



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $x=2$ выражение $\sqrt{(5x+6)(x-3)}$ не имеет смысла $\Rightarrow x \neq 2$
 при $x=-22$, $b_0 = x+4 < 0 \Rightarrow b_1 q^3 < 0 \Rightarrow q < 0$ или $b_1 < 0$; однако влю-
 бном из этих случаев $b_2 = b_1 q^2 = b_0 \cdot q^2 < 0$, что невозможно,
 т.к. $\sqrt{(5x+6)(x-3)} \geq 0$.

$\Rightarrow x=5$ или $x=-1$

При $x=5$:

$$b_1 q^3 = \sqrt{\frac{81}{8}} = 9 \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} = 9(\sqrt{2})^{-3}$$

$$b_1 q^2 = 5+4=9$$

$$b_1 q^2 = \sqrt{(5x+6)(x-3)} = \sqrt{81-2} = 9\sqrt{2}$$

Такая последовательность может существовать при $\frac{9}{9} = 1$ и $b_1 = \frac{9}{(\sqrt{2})^3}$ и $q = \sqrt{2}$

При $x=-1$:

$$b_1 q^3 = \sqrt{\frac{-9}{-8}} = 3(\sqrt{2})^{-3}$$

$$b_1 q^2 = 3$$

$$b_1 q^2 = \sqrt{-9 \cdot (-4)} = 6 = 3 \cdot (\sqrt{2})^2$$

Такая последовательность может существовать при $b_1 = \frac{3}{(\sqrt{2})^3}$ и $q = \sqrt{2}$

Ответ: -1; 5



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим

Задача №1

Обозначим члены геометрической прогрессии как v_1, v_2, \dots, v_n .

Тогда:

$$v_1 = v, q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$v_0 = v, q^3 = x+4$$

$$v_2 = v, q^6 = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

Заметим, что $x+4 \neq 0$, т.к. в таком случае все члены последовательности (кроме, конечно, первого) равны 0, но при $x+4=0 \Rightarrow x=-4$, $v_2 = \sqrt{(15 \cdot (-4)+6)(-4-3)} \neq 0$.

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_0} = q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$$

$$\text{Аналогично, } \frac{v_{10}}{v_4} = q^6 = \frac{x+4}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = (q^2)^3 = \left(\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} \right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{(15x+6)(x-3)})^3}{(x+4)^3} \cdot \frac{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}}{x+4} = 1$$

$$\frac{(\sqrt{15x+6})^3 \cdot (\sqrt{x-3})^3 \cdot \sqrt{15x+6}}{(x+4)^3 \cdot (x+4) \cdot \sqrt{(x-3)^3}} = 1 \Rightarrow \frac{(\sqrt{15x+6})^4}{(x+4)^4} = 1$$

$15x+6 \neq 0$, т.к. тогда $v_4=0 \Rightarrow$ все члены последовательности равны 0, что невозможно по условию задачи.

$$\Rightarrow \frac{(15x+6)^2}{(x+4)^4} = 1$$

$$x \neq -4 \Rightarrow (15x+6)^2 = (x+4)^4 \Rightarrow (15x+6)^2 - (x+4)^4 = 0$$

$$(15x+6-x^2-8x-16)(15x+6+x^2+8x+16) = 0$$

$$-(x^2-7x+10)(15x^2+23x+22) = 0$$

$$(x^2-7x+10)(x^2+23x+22) = 0$$

Решаем по теореме Виета корни квадратных трехчленов и получим, что $x=5$ или $x=2$ или $x=-1$ или $x=-2$. Однако при $x < -3$ выражение

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2x - 32,75 = 0$$

$$4x^2 + 8x - 131 = 0$$

$$D = 8^2 + 4 \cdot 4 \cdot 131 = 64 + 16 \cdot 131 = 16 \cdot (4 + 131) = 16 \cdot 135 = 16 \cdot 5 \cdot 27 = 16 \cdot 9 \cdot 15$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 4 \cdot 3 \sqrt{15}}{8} = -1 \pm \frac{3\sqrt{15}}{2}; \quad -1 - \frac{3\sqrt{15}}{2} \not\leq -1 - \frac{3 \cdot 3}{2} = -5,5; \quad -1 + \frac{3\sqrt{15}}{2} \leq -1 + \frac{3 \cdot 4}{2} = 5$$

