



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть b - коэффициент нашей геометрической прогрессии,
 a_n - n -ый член этой прогрессии ($a_{n+1} = a_n b$). Тогда

$$a_{13} = a_7 \cdot b^6 \quad \text{и} \quad a_{15} = a_{13} b^2, \quad \text{или:}$$

$$b^6 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 5-x$$

$$(5-x)b^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

В случае если $x = \frac{35}{13}$, то

$$a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = 0 \quad \text{это быть}$$

в геог. прогрессии не может $\Rightarrow x \neq \frac{35}{13}$

Запишем ОДЗ:

$$\frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0 \quad (x+1 \neq 0; x \neq -1) \quad \text{и} \quad (13x-35)(x+1) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{35}{13}; +\infty\right)$$

Из второго равенства заметим, что справа корень ≥ 0 , слева $b^2 \geq 0$, значит $5-x \geq 0$, т.е. $x \leq 5$ (в геог. прогрессии $b \neq 0; 1$). Итого:

ОДЗ:

$$x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{35}{13}; 5\right)$$

должно быть равно 0, но $5-x = 5 - \frac{35}{13} = \frac{30}{13} \neq 0$. противоре-

чие. Также очевидно что $b \neq 0$, т.к. $a_{13} = 0$ только при

$x = 5$, а $a_7 = 0$ только при $x = \frac{35}{13}$, т.е. одновременно ну-

лями они быть не могут, а при $b = 0$ все члены

равны 0. противоречие. Значит, все члены прогрессии $\neq 0$

Тогда из I равенства т.к. $a_{15} \in a_7 \Rightarrow a_{15} = a_7 \cdot b^8$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot b^8 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$b^8 = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2 \quad (x \neq \frac{35}{13})$$

Тогда при $x \neq -1$;

$$b^2 = \sqrt{x+1}$$

Из I равенства:

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(x+1)^3} = 15-x$$

$$13x-35 = x^2+25-10x$$

$$x^2-23x+60=0$$

$$(x-20)(x-3)=0$$

$$x-20=0 \text{ или } x-3=0$$

$$x=20 \text{ не подходит по ОДЗ} \quad x=3 \quad (3 = \frac{39}{13} > \frac{35}{13})$$

Во II равенстве во обоих случаях:

подставим $\sqrt{13x-35} \cdot b^6$, получим

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot (x+1)^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$\sqrt{(13x-35)/(x+1)} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} \text{ - очевидно правда при } x \in \text{ОДЗ.}$$

Ответ: $x=3$; $x=-5$

$x \neq -1$

$$b^2 = \sqrt{-x-1}$$

Из I равенства

$$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{-(x+1)^3} = 5-x$$

$$35-13x = x^2+25-10x$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$(x+5)(x-2)=0$$

$$x+5=0 \text{ или } x-2=0$$

$$x=-5$$

$x=2 \rightarrow$ не подходит по условию



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

По формуле косинуса суммы:

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x = \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x)$$

Из основного тригонометрического тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ получаем, что } -3 \sin^2 x = 3 \cos^2 x - 3. \text{ И.е.}$$

$$\cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) = \cos x (4 \cos^2 x - 3) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Также по формуле косинуса двойного угла

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \text{ Тогда}$$

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 6 \cos x =$$

(Вместо $-3 \sin^2 x$ подставим $3 \cos^2 x - 3$. Тогда:)

$$= 4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что по центральной симметрии если мы закрасим 1 клетку в верхней половине, то одновременно закрасиваем соответствующую в нижней, и никакие 2 клетки в одной половине не поместятся. Не центрально-симметричны оба в верхней или обе в нижней). Аналогично для горизонтальной (горизонтальная сред. линия не поместится) симметрии. Для вертикальной возьмём левую и правую половины и получаем так же. Таким образом, для каждой из этих симметрий достаточно в одной из половин (в др. центр. и гориз. - верхняя, для верт. - левая) выбрать любые 4 точки, а другие 4 точки в другой половине определятся однозначно. Таким образом, суммарное кол-во способов выбрать закрасить 8 клеток в сумме для трёх симметрий равно $3 \cdot C_{250 \cdot 200}^4 = 3 \cdot C_{25000}^4$.

