{2}}{2}$$~~

~~$$\Leftrightarrow 4(\cos x - \frac{1}{2})^3 = p - 3,5 \Leftrightarrow (\cos x - \frac{1}{2})^3 = \frac{2p - 7}{4} \Leftrightarrow \cos x - \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{2p - 7}{4}} \Leftrightarrow$$~~

~~$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2} \Leftrightarrow x = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$~~

~~$$x = -\arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$~~

Ответ: $\left\{ \arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2}\right) + 2\pi k; -\arccos\left(\frac{1 + \sqrt[3]{2p - 7}}{2}\right) + 2\pi n \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$
при $p \in [-10; 4]$



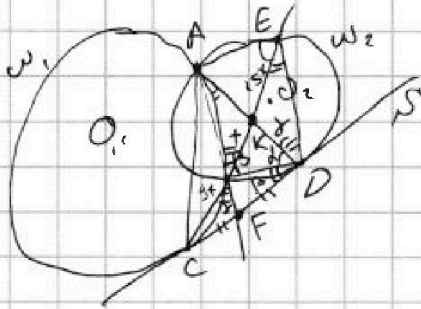


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$K = AP \cap CE \quad \frac{CK}{KE} = \frac{9}{25}$$

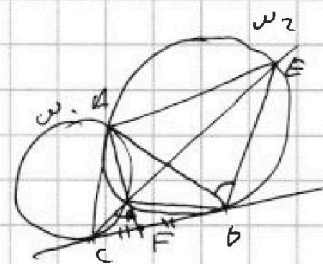
$$1) CB \cdot CE = CD^2 \text{ т.к. } CD - \text{кас.}, CE - \text{сеч.}$$

$$\begin{aligned} CD^2 &= AB \cap CD = F \\ CD \cdot ED &= FB \cdot FA \\ \Rightarrow \frac{CK}{KE} = \frac{BK}{KA} \text{ тогда } \frac{CK}{KE} &= \frac{BK}{KA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= FB \cdot BA \\ (CK - x)(CK + x) &= FB \cdot BA \\ AK \cdot KP &= BK \cdot KE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle ADF &= \angle AEB = \angle \overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}} \\ \angle AEP &= \angle APD = \angle \overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}} \\ \angle AKE &= \angle CKD \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle CKD \sim \triangle AKE \quad \frac{CK}{KE} = \frac{9}{25}$$



$$\begin{aligned} \angle CBF &= \angle ABK \text{ (всп.)} \\ \angle ABK &= \angle ADE = \frac{\overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}}}{2} \Rightarrow \angle CBF = \angle ADE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle DAB &= \angle BED = \frac{\overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}}}{2} \\ \angle ADF &= \frac{\overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}}}{2} \\ \angle BCF &= \frac{\overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}} \cdot \overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}}}{2} = \frac{\overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}}}{2} \cdot \frac{\overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}}}{2} = \angle EDB - \angle DBF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle EDA &= \beta = \angle ABD \\ \angle ADB &= \alpha = \angle AEB = \frac{\overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}}}{2} \\ \angle BDC &= \angle CED = \frac{\overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}}}{2} = \beta \end{aligned}$$

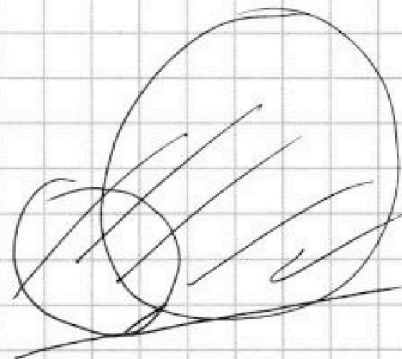
$$\angle EDB = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma = \angle EAD = \frac{\overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}}}{2} = \gamma$$

$$\angle BCF = \frac{\overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}} \cdot \overset{\text{всп.}}{\text{сеч.}}}{2} = \beta = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma = 180^\circ - \alpha - 2\beta - \gamma$$

$$\angle BKP = \beta + \gamma = (180 - (180 - \beta - \gamma))$$

$$\angle KCD = 180 - (\beta + \gamma) - (\alpha + \beta) = 180 - \alpha - 2\beta - \gamma = \gamma - \beta$$

$$\angle CBD = 180 - (\gamma - \beta) - \beta = 180 - \gamma = \alpha + \beta + \gamma$$



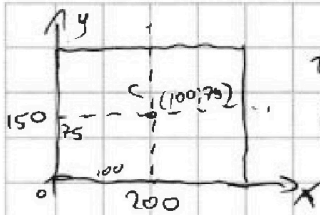


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



т.к. $150:2 = 75$ и $200:2 = 100$ центр имеет координаты $(75, 100)$

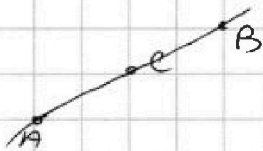
Введем координаты ячеек (см. рис-и)

Тогда центральная ячейка находится на $(100, 75)$

т.к. весь ряд $y=75$ и столбец $x=100$ сами себе симметричны отн. сред. лин. т.к. сами явл. сред. линиями.