~~При~~ \Rightarrow в данном случае $x \in [-7; 5] \Rightarrow$ только $x = -1 + \frac{3\sqrt{15}}{2}$
удовл. ОДЗ

При $t = 4$:

$$\sqrt{35 - 2x - x^2} = 4$$

$$35 - 2x - x^2 = 16$$

$$x^2 + 2x - 19 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 19 = 4 \cdot 20 = 16 \cdot 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{5}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{5}$$

\Rightarrow в данном

$$-1 - 2\sqrt{5} \not\leq -1 - 2 \cdot 2 = -5$$

$$-1 + 2\sqrt{5} \leq -1 + 8 = 7$$

\Rightarrow решения в данном случае решения все подходят
для ОДЗ.

Ответ: $-1 + \frac{3\sqrt{15}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$D = 30^2 - 875 = 25$$

$$y_{1,2} = 30 \pm 5$$

$$(y-25)(y-35) \leq 0$$

$$y \in [25; 35]$$

по т.к. при этом $y \in (-\infty; 20] \cup [35; \infty)$, то $y = 35$

$$9y^2 - 54xy + 7875 + z^2 = 0$$

$$y = 35 \Rightarrow 9y^2 - 54xy + 7875 = 0 \Rightarrow z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$$

Рассмотрим теперь первое уравнение системы, поставив в x и y и z :

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} \quad \begin{cases} x \geq -7 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-7; 5]$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = 2\sqrt{35-2x-x^2} - 6$$

возведем обе части в квадрат,

$$x+7 - 2\sqrt{x+7} \cdot \sqrt{5-x} + 5-x = 4 \cdot (35-2x-x^2) - 24\sqrt{35-2x-x^2} + 36; 2\sqrt{35-2x-x^2} - 6 \geq 0$$

$$\sqrt{x+7} \cdot \sqrt{5-x} = \sqrt{(x+7)(5-x)} = \sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\text{Пусть } \sqrt{35-2x-x^2} = t, t \geq 0 \text{ и } 2t - 6 \geq 0 \text{ — иначе}$$

$$12 - 2t = 4t^2 - 24t + 36$$

$$4t^2 - 22t + 24 = 0$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 121 - 96 = 25$$

$$t_{1,2} = \frac{11 \pm 5}{4}$$

$$t_1 = 1,5$$

$$t_2 = 4$$

$$\text{При } t = 1,5: 2\sqrt{35-2x-x^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 3, \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} = -3$$

$$\sqrt{35-2x-x^2} = 1,5$$

$$35 - 2x - x^2 = 2,25$$

х.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Расширим второе ^{задача №2} уравнение и решим отдельно:

$$|y-20| + 2|y-35| \leq 225 - \sqrt{225 - z^2}$$

$|y-20| + 2|y-35| \geq 0$, значит можем возвести обе части в квадрат

$$(y-20)^2 + 4|y-20||y-35| + 2^2(y-35)^2 = 225 - z^2$$

$$y^2 - 40y + 400 + |4y^2 - 220y + 700| + 4y^2 - 280y + 14900 = 225 - z^2$$

$$5y^2 - 320y + 5075 + z^2 + |4y^2 - 220y + 700| = 0$$

Т.к. $y \in (20; 35)$, $4y^2 - 220y + 700 < 0$, значит:
т.к. $y \in (20; 35)$ $|4y^2 - 220y + 700| = -(4y^2 - 220y + 700)$

