



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначив радиусы протрассии за d , составим уравнения:

$$\begin{cases} 3x+3+2d = (x^2+2x)^2 \\ 3x+3+6d = 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3+7d = (x^2+2x)^2 \\ x+1+7d = x^2 \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого:

$$2(x+1) = (x^2+2x)(x^2+3x)$$

$$2(x+1) = x(x+1)(x^2+3x)$$

1) $x = -1$ - корень

2) $x \neq -1$

$$2 = x^3+3x^2 \Rightarrow x^3+3x^2-2=0$$

$$(x+1)(x^2+2x-2)=0$$

$$x^2+2x-2=0$$

$$D_1 = 1+2=3$$

$$x_1 = -1+\sqrt{3}$$

$$x_2 = -1-\sqrt{3}$$

Учтем: $x_1 = -1 \Rightarrow a_3 = 0, a_5 = 1, a_9 = 3 \Rightarrow d = 0,5$

$x_2 = -1+\sqrt{3} \Rightarrow a_3 = 3\sqrt{3}, a_5 = 4, a_9 = 12-6\sqrt{3}, d = 2-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$x_3 = -1-\sqrt{3} \Rightarrow a_3 = -3\sqrt{3}, a_5 = 4, a_9 = 16+6\sqrt{3}, d = 2+\frac{3}{2}\sqrt{3}$

Ответ: $-1; -1 \pm \sqrt{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ x-3y \geq -3 \\ 3x-y \leq 1 \\ 3x-y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3y+3 \\ x \geq 3y-3 \\ x \leq \frac{y+1}{3} \\ x \geq \frac{y-1}{3} \end{cases}$$
$$1) 3y+3 > \frac{y+1}{3} \Rightarrow 9y+9 > y+1 \Rightarrow 8y > -8 \Rightarrow y > -1$$
$$\frac{y+1}{3} \geq 3y-3 \Rightarrow y+1 \geq 9y-9 \Rightarrow 10 \geq 8y \Rightarrow y \leq \frac{10}{8}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Заметим, что числа mn и $m+n-9$ имеют разную четность $\Rightarrow A \equiv 2$

Но если ни p , ни $q \neq 2$, то и $13p^2$, и $45q^2$ - чет. число.

Противоречие \Rightarrow одно из чисел p, q равно 2.

1) $p=2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 13 \cdot 4$

$m+n = t, t > 0$, и.к. $m, n \in \mathbb{N}$

$$t^2 - 9t - 52 = 0$$

$$t_1 = 13 \Rightarrow m+n = 13$$

$$t_2 = -4 \text{ - не уг. условие}$$

$$m+n = 13$$

$$B = mn \cdot 10 \text{ и } B = 45q^2$$

$$10mn = 45q^2$$

$$2mn = 9q^2 \Rightarrow q = 2 \dots$$

$\div 2$

$$\begin{cases} mn = 30 \\ m+n = 13 \end{cases} \rightarrow \text{корни уравнения } x^2 - 13x + 30 = 0$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 3$$

$$m = 10 \text{ или } n = 3$$

$$n = 3 \text{ или } m = 10$$

2) $q=2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 45 \cdot 4$

$m+n = t, t > 0$:

$$t^2 - 9t - 180 = 0$$

$$D = 81 + 720 = 801 \rightarrow \div 3 \Rightarrow \sqrt{D} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{D}}{2} \notin \mathbb{N}$$

Нет решений.

Ответ: (3; 10), (10; 3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AC=18, AZ=6, YZ=8.$$

$AX \parallel YZ \Rightarrow \angle CAZ = \angle CYZ$ как соответственные
 $\angle YZA = \angle BAX$ как накрест лежащие.

