



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$, девятый член равен $x + 3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.

Пусть первый член геом. прогрессии равен a , её соседние члены отличаются в d раз. Тогда седьмой член равен ad^6 ; девятый - ad^8 ; 15-й - ad^{14} . Пусть $a=0$ или $d=0$, тогда $x+3=0$; $\sqrt{(25x-9)(x-6)}=0$, но такое не бывает, а значит a и $d \neq 0$; тогда все члены геом. прогр. $\neq 0$ и на них можно делить.

$$\frac{ad^{14}}{ad^6} = \frac{ad^{14}}{ad^6} = \frac{\sqrt{(25x-9)(x-6)}}{\sqrt{(x-6)^2}} = \frac{1}{(x-6)^2} = d^8 \Rightarrow \left| \frac{1}{x-6} \right| = |d^4| = d^4, \text{ т.к. } d^4 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^4 = \frac{1}{x-6} & (1) \Rightarrow d^2 = \frac{1}{\sqrt{x-6}}; x \geq 6 \\ d^4 = \frac{1}{6-x} & (2) \Rightarrow d^2 = \frac{1}{\sqrt{6-x}}; x < 6 \end{cases}$$

$$\text{1)} ad^8 = x+3 = a \cdot \frac{1}{(x-6)^2} \Rightarrow a = (x+3)(x-6)^2 = \sqrt{25x-9} \cdot \sqrt{x-6}$$

$$\text{2)} ad^{14} = \left(\frac{1}{\sqrt{x-6}} \right)^2 \cdot (x+3)(x-6)^2 = \frac{x+3}{(\sqrt{x-6})^3} = \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$$

$$x+3 = \sqrt{25x-9} \Rightarrow x \geq \frac{9}{25}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 25x - 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0; \text{ По г. Виета } \begin{cases} x=1 - \text{не подходит, т.к. } x \geq 6. \\ x=18 \end{cases}$$

допускаем усл. и знак. не -1, чтобы не упустилась

$$\text{2)} ad^{14} = (x+3)(6-x)^2 = \frac{x+3}{(\sqrt{6-x})^2} = \frac{x+3}{(\sqrt{6-x})^3} = \sqrt{\frac{9-25x}{(6-x)^3}} \Rightarrow x+3 = \sqrt{9-25x}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 9 - 25x \Rightarrow x \leq \frac{9}{25}$$

$$x^2 + 31x = 0$$

$$x=0; x=-31.$$

Тогда x может быть равен -31 ; 0 и 18 .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим, действительно ли существует такие профессии.
И $ad^6 =$

Ответ: $-31; 0; 18$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

42.

$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \leq 9.$$

Если $y \leq 0$, то $4|y-5| \geq 20$, второе слагаемое ≥ 0 и такого быть не может. мы $y \neq -4$, но так выразится ≥ 9

$$y \geq 5: 2y - 16 \leq 9 \Rightarrow y \leq 12,5$$

$$y < 5: y + 4 + 20 - 4y \leq 9 \Rightarrow y \geq 5, \text{ не подходит} \Rightarrow y \geq 5. \text{ Тогда 2 выра-}$$

жения раскрывается как $5y - 16 = \sqrt{81-z^2}$. При этом $y \geq 5$, а значит

$$\text{правая часть} \geq 9, \text{ значит } \sqrt{81-z^2} \geq 9 \Rightarrow \sqrt{81-z^2} = 9 \Rightarrow z = 0, y = 5$$

$$\text{Тогда } \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x+x^2}$$

~~используем~~

~~неравенства~~

$$x^2 - 4x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$$

~~и~~ \rightarrow По г.к. $x \geq -5$ и $x \leq 1$, т.к. корни существуют,

то $x = -5$ или $x = 1$. Но тогда правая часть $= 0$, а левая ≥ 4 ,

чего не может быть. Значит у системы нет решений.