\Rightarrow Т.к. $y \in (20; 35)$:

$$y^2 - 100y + 2275 + z^2 = 0$$

$y^2 - 100y + 2275 \leq 0$, корней нет

$$D = 50^2 - 2275 = 225$$

$$y_{1,2} = 50 \pm 15$$

$$(y-35)(y-65) \leq 0$$

$$\Rightarrow y \in [35; 65]$$

По т.к. $y \in (20; 35)$ - корней нет

Т.к. $y \in (-\infty; 20] \cup [35; \infty)$:

$$9y^2 - 540y + 7875 + z^2 = 0$$

$9y^2 - 540y + 7875 \leq 0$, корней нет

$$D = 270^2 - 9 \cdot 7875 = 0$$

$$y^2 - 60y + 875 \leq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + \cos x \leq 2 \cos 2x \cdot \cos x \quad \text{Задача №3}$$

$$2 \cos 2x \cos x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow 4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + (3 - p) = 0$$

Пусть ~~$4 \cos^3 x$~~

Пусть $\cos x = t, |t| \leq 1$:

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 = p$$

Пусть $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t + 3$:

$$f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(4t^2 - t + 1) = 3(2t - 1)^2 \Rightarrow \text{эта функция}$$

монотонно растет и $f'(t) = 0$ лишь при $t = \frac{1}{2}$

$$f(-1) = -10$$

$$f(1) = 4$$

\Rightarrow Извиду непрерывности при $p \in [-10; 4]$ у уравнения

$f(t) = p$ будет ровно одно решение, в противном случае решений не будет.

Ответ: при $p \in [-10; 4]$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

во сколько способов поставим точки симметрично всем сторонам и центру. Это будет кол-во способов
как посчитать нарисуем 2 клетки в прямоугольнике
 150×200 75×100

$$h = C_{7500}^2$$

= 3 умножить на кол-во способов:

$$a+b+c - (d+e+g) + 3h = 3 \cdot C_{15000}^4 - 3 \cdot C_{7500}^2 + 3 \cdot C_{7500}^2 = 3 \cdot C_{15000}^4$$

Ответ: $3 \cdot C_{15000}^4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

Посчитаем сколько способов расставить раскрасить клетки симметрично центру!

Пусть мы ставим точки в верхнем прямоугольнике 100×150 . Тогда кол-во способов раскрасить 4 точки в нижнем прямоугольнике и будет равно искомого кол-ву способов (т.к. оставшиеся 4 точки надо поставить зеркально): в другой части исходного прямоугольника симметрично этим)

$$\Rightarrow a = C_{150 \cdot 100}^4 = C_{15000}^4$$

Посчитаем аналогично кол-во способов поставить клетки симметрично средине линии как кол-во способов поставить 4 точки в прямоугольнике 75×200 и 150×100 (аналогично):

$$b = c = b = C_{75 \cdot 200}^4 = C_{15000}^4 \quad \text{и} \quad c = C_{150 \cdot 100}^4 = C_{15000}^4$$

Мы несколько раз посчитали некоторые раскраски. Мы 2 раза посчитали раскраски симм относительно центра и одной ср. линии. Кол-во разных раскрасок равно 0 способу и поставим $d = 2$ точки в прямоугольнике 75×100 и 75×100 .

$$d = e = C_{7500}^2 \quad (\text{т.к. ср. линии две})$$

Аналогично посчитаем кол-во способов симметричных по двум ср. линиям:

$$f = C_{7500}^2$$

Теперь мы в 2-х случаях вычислим кол-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При $a-c=-1$:

$$c-b=p^2$$

$$a-c=-1 \Rightarrow c=a+1$$

$$a+b+1=$$

$$a-b+1=p^2$$

Аналогично первому 1-му случаю:

$$p=3 \Rightarrow a-b=8 = b^2+b-8|2=0 \Rightarrow b_1=-29 \text{ и } b_2=23$$

$$a_1=b_1+p=-21; c_1=a_1+1=-20$$

$$a_2=b_2+p=31; c_2=a_2+1=32$$

В этих случаях $(a-c)(b-c) \neq p^2$, т.к. имеет ^{другие} другие делители.