AX - биссектриса $\Rightarrow \angle CAZ = \angle BAZ \Rightarrow \angle CYZ = \angle YZA$

$\triangle AYZ$ - равнобедренный $\Rightarrow AY = AZ = YZ = 6$

$$YC = 6 + 18 = 24$$

$\triangle CAZ \sim \triangle CYZ$ ($\angle CAZ = \angle CYZ$, $\angle C$ общий) $\Rightarrow \frac{YC}{XC} = \frac{YZ}{AC} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

$$YC = 4t \Rightarrow XC = 3t \Rightarrow AX = t$$

$$MB = 4t$$

$BX = 5t, XC = 3t \Rightarrow$ по св. биссектрисы $\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{XC} = \frac{5}{3}$

$$AB = 30$$

Треуголь $\angle BAC = \alpha$, тогда:

по косинусов для $\triangle ABC$: $BC^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \cos \alpha$

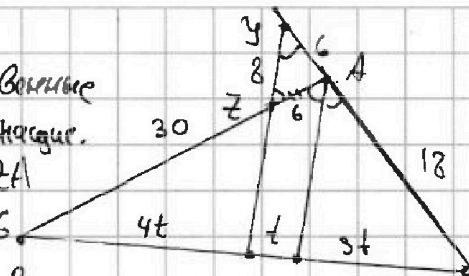
для $\triangle YZ$: $64 = 36^2 + 36^2 + 2 \cdot 36 \cdot \cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{-8}{72} = \frac{-1}{9}$$

$$BC^2 = 900 + 324 + 120 = 1344$$

$$BC = \sqrt{16 \cdot 84} = 4 \sqrt{84} = 8 \sqrt{21}$$

Ответ: $8\sqrt{21}$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение:

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

Заметим, что функция $f(a) = a^4 + 5a^2 + \sqrt{a}$ возрастает, т.к.

при $a > 0$ $a^4 \uparrow$, $5a^2 \uparrow$, $\sqrt{a} \uparrow \Rightarrow$ каждое своё значение она принимает при единственном значении аргумента.

Следовательно, $x = y$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

Пусть $a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt{6-x}$, $a, b > 0$, тогда:

$$\begin{cases} a+b+5 = 2ab \\ a^2+b^2 = 7 \end{cases}$$

$$a+b+5 = (a+b)^2 - 7$$

$$(a+b)^2 - (a+b) - 12 = 0 \text{ - корни } 4 \text{ и } -3$$

• $a+b = -3$ - не удов. условию $a > 0$ и $b > 0$

$$\begin{cases} a+b = 4 \\ 2ab = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 4 \\ ab = \frac{9}{2} \end{cases} \text{ корни уравнения } t^2 - 4t + \frac{9}{2} = 0$$

$$D_1 = 4 - \frac{9}{2} = -0,5 < 0$$

Нет корней!

Решений нет!

Ответ: \emptyset

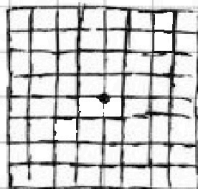


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что из любой конфигурации можно получить ещё 3 поворота на 90° , 180° , 270° , если эта конфигурация не является симметричной относительно центра квадрата. Всего на доске 81 узел. Для каждой точки доске 180° симметрии

разделим ответ на 2. Существует 80 симметричных конфигураций, при этом поворотом каждой на 90° можно получить другие 3 без учёта поворотов на доске 80 симметричных конфигураций (80 способов поставить первую белую точку, 1 способ поставить ей симметричную). Всего без учёта поворотов на доске $81 \cdot 80$ конфигураций. Итого есть $81 \cdot 80 - 80$ несимметричных и 80^2 симметричных комбинаций без учёта поворотов. С их учётом кол-во первых учитывается в 4 раза, кол-во вторых - в 2 (поворот на 180° переводит симметричную конфигурацию в точку симметричную)

Всего способов почески $\frac{1}{4} \left(\frac{81 \cdot 80}{2} - \frac{80}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{80}{2} = \frac{80 \cdot 80}{8} + \frac{80}{4} = 800 + 20 = 820$

Ответ: 820



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) N лежит на окружности с диаметром AC $\Rightarrow \angle ANM = 90^\circ$

$AN \perp AC$

2) $PQ \parallel$ высоте, опущенной из $B \Rightarrow PQ \perp AC$

PQ касается ω, Ω - линии центров ω и Ω ,
т.к. является общей хордой $\Rightarrow AC \parallel O_1O_2$

O_1 - середина CL $X = O_1O_2 \cap MN$

O_2 - середина AM $Y = O_1O_2 \cap AB$

Рассмотрим $\triangle ANM$. XO_2 проходит через O_2 и $\parallel AN$

XO_2 - средняя линия?