на 8 задач

1) Симметрия отн. центра: чтобы записать м. в ячейку было симметрично относительно центра квадрата, чтобы либо 1 ячейка в центре, и остальные симметричны отн. друг-другу центра, либо 0 ячеек в центре и ост. симметричны отн. центра.



1) A, B - сим. отн. C - центра.

чтобы A, B были симметричны отн. C

должно быть $AC = CB$, т.е.

тогда задает центр. положение C, B

и тогда все 8 точек (или 7 если C-закрашено)

можно разбить по парам.

Сразу видно, что центр не может быть закрашен т.к. $7/2$

Тогда можно пойти способом пометить 4 точки в прямоугольнике

и не пометить в центр.

Это кон. в способ пометить в попарную прямоугольнике симметрично

линей без центра, ведь каждая точка задает друг-другу симметрию

отн. C. т.е. Способ пометить и в $150 \cdot 99 + 76$ ячеек.

$150 \cdot 99 + 76 = 14900 + 76 = 14976 = 15000 - 76 = 14924$ ячеек.

А кон. в таких способ $14924 \cdot 14923 \cdot 14922 \cdot 14921$

2) Симметрия отн. одной из центр. линий.

У точек не разлучает это. Тогда каждая точка задает попарно

положение второй, линии симметрии центр. линии. Тогда каждая точка

кон. центр. линии не может иметь четное кон. в $150 \cdot 99$, т.к. тогда

оставляется кон. в $150 \cdot 99$ ячеек и можно разбить по парам

Тогда можно пойти кон. в способ пометить 4 точки в D, т.к. чтобы

они были сим-ны отн. центра, но не повт. друг-другу были симметричны.

Во первых, можно пометить точки только в попарную D, без центра, т.к. тогда

точки задает одна одну, при этом попарно ряд можно пометить, так

как не повт. друг-другу были симметричны.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда отдельно рассмотрим все эти случаи.

1) Горизонт. центр линии.

1.1) Как центр. линия Ошесток

тогда кол-во ступеней полетит 4 и летит в 100-74 метра
= $7400 \cdot 7399 \cdot 7398 \cdot 7397$

1.2) Как ц. л. - 2 метра

тогда: кол-во ступеней полетит =

$$\frac{7400 \cdot 7399 \cdot 7398}{3} \cdot \frac{100 \cdot 99}{2}$$

1.3) Как ц. л. - 4 метра, тогда кол-во ступеней:

$$\frac{7400 \cdot 7399}{2} \cdot \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97}{4}$$

1.4) Как ц. л. - 6 метров, тогда кол-во ступеней:

$$7400 \cdot \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95}{6}$$

1.5) Как ц. л. - 8 метров, тогда:

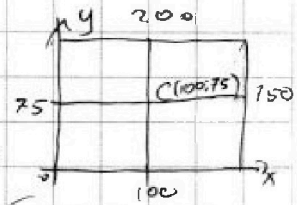
1.6) 2 метра - $75 \cdot 99 + 74 = 14924$ | 15000 - 75 - 74 = 14851 см.

2 метра - $(14851 - 2)$ см.

3 метра - $(14851 - 4)$ см.

4 метра -

8 метров - $(14851 - 14)$ см.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a > b \\ a - b \neq 3 \\ (a-c)(b-c) - \text{ном. квадрат} \\ a + b^2 = 820 \end{cases} \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

1) $a + b^2 = 820, b, a \in \mathbb{Z} \Rightarrow b^2 \in [1; 819] \Rightarrow b \in [1; 28]$

тогда:

b	a	b	a
1	819	15	595
2	816	16	564
3	811	17	531
4	804	18	498
5	795	19	459
6	784	20	420
7	771	21	379
8	756	21	379
9	739	23	335
10	720	24	293
11	699	25	246
12	676	26	185
13	651	27	142
14	624	28	36

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 224 \\ \hline 784 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 224 \\ \hline 784 \end{array} //$$