\Rightarrow ответ всего 4: $(-21; -29; -20)$, $(-21; -29; -30)$,
 $(31; 23; 32)$, $(31; 23; 22)$

Ответ: $(-21; -29; -20)$, $(-21; -29; -30)$, $(31; 23; 32)$,
 $(31; 23; 22)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

$$(a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p \in \mathbb{P}$$

$$\Rightarrow a-c \equiv 1 \text{ или } b-c \equiv 1 \text{ или } a-c \equiv -1 \text{ или } b-c \equiv -1, \text{ т.к.}$$

$$a-c \neq b-c \text{ т.к. } a > b.$$

$$\text{Т.к. } a > b, \text{ то при } b-c \equiv -1, a-c \geq 0 \Rightarrow p^2 \leq 0 \Rightarrow b-c \neq -1$$

$$\text{Т.к. } a > b, \text{ то при } a-c \equiv 1, b-c \leq 0 \Rightarrow p^2 \leq 0 \Rightarrow a-c \neq 1$$

Тогда $b-c \equiv 1$:

$$a-c = p^2$$

$$b-c \equiv 1 \Rightarrow c = b-1$$

$$a-b+1 = p^2$$

$$p^2 \equiv 0 \text{ или } p^2 \equiv 1$$

$$\text{Если } p^2 \equiv 1 \Rightarrow a-b+1 \equiv 1 \Rightarrow a-b \equiv 0 \text{ - нарушают условие}$$

$$\Rightarrow p^2 \equiv 0 \Rightarrow p \equiv 3 \Rightarrow p \equiv 3$$

$$a-b+1 = 9$$

$$a-b = 8$$

$$a = b+8$$

$$a+b^2 = 820$$

$$b+8+b^2 = 820$$

$$b^2+b-812 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 812 = 3249$$

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3249}}{2} \Rightarrow b_1 = -29 \text{ и } b_2 = 23$$

$$a_1 = b_1 + 8 = -21; c_1 = b_1 - 1 = -30$$

$$a_2 = 31; c_2 = 22$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n_1

$$b_1 = b, q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$b, q^3 = x+4$$

$$b, q^6 = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$$

$x=5$

$$b_1 = \sqrt{\frac{15 \cdot 5 + 6}{2^3}} = \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9}{\sqrt{8}}$$

$$b_{10} = 9$$

$$b_{12} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow q^2 = \sqrt{2}$$

n_2

$$\sqrt{1+z} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}$$

$$|y-20| + |y-35| = \sqrt{225-z^2}$$

$$(y-20)^2 + 2|y-20||y-35| + (y-35)^2 = 225 - z^2$$

$$y^2 = 40y + 400 + 2|y-20||y-35| + y^2 = 70y + 1400 + z^2$$

$$2y^2 = 110y + 1400 + z^2 + 10 + 2|y-20||y-35| = 0$$

$$y^2 - 55y + 700 = 0$$

$$D = 55^2 - 4 \cdot 700 = 3025 - 2800 = 225$$

$$y_{1,2} = \frac{55 \pm 15}{2}$$

$$y = 20 \text{ или } y = 35 \text{ и } z = 0$$

$q^6 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$

$$q^6 = \frac{x+4}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}\right)^3 = \frac{x+4}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}}$$

$$\frac{(15x+6)(x-3) \cdot \sqrt{(15x+6)(x-3)}}{(x+4)^3 \cdot (x+4)} = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{(x-3)^3}}$$

$$\frac{(15x+6)^2}{(x+4)^4} = 1$$

$$(15x+6)^2 = (x+4)^4$$

$$(15x+6-x^2-8x-16)(15x+6+x^2+8x+16) = 0$$

$$(x^2-7x+10)(x^2+23x+22) = 0$$

$$(x-5)(x-2)(x+1)(x+22) = 0$$

$$\Rightarrow x=5 \text{ или } x=2 \text{ или } x=-1 \text{ или } x=-22$$

$\Rightarrow x=5$!!!
проверка

$x-3 < 0$
при $x=2, x=-1$ и $x=-22$

разнов знака:
 $y \in [20, 35] \text{ и } y \in (20, 35)$
 $z^2 = 0$
 $z = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

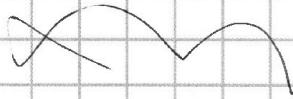
6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №5