Рассмотрим $\triangle ACL$. $O_1Y \parallel AC$ X - середина MN

O_1Y проходит через O_1

O_1Y - средняя линия

Y - середина AC

Рассмотрим $\triangle AMN$. O_2Z - средняя линия $\Rightarrow MN \parallel O_2Z$

Но $O_2Z \parallel AC \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow MN$ - средняя линия $\triangle ABC$

N - середина AB

3) Обозначим $AC=BC$ за $x \Rightarrow CN=x-8$.

$AC \perp CB$ (CL - биссектриса и медиана)

Проведем BE - высоту $AN \parallel BE$, AN проходит через M

AN - средняя линия $\triangle BCE$.

$ME = x-8 \Rightarrow CE = 2x-16$

Теорема Пифагора для $\triangle CBE$ и $\triangle ANE$. $NE = 16-x$

$$\begin{cases} x^2 = 4x^2 + 256 - 64x + BE^2 \\ 100 = 256 + x^2 - 32x + BE^2 \end{cases}$$

Вычитаем:

$$x^2 - 100 = 3x^2 - 32x$$

$$2x^2 - 32x + 100 = 0$$

$$x^2 - 16x + 50 = 0$$

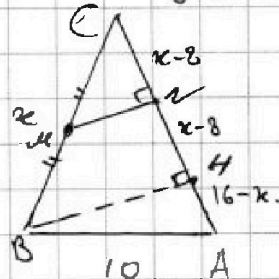
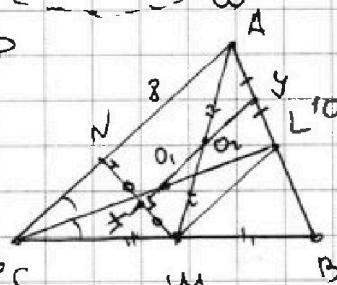
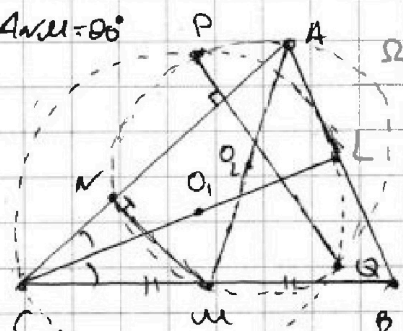
$$D_1 = 64 - 50 = 14$$

$x_1 = 8 - \sqrt{14} < 8 \Rightarrow AC < AN$ - не уг. условие ($N \in$ отрезку AC)