Ответ: ~~нет~~ решений нет.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

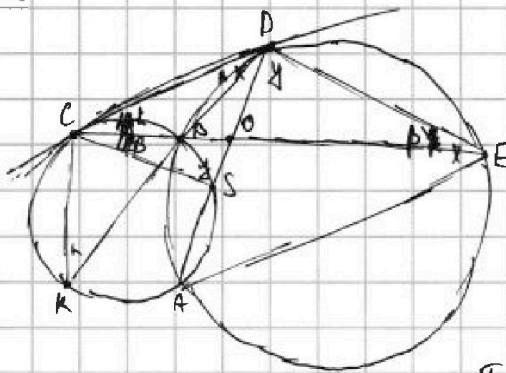


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

р.ч.



$$CE \perp AD = 0 \Rightarrow \frac{CO}{OE} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{EO}{CO} = \frac{\sin k}{\sin p}$$

$$\frac{\sin k}{OD} = \frac{\sin x}{CO}; \frac{OD}{\sin p} = \frac{OE}{\sin y} \text{ - по т. синусов}$$

где $\angle BOD = x$ и $\angle EOD = y$, перейдем к выражениям:

$$\frac{\sin k}{\sin p} = \frac{\sin x}{\sin y} \cdot \frac{OE}{CO} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sin y}$$

т.к. CD - общая касательная $\Rightarrow \angle DEA = x$; $\angle CAB = k$

По т. синусов где $\triangle CBD$: $\frac{\sin k}{\sin p} = \frac{BD}{BC}$. Пусть $BD \cap W_1 = K$.

Степень точки D отн. $W_1 = CD^2 = BD \cdot KD$; отн. $W_2 = CD^2 = CB \cdot CE \Rightarrow$

$$BD \cdot KD = CB \cdot CE \Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{CE}{KD}$$

$$OD \cdot OA = OB \cdot OE; OB \cdot OC = OS \cdot OA \Rightarrow \frac{OD}{OS} = \frac{OE}{OC} = \frac{5}{2} \Rightarrow CS \parallel DE \text{ (по степеням)}$$

т.к. отн. W_1 и W_2) $\Rightarrow \frac{DE}{CS} = \frac{5}{2}$; вертикальные углы равны.

$$\text{По т. синусов где } W_1: \frac{\sin k}{\sin p} = \frac{BC}{BS} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BC^2 = BS \cdot BD.$$

$$180 - \angle KCD = \angle CBK \text{ (касание)} = \angle DBE \text{ (верт.)} = 180 - \angle CDE \text{ (касание)} = \angle DCS -$$

параллельные хорды $\Rightarrow \angle DCS = 180 - \angle DCK \Rightarrow \angle CK = \angle CS \Rightarrow CK = CS$.

$$\begin{aligned} \angle CKD = k \Rightarrow \text{По т. синусов где } \triangle CKD: \frac{CD}{CK} &= \frac{\sin k}{\sin p} = \frac{CA}{CE} \cdot \frac{DE}{CB}; CK = CS = \\ &= \frac{2}{5} DE \Rightarrow CD^2 = \frac{2}{5} DE^2 \Rightarrow \left(\frac{CD}{DE}\right)^2 = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{DE}{CB} = \sqrt{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$



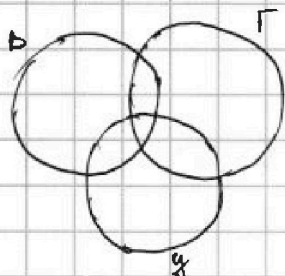
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.


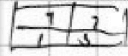


Будем использовать формулу включения и исключения.

B, G, Y - раскраски, симметричные относительно вертикальной ср. линии, гориз. ср. линии и центра соответственно.

Чтобы задать раскраску, симметричную относительно центра или B , нам достаточно задать 4 клетки в левой половине прямоугольника.


При этом по каждой такой расположить единичными образцами всевозможности опоклятальной раскраски, а у каждой окрестной раскраски свои

вершины половины (в ней ровно 4 закрашенных  , т.к. для B $1=2$; 1 для Y $4=2$; $2=1 \Rightarrow 4+2=2+3$).

Аналогично для G достаточно закрашивать верхнюю половину. Тогда каждой из больших кругов равен C_{20000}^4 .

Теперь рассмотрим пересечение кругов ровно по 2: для B и G это пересечение пусто, т.к. рисунок, симметричный относительно A и G обязательно $\in Y$.

Для Y и B , Y и G это пересечение также пусто, т.к. отражение относительно центра и вертикальной \Rightarrow отражение относительно горизонтальной. Изнач на

самом деле рисунок . Для того, чтобы задать

раскраску $\in B, Y, G$, нам достаточно задать 2 точки в любой из четвертей прямоугольника, а значит всего способов C_{10000}^2 . Тогда всего способов

$3 \cdot C_{20000}^4 - 2 \cdot C_{10000}^2$ по ФВУ.