Но заметим, что мы лишние разы посчитали те случаи, когда выполняются одновременно 2 или 3 симметрии. Также заметим, что



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

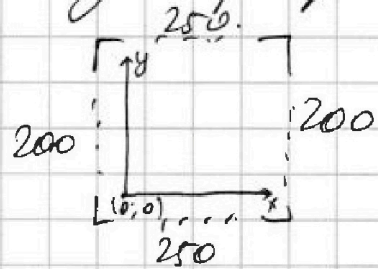
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

центр. + верт. = центр. + гор. = верт. + гор. (симметрия)

Для доказательства возьмем точку с координатами (x, y) , координат. плоскость ^{центра} ^{ребра} ¹⁰⁰ ^{клетки} ¹⁰⁰ ^{лево} ^{ниж-} ^{нее} ^{угол} ^{для} ^{прямог.} ^{по} ^{его} ^{сторонам}. Тогда ^{прямог.}

□ повернем в такое положение

Тогда:



1) По верт. симметрии образует

закрашивается точка $(250-x-1, y)$ $(250-x-1, y)$. По

центр. сим. для каждой из этих двух точек: $(x, 200-y-1)$ $(x, 200-y-1)$ и $(250-x-1, 200-y-1)$ (для (x, y)).

2) По гор. получаем точку $(x, 200-y-1)$. По центр. получаем $(250-x-1, 200-y-1)$ и $(250-x-1, y)$ соответственно.

3) По верт. получаем $(250-x-1, y)$, по гор.:

$(250-x-1, 200-y-1)$ и $(250-x-1, 200-y-1)$ соответственно.

Получаем, что если мы применили 2 симметрии, то третья тоже работает. Тогда в 3 симметрии (3. (25000)) мы трижды посчитали пересечение



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

симметрии, т.е. во надо вычесть флажды.

Заметим, что, применяя 2 симметрии, из одной точки мы однозначно получаем 3 ковы, причем каждая из них попадает в разрыв четвертинок прямоугольника (если его поделить двумя средними линиями). Т.е. чтобы найти все варианты закрасок в клетках для 2 (автоматически для трёх) симметрий, надо найти кол-во вариантов выбрать 2 клетки в одной из четвертинок, которые определят остальные 6 клеток. Это равно $C_{100-125}^2$. Т.е. мы вычитаем флажды, так итоговый ответ:

$$3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$$

$$\text{Ответ: } \frac{3 \cdot 25000!}{24996! \cdot 4!} - \frac{2 \cdot 12500!}{12498! \cdot 2!}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3 \cdot 25000!}{24996! \cdot 4!} - 12500 \cdot 12499$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим III условие с учетом, что $p \neq 2$:

$(a-c)(b-c) = p^2$, где p - некое простое число, т.к.

у p только 2 делителя 1 и p , то рассмотрим все варианты:

$\times 1) a-c=1 \quad b-c=p^2$

$\checkmark 2) a-c=p^2; b-c=1$

$a=c+1 \quad \cancel{b=c+p^2}$

$a=c+p^2 \quad \cancel{b=c+1}$

$\checkmark 3) a-c=-1 \quad b-c=-p^2$

$\times 4) a-c=-p^2 \quad b-c=-1$

$a=c-1 \quad b=c-p^2$

$a=c-p^2 \quad b=c-1$

$\times 5) a-c=b-c=p$

$\times 6) a-c=b-c=-p$

$a=b=c+p$

$a=b=c-p$

I и IV случаи не подходят под условие $a > b$, так же и V и VI случаи (в них $a=b$)

Тогда остаются 2 случая:

1) $a=c+p^2 \quad b=c+1$

2) $a=c-1 \quad b=c-p^2$

Из II условия: $a-b = p^2 - 1 \not\equiv 3$ $a-b = p^2 - 1 \not\equiv 3$

$(p-1)(p+1) \not\equiv 3$

Заметим, что $(p-1)(p+1) \not\equiv 3$ всегда кроме случаев, когда $p \equiv 3$. А так как p простое, то $p=3$. Тогда $\frac{1}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Посмотрим на IV условие:

$$1) c + p^2 + c^2 + 2c + 1 = 560$$

$$1) (c + 9) + (c^2 + 2c + 1) = 560$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0$$

По теор. Виета

$$c_1 = -25 \quad c_2 = 22$$

Восстановим значения a и b :

$$a_1 = -25 + 9$$

$$b_1 = (-25 + 2c + 1) - 25 + 1$$

$$a_1 = -16$$

$$b_1 = -24$$

$$a_2 = 22 + 9$$

$$b_2 = 22 + 1$$

$$a_2 = 31$$

$$b_2 = 23$$

$$2) (c - 1) + (c^2 - 18c + 81) = 560$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0$$