$$x_2 = 8 + \sqrt{14}$$

Итого $AC = BC = 8 + \sqrt{14}$

Ответ: $8 + \sqrt{14}$



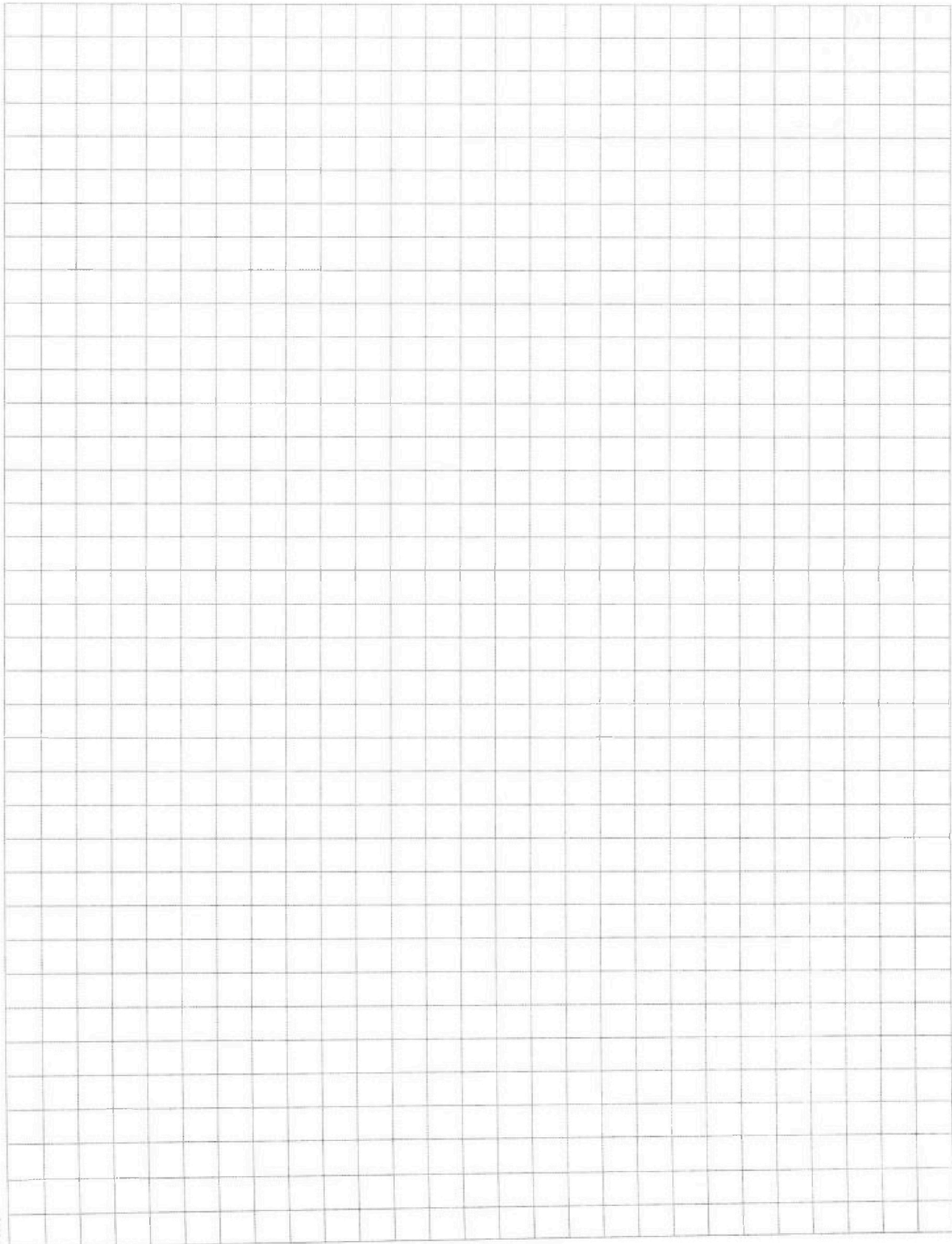


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

②
$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x-3y)^2 &\leq 9 \\ (3x-y)^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 9y^2 - 6xy &\leq 9 \\ 9x^2 + y^2 - 6xy &\leq 1 \end{aligned}$$

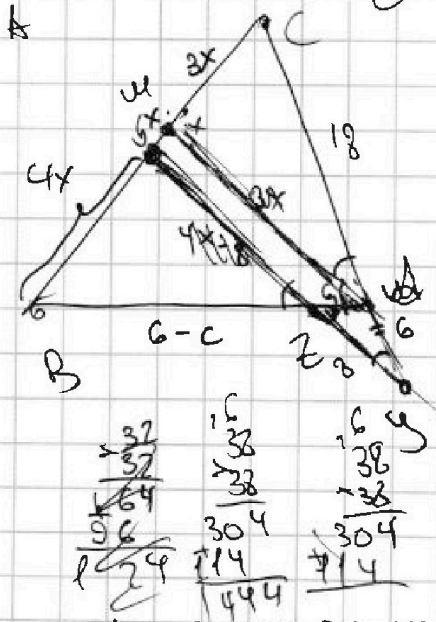
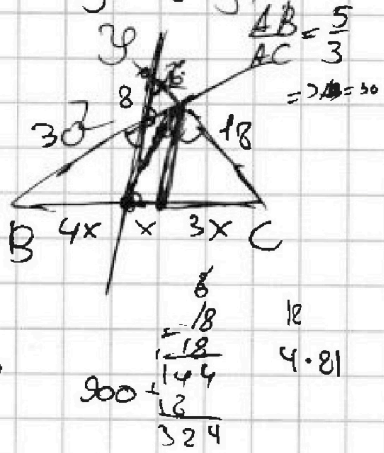
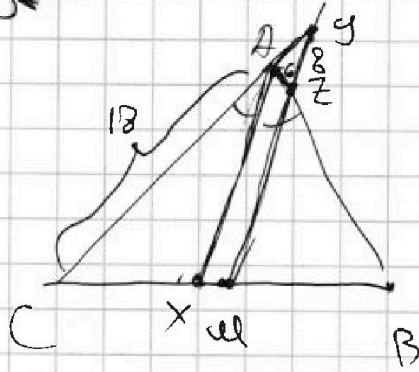
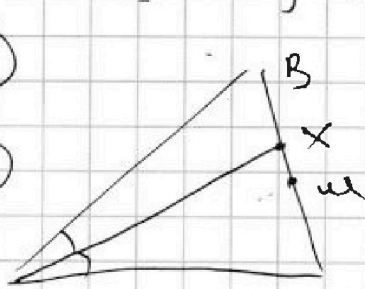
$$\begin{aligned} x^2 - 6xy + 9y^2 + 9x^2 + y^2 - 6xy &\leq 10 \\ 5x^2 + 5y^2 - 6xy &\leq 5 \end{aligned}$$