Ответ: $3C_{20000}^4 - 2C_{10000}^2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6. \equiv_3 - сравнимо по модулю 3

$$a^2 + b = 710 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow b \equiv 2 - a^2$$

Тогда возможны 3 варианта: 1) $a \equiv 1 \Rightarrow b \equiv 1$; 2) $a \equiv 2 \Rightarrow b \equiv 1$; 3) $a \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 2$.

Но т.к. $b - a \equiv 3$, то первый вариант не возможен.

Если $c \equiv 2$, то $p^2 \equiv 2$, но p^2 даёт только остатки 1 и $0 \equiv_3$, а значит такое p не может быть.
2) $(2-c)(1-c) \equiv_3 p^2$. Если $c \equiv 1$, то $p^2 \equiv 0$, т.к. $c \equiv 1/2$; а значит $p = 3$.

$$\text{Тогда } (a-c)(b-c) = 9; a^2 + b = 710; a < b; a \equiv_3 2; b \equiv_3 1.$$

Все числа целые, при этом $a-c < b-c$; значит возможны варианты:

$$1) a-c = -9; b-c = -1 \quad 2) a-c = 1; b-c = 9 \Rightarrow \text{в обоих случаях } b = a + 8.$$

$$a^2 + a + 8 = 710 \Rightarrow a^2 + a - 702 = 0. D = 2809 = 53^2 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm 53}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 26 \\ a = -27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 34 \\ b = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 35 \\ c = 26 \\ c = -18 \\ c = -28 \end{cases} \Rightarrow \text{есть 4 тройки } (26; 34; 35); (26; 34; 25); (-27; -19; -18); (-27; -19; -28)$$

⊗

Ответ: $(26; 34; 35)$
 $(26; 34; 25)$
 $(-27; -19; -18)$
 $(-27; -19; -28)$

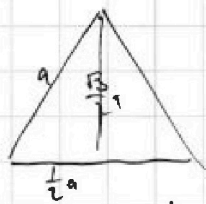
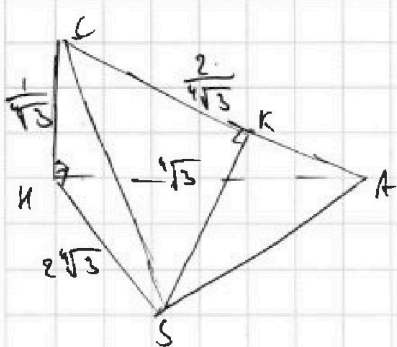
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Р/с Треуг. со стороной a и высотой $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \frac{a}{4} a^2 \Rightarrow$ если $S_{\triangle} = 1$, то $AB=AC=AH = \frac{2}{\sqrt{3}}$
 $\Rightarrow AC = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$CH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

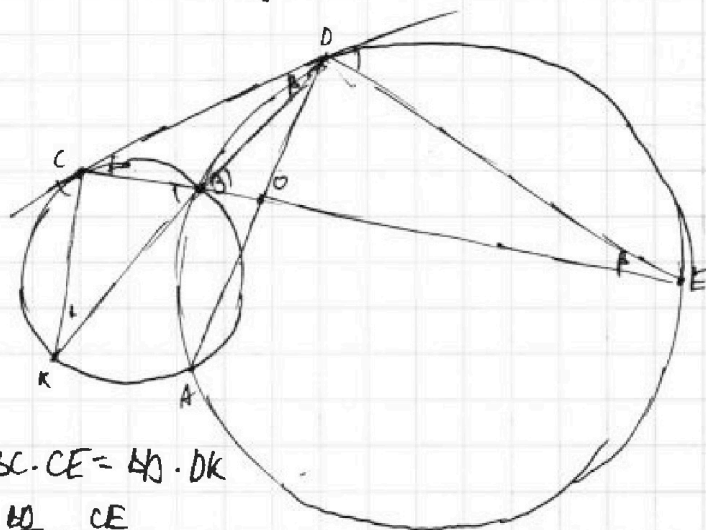
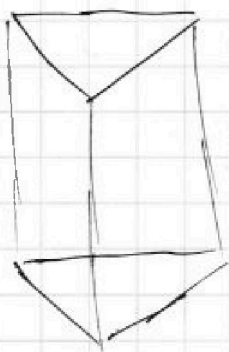
$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \sqrt{3}$$

Т.к. $S_{\triangle ABC} = 2 \Rightarrow \frac{SH \cdot AC}{2} = 2 \Rightarrow SH = \frac{4}{AC} = 2\sqrt{3}$

По т. Пифагора для $\triangle CHS$ $CS = \sqrt{\frac{1}{3} + 4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{13}{3}} \Rightarrow CS^2 = \frac{13}{3}$

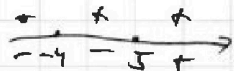
Проведем высоту SK на AC: $\frac{SK \cdot AC}{2} = S_{\triangle ABC} = 3 \Rightarrow SK = \frac{6}{AC} = 3\sqrt{3}$.