причем $b \in [1; 28]$

$$\begin{aligned} a &= 820 - b^2 \\ a > b &\Rightarrow 820 - b^2 > b \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^2 - 820 + b < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^2 + b < 820 \\ &\leq 28^2 + 28 = 812 < 820 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 820 - b^2 \\ a - b \neq 3 &\Rightarrow 820 - b^2 - b \neq 3 \Rightarrow 1 - b^2 - b \neq 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -b^2 - b = 3n + 1, n \in \mathbb{Z} \\ -b^2 - b = 3k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - b^2 - b = 3n + 2, n \in \mathbb{Z} \\ 1 - b^2 - b = 3k + 1, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -b^2 - b = 3n + 1, n \in \mathbb{Z} \\ -b^2 - b = 3k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b(b+1) = 3m, m \in \mathbb{Z} \\ b(b+1) = 3k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow b \in [1; 28] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b \in \{2; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 11; 12; 14; 15; 17; 18; 20; 21; 23; 24; 26; 27; 16; 25; 28\}$$

$$(a-c)(b-c) - \text{ном. кв} \Rightarrow (a-c)(b-c) = k^2, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{т.е. } (820 - b^2 - c)(b - c) = k^2 \Rightarrow b^3 - 820b - cb = b^2c - 820c + c^2 - k^2$$

$$\text{т.е. } (820 - b^2 - c)(b + c) = k^2, \text{ где } k - \text{прост.}$$

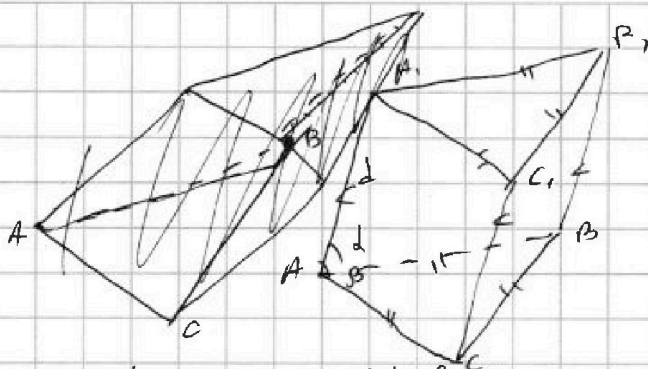
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



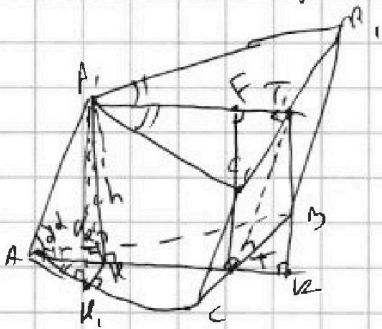
$$d \cdot \sin \beta = AB = BC = a \dots = c, A_1 = 2$$

$$S_{AA_1B_1B} = S; S_{AA_1C_1C} = S; S_{CC_1B_1B} = 4$$

$$S_{AA_1B_1B} = 2 \cdot d \cdot \sin \beta = S \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d \sin \beta = \frac{S}{2} \\ S_{AA_1C_1C} = 2 d \sin \beta = S \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d \sin \beta = \frac{S}{2} \\ d = \beta \\ d \sin(\beta) = \beta \Rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha \end{cases}$$

1) $d = \beta$, тогда h - выс. из A , на ABC , $h_1 \triangle ABC = H$, из K - перп. все на AC и AB



$AK \perp ABC \Rightarrow AK \perp AC$
 $AK \perp AC \Rightarrow AK \perp AC$ (т.о.з. перп.)
 $AK \perp AB$ (т.о.з. перп.)
 $\Rightarrow AK \perp ABC$ (т.о.з. перп.)

тогда $AK_1 = AK_2 = d \cos \beta$

$\triangle AK_1K_2$ и $\triangle AK_2K_1$
 $AK_1 = AK_2 = d \cos \beta$
 $AK - об. ш.$
 $\angle AK_1K_2 = \angle AK_2K_1 = 90^\circ \Rightarrow \triangle AK_1K_2 = \triangle AK_2K_1$ (с.с.у.)