$$x(x-6y) \leq 9(1-y^2)$$

$$3x(3x-2y) \leq (1-y^2)$$

③

④



$$\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3} \Rightarrow AB = 30$$

$$BC^2 = 30^2 + 18^2 - 2 \cdot 30 \cdot 18 \cdot \cos 2$$

$$64 = 36 + 36 + 2 \cdot 36 \cdot \cos 2$$

$$BC^2 = 1224 - 1080 \cos 2$$

$$\cos 2 = -\frac{8}{72} = -\frac{1}{9}$$

$$BC^2 = 1224 + \frac{1080}{9} = 1224 + 120 = 1344$$

$$BC = \sqrt{1344} = 36.926$$

⑤

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 2m - 2n$$

$$B = m^2n + nm^2 - 3mn$$

$$A = (m+n)^2 - 2(m+n) = (m+n)(m+n-2)$$

$$B = mn(m+n) - 3mn = mn(m+n-3)$$

$$B = 13p^2 = 13 \cdot p \cdot p = 13 \cdot 1 \cdot p^2$$

$$A = (p+1)(4+p) = 75p^2$$

верно!

$m, n, m+n-2$ взаимно простые \Rightarrow $p=1$

$$\begin{aligned} 13 &= 13p^2 \\ 75 &= 75p^2 \\ 13p^2 &= 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot p^2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_3 = 3x + 3$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$(x^2 + 2x)^2 = 3x + 3 + 2d \Rightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 3x + 3 + 2d$$

$$3x^2 = (x^2 + 2x)^2 + 4d \Rightarrow 3x^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4d$$

$$0 = x^4 + 4x^3 + x^2 + 4d$$

$$0 = x^2$$

$$3x + 3 + 6d = 3x^2$$

$$3x^2 - 3x - 3 - 6d = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + x^2 + 4d = 0$$

$$3x^2 \sqrt{3x+3} \quad +2=46+\frac{9}{2}$$

$$x^2 \quad x+1$$

Возрастаем?

$$x^2 \rightarrow x+1$$

$$3x^2 > 4x^3 + 4x^2 + 4x^2 \Rightarrow 0 > x^4 + 4x^2 + x^2 = (x^2 + x)^2 - 2x^3 =$$

$$= (x(x+1))^2 - 2x^3$$

$$3x + 3 + 2d = (x^2 + 2x)^2$$

$$3x + 3 + 6d = 3x^2 \Rightarrow x + 1 + 2d = x^2$$

$$2x + 2 = (x^2 + x)(x^2 + 3x)$$

$$2(x+1) = x^2(x+1)(x+3)$$

$$x = -1$$

$$2 = x^2(x+3) \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

-1 - корень.