По т. Пифагора для $\triangle SCK$: $CK = \sqrt{\frac{13}{3} - 9\sqrt{3}} =$



$$BC \cdot CE = KO \cdot DK$$

$$|y+4| + 4|y-5| \leq 9$$



$$\frac{EO}{CO} = \frac{KO}{AC} = \frac{CE}{KO}$$

$$\frac{EO}{AC} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{CH}{\sin \alpha} = 2R_1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{CO}{\sin \alpha} = 2R_2$$

$$\sqrt{\frac{CK}{DE}} = \frac{DE}{CO}$$

$$\frac{CK}{DE} = \frac{DE^2}{CO^2}$$

$$CK \cdot CO^2 = DE^3$$

$$\frac{\frac{CK}{\sin \alpha}}{\frac{DE}{\sin \beta}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{CK}{DE} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

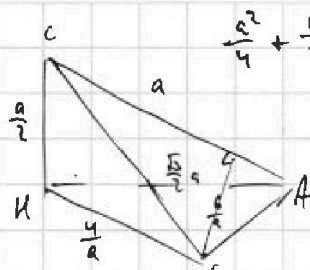
СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$

ОДЗ: $x \geq -5$; $x+4z \leq 1$; $\sqrt{x+5} + \sqrt{1-x-4z} \geq -4$; $y-4x-x^2+z \geq 0$; $|z| \leq 9$.



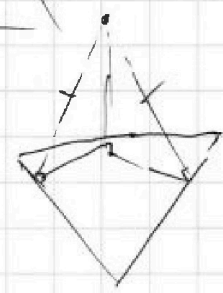
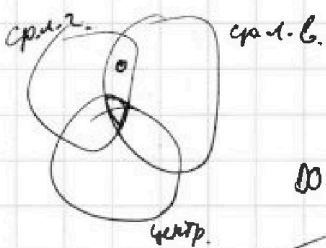
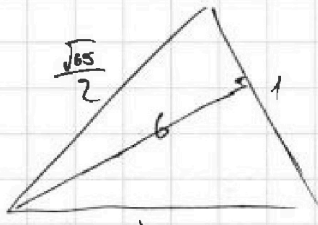
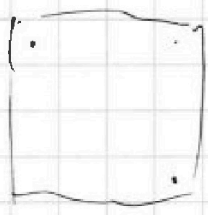
$$\frac{a^2}{4} + \frac{16}{a^2} \geq \frac{25}{a^2}$$

$$\frac{a^2}{4} \geq \frac{20}{a^2}$$

$$a^4 \geq 80$$

$$a \geq \sqrt[4]{80}$$

$\begin{matrix} \times 57 & \times 53 \\ 57 & 53 \\ \hline 399 & 159 \\ 185 & 265 \\ \hline 2809 \end{matrix}$



$OD \cdot DA = CD^2 = CO \cdot CE$ $\frac{DO}{CO} = \frac{CE}{DA}$

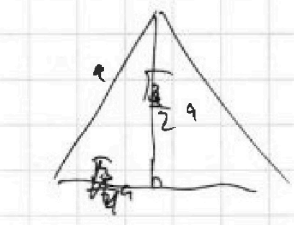
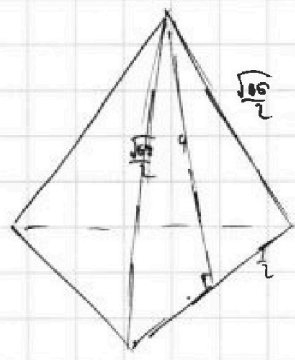
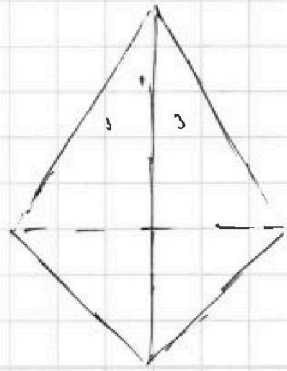
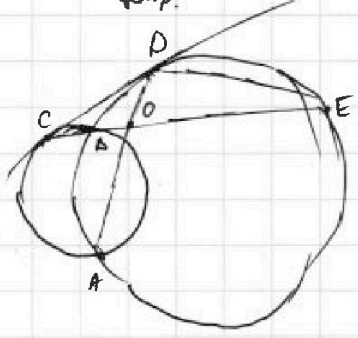
$CB \cdot CE = CD^2$