$\Rightarrow AK$ - выс. $\triangle ABC$

т.к. $\triangle ABC$ - равностор. AK - выс. $[AK] \cap [CB] = T$

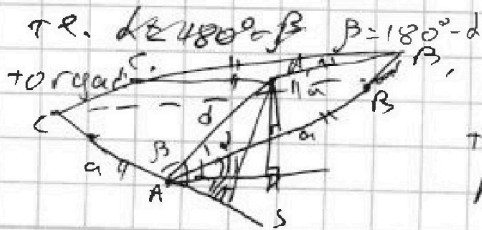
построим высоту из T , на ABC - TK ; $KE \in [AK]$, т.к. A, T, K и A, K, T
 тогда $TK \perp CB$
 $TK \perp ABC \Rightarrow T, T \perp CB$ (т.о.з. перп.)

построим TF - высоту на A, B, C ,
 $TF \perp A, B, C$,
 $FT \perp C, B, (FT, E, T, K, T, K \cap T, K \cap T, T \in AK)$ $\Rightarrow TT_1 \perp C, B, \Rightarrow$

$\Rightarrow TT_1$ - об. ш. все CC_1B_1B

$AA_1 = TT_1$ (т.к. A, T, K и $AT = A, T$) $\Rightarrow TT_1$ - об. ш. все CC_1B_1B
 $TT_1 = CC_1B_1B$

$\Rightarrow CC_1B_1B$ - правильный. $\Rightarrow S_{CC_1B_1B} = ad = 4 \Rightarrow \sin \beta = \frac{4}{d}$
 $\Rightarrow d = 2 \Rightarrow \sin \beta = \frac{S}{4} > 1$?!



построим $CA - CS$ $\angle A_1AS = 180^\circ - \beta = \alpha$
 тогда из свойств перпендикуляров, что в \triangle
 AK перп. на $BC - CS \perp \triangle BAS$
 $\angle BAK = \angle CAS = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 60^\circ$

см. прод. перп. CP ?

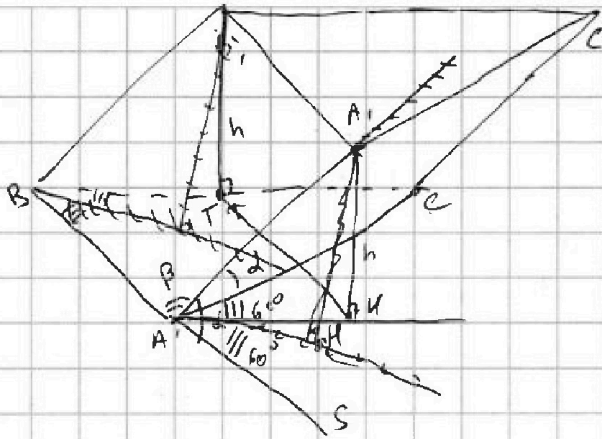


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Построим высоту из $B_1 \rightarrow B_1T$
 $B_1T \perp AA_1$

Построим высоту из $B_1 \rightarrow B_1T$
 $B_1T \perp AA_1$

Заметим, что $\angle KAA_1S = \angle CBA_1 = 60^\circ$
 $AA_1 \perp BC$

$B_1T = AA_1K = h$ - вые. призмы
 $BB_1 = AA_1 = d$ - грань призмы } \Rightarrow
 $\angle B_1TB = \angle A_1KA = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle B_1TB = \triangle A_1KA, \Rightarrow$

$\Rightarrow B_1AK = BT$

$\angle BTA_1$

$TK \perp$ плоск. $A_1B_1C_1$

или $TK \perp B_1A_1$ (так $B_1A_1 \parallel BC$)

$AA_1 = B_1A_1$

$AB \parallel B_1A_1$

($AD \dots C_1$) - параллельно

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} TK \parallel B_1A_1 \\ TK \perp B_1A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow A_1B_1C_1$ - перпендикулярна

$\Rightarrow \angle TBA = \angle KAS = 60^\circ \Rightarrow T \in BC$

тогда B_1T - вые. $BB_1CC_1 \Rightarrow S_{BB_1CC_1} = B_1T \cdot BC = 2 \cdot h = 4 \Rightarrow h = 2$

Ответ: высота призмы $h = 2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$v_1 = v_0 \cdot k^0 \quad v_2 = v_1 \cdot k^1 \quad ; \quad v_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \quad ; \quad v_{10} = v_1 \cdot k^9 = x+4$$



$$v_{12} = v_1 \cdot k^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)^{11}}$$