$$\textcircled{-1} \quad a_3 = 0$$

$$a_5 = 1$$

$$a_9 = 3$$

$$\sqrt{3} - 1$$

$$a_3 = 3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2)^2 = 4$$

$$a_9 = 3(4 - 2\sqrt{3}) = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$(x+1)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x = -1 + \sqrt{3}$$

$$x = -1 - \sqrt{3}$$

$$d = 2 + 5\sqrt{3}$$

$$a_3 = -3\sqrt{3}$$

$$a_5 = (4 + 2\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3})^2 = 4$$

$$a_9 = 2 \cdot 3(4 + 2\sqrt{3}) = 12 + 12\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 0x - 2 \quad | \quad x+1 \\ \underline{-(x^3 + x^2)} \\ 2x^2 - 0x - 2 \\ \underline{-(2x^2 + 2x)} \\ -2x - 2 \\ \underline{-(-2x - 2)} \\ 0 \end{array}$$

$$2x^2 - 0x - 2$$

$$2x^2$$

2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$x^4 + 5x^2 - \sqrt{6-x} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{6-x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{x}$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{6-x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{x}, \quad a > 0$$

$$a^4 \uparrow, a^2 \uparrow, \sqrt{a} \uparrow \Rightarrow f(a) \uparrow \Rightarrow x=y$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2} \quad x^2 - 5x - 6 = 0 \quad +6$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x-6)(-1-x)}$$

$$\sqrt{(x+1)} + \sqrt{(6-x)} + 5 = 2\sqrt{(6-x)(x+1)}$$

$$\begin{cases} a+b+5 = 2ab \\ a^2+b^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow (ab)^2 - 2ab = 7 \quad a$$

$$(ab) + 5 = (a+b)^2 - 4ab \quad t = a+b$$

$$t^2 - 7t - 15 = 0$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+216}}{2} = \frac{1 + \sqrt{217}}{2} \Rightarrow a+b = \frac{1 + \sqrt{217}}{2}$$

$$1) a^2 + b^2 - 2ab = 7$$

$$7 - 2ab = \frac{218 + 2\sqrt{217}}{4} \Rightarrow 2ab = \frac{190 + 2\sqrt{217}}{4}$$

$$\begin{cases} a+b+5 = 2ab \\ (a+b)^2 - 2ab = 7 \end{cases} \Rightarrow ab = \frac{95 + \sqrt{217}}{4}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 12 = 0$$

$$\frac{1}{2} = 4$$

$$\frac{1}{2} = 3$$

$$a+b=4$$

$$a+b+5=2ab$$

$$a+b = -3, \text{ но } a+b > 0!!!$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{6-x} = -3$$

$$\omega^2 - 9\omega + \frac{9}{2} = 0$$

Нет решений???



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

• $p=2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) \neq 13 \cdot 4 \rightarrow (13 \cdot 2) \cdot 2$
 $(13 \cdot 4) \cdot 1$
 $(13 \cdot 2) \cdot 2$
 $(13 \cdot 4) \cdot 1$
 $(13 \cdot 2) \cdot 2$
 $(13 \cdot 4) \cdot 1$

$B = 10 \text{ mm} = 75 \text{ cm}^2$

$2mh = 75 \text{ cm}^2 \Rightarrow (q \geq 2) \Rightarrow ?mh = 60$
 $mh = 30$

$m+n=13$
 $mh=30$

$x^2 - 13x + 30 = 0$

$D = 169 - 120 = 49$
 $m=3 \quad n=10$
 $n=10 \quad m=3$

$a^2 - 9a - 92$

• $q \geq 2 \Rightarrow (m+n)(m+n-9) = 75 \cdot 4 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4$

$13 \cdot 4 = 52$

$a^2 - 9a = 300$

$a^2 - 9a - 300 = 0$

$D = 81 + 1200 = 1281$

не еваграс!!!
 - ура

$1281 = 36 \cdot 35.58$

$\frac{10}{13}$
 $\frac{13}{10}$
 $\frac{10}{13}$
 $\frac{13}{10}$

Всё!