По теор. Виета

$$c_3 = 32 \quad c_4 = -15$$

$$a_3 = 32 - 1$$

$$b_3 = 32 - 9$$

$$a_3 = 31$$

$$b_3 = 23$$

$$a_4 = -15 - 1$$

$$b_4 = -15 - 9$$

$$a_4 = -16$$

$$b_4 = -24$$

Ответ: $(-16; -24; -25); (31; 23; 22); (31; 23; 32); (-16;$

$-24; -15)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б. Коэф. разл. пр. $a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$; $a_3 = 5-x$; $a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = \frac{5-x}{b^6}$

$(5-x)b^2 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot b^8 = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$b^8 = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$ при $x \neq \frac{35}{13}$

$b^2 = \sqrt{x+1}$; $b^6 = \sqrt{(x+1)^3}$

$\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \cdot \sqrt{(x+1)^3} = 5-x$

$\sqrt{13x-35} = 5-x$

$13x-35 = x^2+25-10x$

$x^2-23x+60=0$

20 и 3
 x

~~$\cos(x+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$~~

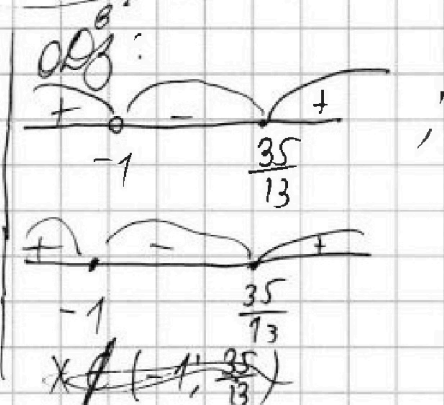
$\cos 3x = \cos^2 2x - \sin^2 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \cos x =$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x$

$\cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 6 \cos x$

$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^2 x + 3 \cos^2 x - 3 + 6 \cos x = P$

$4 \cos^3 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = P$



$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
 $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$

$15-x \geq 0$; $x \leq 5$

$(5-x)\sqrt{(x+1)} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$
 $5-x = \sqrt{13x-35}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

(978)

$$\text{X) } a-c=1 \quad b-c=p^2$$

$$\text{②) } a-c=p^2 \quad b-c=1$$

$$a=c+1 \quad b=c+p^2$$

$$a=c+p^2 \quad b=c+1$$

$$\text{③) } a-c=-1 \quad b-c=-p^2$$

$$\text{X) } a-c=-p^2 \quad b-c=-1$$

$$a=c-1 \quad b=c-p^2$$

$$a=c-p^2 \quad b=c-1$$

$$\text{X) } a-c=b-c=\pm p$$

$$a-b=p^2-1 \neq 3$$

$$a=b$$

$$1) a=c+p^2 \quad b=c+1$$

$$2) a=c-1 \quad b=c-p^2 \quad c=9$$

$$a-b=p^2-1 \neq 3 \quad 550 = 11 \cdot 50$$

$$a-b=p^2-1 \neq 3$$

$$p=3$$

$$22 \cdot 25$$

$$p=3$$

$$c+9 + c^2+2c+1 = 560$$

$$\times 25$$

$$c+1 + c^2+p^4 - 2cp^2 = 560$$

$$c^2+3c-550=0$$

$$\sqrt{50}$$

$$c-1 + c^2+81 - 18c = 560$$

$$\rightarrow 25 \quad 22$$

$$550$$

$$c^2-17c-480=0$$

$$\times 480 = 4810$$

$$c = \frac{17 \pm \sqrt{289+1920}}{2} = \frac{17+47}{2}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{47} \\ 47 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 329 \\ 108 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 77 \\ 47 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 1920 \\ 289 \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 25 \\ \hline 160 \\ + 32 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$= 32, -15 \quad -16+576 = 560$$

$$31+529 = 560$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

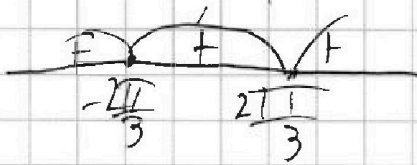
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y' = 12 \cos^2 x + 12 \cos x + 3 = 0$$

$$4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0 = (2 \cos x + 1)^2$$

$$\cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{4} = -0,5 \quad \cos x = -0,5$$



$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\cos x = 1$$

$$\max_p = 4 + 6 + 3 - 3 = 10$$

$$\cos x = 0$$

$$\min_p = -3$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 3x + \cos x = -2 \sin 2x \sin x$$

$$3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x - 2 \sin^2 x \cos x + \cos x$$

$$(\cos x \cdot \cos x)' = -\sin x \cos x - \cos x \cdot \sin x \Rightarrow -2 \cos x \sin x = -\sin 2x$$

$$(\cos^3 x)' = -2 \cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x$$

$$-2 \cos^2 x + 2 \cos x$$