$\frac{CE}{CD} = \frac{DE}{DB} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{BD}{BC}$

$CD^2 = CB \cdot CE$

$p = 3a$

$16 + \frac{1}{4} = \frac{65}{4} = \frac{\sqrt{65}}{2}$



$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a^2}{2} = 1$

$a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$

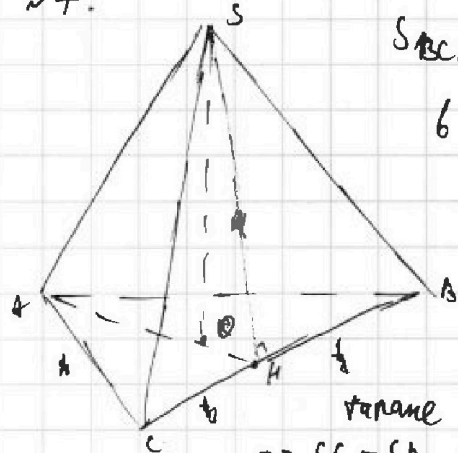


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

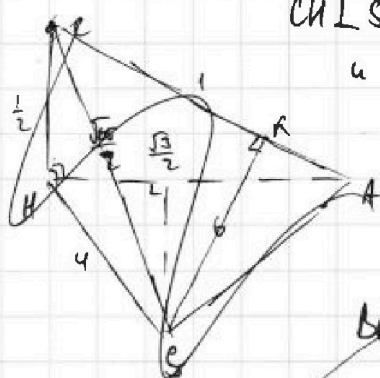
~7.



$S_{BCS} = 2$; $S_{ACS} = S_{ABS} = 3$. ~~Равносторонний~~ S лежит в плоскости $\perp (ABC)$ и проходящей через A , т.е.

$S_{SAC} = S_{SAB}$, т.е. S проектируется на плоскость $\triangle ABC$ на бис-су $\angle BAC$. т.е. AK - бис-су, то AK - медиана и высота. По т. О 3 перпендикуляра $CH \perp SH$; $CH \perp AH \Rightarrow CH \perp (ASH)$. Тогда уберём $\triangle BCS$ и повернём SH .

$\Rightarrow SC = SA$; $S_{SCH} = S_{SAH} = \frac{1}{2} S_{BCS} = 1$.



Т.е. $S_{BCS} = 2 \Rightarrow \frac{SH \cdot BC}{2} = 2 \Rightarrow SH = 4$

По т. Пифагора для $\triangle ASH$ $AH = \sqrt{1-16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Введём систему координат, где осью будет HA ;

прямая $\perp HA$ и HC и HC , центром в т. H . Тогда $H(0;0;0)$; $A(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0)$; $C(0;0;\frac{1}{2})$;

$S(x;y;0)$; при этом $x^2 + y^2 = 4$; $S_{ACS} = 3$.

Запишем площадь $\triangle ACS$ по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$SC = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{4}}$; $SA = \sqrt{(x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + y^2}$. Пусть $SA = t$.

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{65}{4} + 1}}{2} + \frac{\sqrt{1 + \frac{65}{4} - 1}}{2} + \frac{\sqrt{1 - \frac{65}{4} + 1}}{2} + \frac{\sqrt{1 - \frac{65}{4} - 1}}{2} = 3 \Rightarrow 48 = \sqrt{(\sqrt{65+2+2t})(\sqrt{65+2-2t})(\sqrt{65-2+2t})(\sqrt{65-2-2t})}$$

Проведём высоту SK на AC . $\frac{SK \cdot AC}{2} = S_{SAC} = 3 \Rightarrow SK = 6$

По т. Пифагора для $\triangle SKS$ $CS = \sqrt{\frac{65}{4} + 6} = \frac{\sqrt{65}}{4}$

По т. Пифагора для $\triangle CKS$: $CK = \sqrt{\frac{65}{4}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