$4y + 8x$

② $\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 \leq 9 \\ 9x^2 + y^2 - 6xy \leq 1 \end{cases}$

$5x^2 + 5y^2 - 6xy \leq 5$

$(x-3y)^2 (3x-y)^2 \leq 4$

$((x-3y)(3x-y) - 2)((x-3y)(3x-y) + 2) \leq 0$

$(3x^2 + 3y^2 - 10xy - 2)(3x^2 + 3y^2 - 10xy + 2) \leq 0$

$3x^2 + 3y^2 - 10xy - 2 \leq 0 \quad (a-2)(a+2) \leq 0$

$-2 \leq 3x^2 + 3y^2 - 10xy \leq 2$

$-2 \leq 3x^2 + 3y^2 - 10xy \Rightarrow 2 \geq -3x^2 - 3y^2 + 10xy$

Суммируем:

$2x^2 + 7y^2 + 4xy \leq 7$

$(x+y)^2 \leq \frac{7}{2}$

$4y + 8x =$

$8x^2 + 8y^2 - 16xy \leq 7$

$(2x-2y)^2$

$(x-y)^2 \leq \frac{7}{8}$

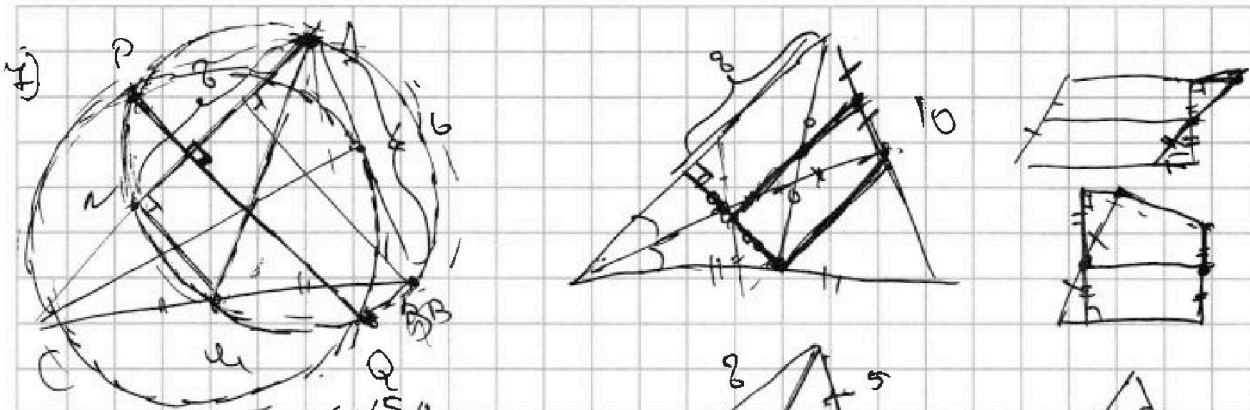


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

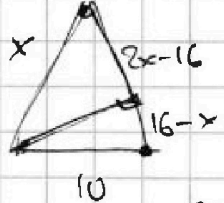
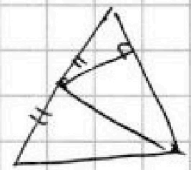
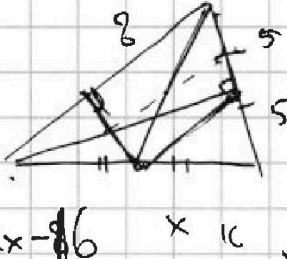
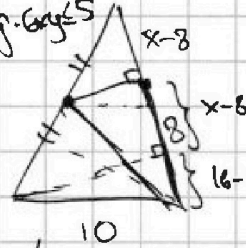
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$



$$(x-3y)(3x-y) = 3 \Rightarrow (x-3y)^2 - 6xy + 3x^2 = 3$$

$$(3x-y)(x-3y) = 1 \Rightarrow 3x^2 - 10xy + 3y^2 = 1$$

$$-3 \leq 3x^2 + 3y^2 - 10xy \leq 3 \Rightarrow -100 = 3x^2 - 32x$$

$$3x^2 - 32x + 100 = 0 \Rightarrow x^2 - 16x + 50 = 0$$

$$D = 64 - 50 = 14$$

$$x = 8 - \sqrt{14} \quad x = 8 + \sqrt{14}$$

$$\begin{aligned} x \geq 3y &\Rightarrow x-3y \leq 3 \\ 3x-y &\leq 1 \\ x \leq y &\Rightarrow x-y \leq 0 \\ x &\leq y+1 \Rightarrow 3y \leq y+1 \Rightarrow y \leq 0,5 \\ x &\leq 1,5 \end{aligned}$$