ОДЗ:

$$\left\{ \begin{aligned} v_1 k^{11} &= \sqrt{(15x+6)(x-3)^{11}} \\ v_1 k^9 &= \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \\ v_1 k^8 &= x+4 \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} // 15x+6 & & // 15x+6 & & // x+4 \\ (x-3)^3 \geq 0 & \Leftrightarrow & x-3 \geq 0 & \Leftrightarrow & x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (0, \infty) \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\} \cup (3; +\infty) \\ \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) & & \cos 2\alpha + \cos 2\beta & & \cos 2\alpha + \cos 2\beta \end{aligned}$$

$$\text{тогда: } \frac{v_1 k^{11}}{v_1 k^9} = k^2 = \sqrt{\frac{(15x+6)(x-3)^{11}}{(15x+6)(x-3)^3}} = \sqrt{(x-3)^4} = |x-3|$$

$$\left. \begin{array}{l} 189 \\ 163 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = -\frac{2}{3}, \text{ тогда: } \\ v_1 k^{11} = 0 \\ v_1 k^9 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k=0 \\ v=0 \end{array} \right. \text{, но тогда } v_1 k^9 = 0, \text{ но } v_1 k^9 = x+4 = -\frac{2}{3} \neq 0$$

$$\text{с) } x > 3, \text{ тогда: } k^2 = x-3 \Rightarrow v_1 k(x-3) = x+4 \Rightarrow v_1 k = \frac{x+4}{x-3} \Rightarrow -2\cos^2 x - \frac{1}{8}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ +46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{тогда: } v_1 k^{11} = v_1 k \quad \text{т.е. } v_1 k^{10} = 1 \Rightarrow v_1 k = \frac{1}{k^9} = \frac{1}{(x-3)^9 \sqrt{x-3}} = \frac{1}{(x-3)^{9.5}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(15x+6)\sqrt{x-3}} = x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ (15x+6)\sqrt{x-3} = (x+4)^2 \end{cases} \quad (x^2 + 8x + 16)(x^2 + 8x + 16)$$

$$(15x+6)^2(x-3) = (x+4)^4 \Leftrightarrow (225x^2 + 36 + 180x)(x-3) = (x^2 + 8x + 16)^2$$

$$\Leftrightarrow 225x^3 + 36x + 180x^2 - 675x^2 - 108 - 540x = x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 8x^3 + 44x^2 + 128x + 16x^2 + 428x + 256$$

$$\sqrt{80} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5} \quad \begin{array}{r} 225 \\ -180 \\ \hline 45 \\ -180 \\ \hline -135 \\ +96 \\ \hline -39 \\ +504 \\ \hline 465 \\ -540 \\ \hline -75 \\ +256 \\ \hline 181 \end{array}$$

$$\sqrt{80} = \cos 2x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$= 16.5 \quad \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x \sin^2 x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 + 2 \cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^3 x - 3 + p \Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 = p$$

$$\text{с) } f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3, \text{ где } t = \cos x \Rightarrow t \in [-1; 1]$$

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3, \text{ тогда: } f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, \text{ где } \cos x = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a > b$; $a-b \neq 1/3$ $(a-x)(b-x)$ - и в вершину

$a-b = 2/3$ a - сторона $\triangle ABC$ $a=2$
 d - высота грани $AA_1B_1C_1$
 $a+b=8 \Rightarrow$
 $b^2 \in [1; 9]$

$S_{AA_1B_1B_1} = 5$
 $S_{AA_1C_1C_1} = 5$
 $S_{CB_1B_1C_1} = 4$

$S_{AA_1B_1B_1} = AA_1 \cdot AB \cdot \sin \alpha = ad \sin \alpha = 5$
 $S_{AA_1C_1C_1} = AC \cdot AA_1 \cdot \sin \beta = ad \sin \beta = 5$ $\Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow$
 $d = \frac{5}{\sin \alpha} = \frac{5}{\sin \beta}$
 $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 180^\circ - \beta \\ \alpha = \beta \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} x^2 \sin^2 30^\circ + h^2 = t^2 \\ x^2 \cos^2 30^\circ + d^2 = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot \frac{1}{4} + h^2 = d^2 \sin^2 \alpha \\ x^2 \cdot \frac{3}{4} + d^2 = d^2 \cos^2 \alpha \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot \frac{1}{4} + h^2 = \frac{25}{4} \\ x^2 \cdot \frac{3}{4} + d^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + h^2 = d^2 \\ x^2 + h^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + d = h \\ d^2 = \frac{25}{4} \end{cases}$

$x^2 \sin^2 30^\circ + h^2 = t^2$
 $t^2 + x^2 \cos^2 30^\circ = d^2$
 $t^2 + h^2 = d^2$

$d=4 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{4}$ - ?!

$d = 180^\circ - \beta$

$t = d \sin \alpha = \frac{5}{2}$

$25^2 = 625$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