$$3y \leq x \leq y+1$$

$$\begin{aligned} 3y - x &\leq 3 \\ 3x - y &\leq 1 \\ x + y &\leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0y \leq y+1 &\Rightarrow y \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 3y &\Rightarrow x \geq \frac{3}{2} - 3 \\ \Rightarrow x &\geq \frac{y+1}{3} \\ x &\leq \frac{2-y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 0,5 \\ x &= 1,5 \\ 4y+8x &= 0,5+3=3,5 \\ -2 &\leq x+y \leq 2 \\ x &= \frac{3}{8} \\ y &= \frac{1}{8} \\ -1 &\leq x-y \leq 1 \\ -3 &\leq 2x \leq 3 \\ -1,5 &\leq x \leq 1,5 \end{aligned}$$

$$-2x \leq y \leq 2x$$

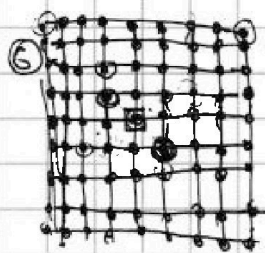
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

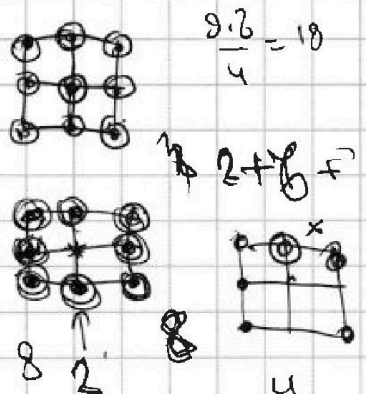
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{81 \cdot 80 - 80}{4} + \frac{80}{2} = \frac{80 \cdot 80 - 80}{4} + \frac{80}{2}$$

$$\frac{81 \cdot 80 - 80}{4} + \frac{80}{2} = \frac{80 \cdot 80 - 80}{4} + \frac{80}{2}$$

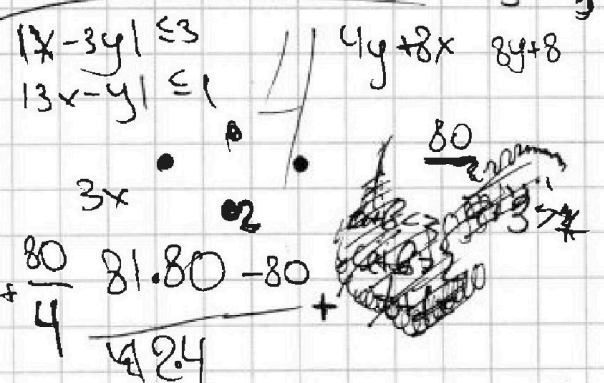
$$\frac{81 \cdot 80 - 80}{4} + \frac{80}{2} = \frac{80 \cdot 80 - 80}{4} + \frac{80}{2}$$



$$\frac{9 \cdot 9 - 9}{4} = 18$$

$$\frac{8 \cdot 8}{4} + \frac{8}{2} = \frac{70}{2} = 10$$

$$\frac{8 \cdot 8}{4} + \frac{8}{2} = \frac{70}{2} = 10$$



$$|x - 3y| \leq 3$$

$$|3x - y| \leq 1$$

$$\begin{cases} -3 \leq x - 3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq x - 3y \\ x - 3y \leq 3 \\ -1 \leq 3x - y \\ 3x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3y + 3 \\ x \leq 3y - 3 \\ x \geq y + 1 \\ x \leq y - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x - y \leq 1 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\frac{8 \cdot 8}{4} + \frac{8}{2} = 10$$

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \\ (x - 3y)^2 \leq 9 \\ (3x - y)^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$(3x^2 + 3y^2 - 10xy - 3)(3x^2 + 3y^2 - 10xy + 3) \leq 9$$

$$(x^2 + 5y^2 - 6xy) \leq 9$$

$$(x - y)^2 \leq 1$$

$$(x + y)^2 \leq 4$$