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 \leq 2\sqrt{y-2x-x^2}$$

$$x+7 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} + 5-x \leq 4y - 8x - 4x^2 - 2\sqrt{y-2x-x^2} + 36$$

$$12 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} \leq 4y - 8x - 4x^2 - 2\sqrt{y-2x-x^2} + 36$$

$$2\sqrt{y-2x-x^2} - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} \leq 4y - 8x - 4x^2 + 24$$

$$12 - \sqrt{y-2x-x^2} - \sqrt{(x+7)(5-x)} \leq 4y - 8x - 4x^2 + 12$$

$$y - 20 + 2|y - 35| \leq 15$$

$$|y - 20| + 2|y - 35| = \sqrt{225 - z^2}$$

$$(y - 20)^2 + 4|y - 20||y - 35| + 4(y - 35)^2 = 225 - z^2$$

$$y^2 - 40y + 400 + 4|y - 20||y - 35| + 4y^2 - 280y + 4900 = 225 - z^2$$

$$5y^2 - 320y + 5300 + z^2 + 4|y - 20||y - 35| - 220y + 2800 \leq 0$$

$$5y^2 - 540y + 6875 + z^2 \leq 0$$

$$D = 270^2 - 9 \cdot 6875 = 9(90^2 - 6875) = 9(8100 - 6875) = 9 \cdot 1225 = 9 \cdot 35^2$$

$$y_{1,2} = \frac{270 \pm 105}{10} = 30 \pm \frac{35}{2} = 30 \pm 17.5$$

$$4y^2 - 100y + 2275 + z^2 \leq 0$$

$$D = 50^2 - 2 \cdot 2275 = 2500 - 4550 < 225$$

$$y_{1,2} = 50 \pm 15 = 50 \pm 15$$

$$y \in (35, 50) \cup (35, 65)$$

$y \in (20; 35)$ - no D.A.3 \Rightarrow решений нет
при $y \in (20; 35)$

$$x^2 - 2x - 35 \leq 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 35 = 144$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 12}{2} = 1 \pm 6$$

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = 7$$

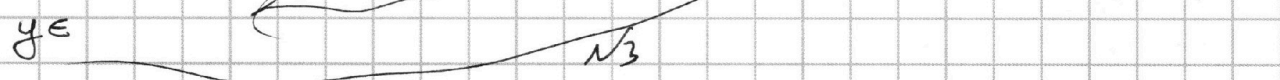
$$(x+5)(x-7) \leq 0$$

$$x \in [-5; 7]$$

$$y \in [20; 35] \cup [35; 65]$$

$$4(y-20)(y-35) = 4(y^2 - 55y + 700) = 4y^2 - 220y + 2800$$

$$\begin{array}{r} 1225 \quad | \quad 5 \\ -10 \quad \quad | \quad 1245 \\ \hline -20 \quad \quad | \quad 2455 \\ -15 \quad \quad | \quad 2015 \\ \hline 35 \quad \quad | \quad 105 \end{array}$$



$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 2x \cdot \cos x - \sin^2 2x \cdot \sin x + 6 \cos x = 2 \cos 2x + p$$

$$\cos 3x + 2 \cos x \leq 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x$$

$$2 \cos 2x + \cos x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 2x \cdot \cos x - \sin^2 2x \cdot \sin x + 6 \cos x = 3 \cos^2 x - \sin^2 x + p$$

$$\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x + 6 \cos x = 3 \cos^2 x - \sin^2 x + p$$

$$\cos^3 x - 3 \sin^2 x \cdot \cos x + 6 \cos x - 3 \cos^2 x + \sin^2 x = p$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x + 5 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos x \cdot (2 \cos 2x + 5) = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 2x \cdot (3 - 2 \cos x) - 5 \cos x + p = 0$$

$$\cos 2x \cdot (3 - 2 \cos x) + 7.5 - 5 \cos x - p + 7.5 = 0$$

$$(3 - 2 \cos x)(3 - 2 \cos x) - p - 7.5 = 0$$

$$= p + 7.5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 2x + 2,5 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2,5 = 2\cos^2 x + 1,5$$

$$2(\cos^2 x + 0,75)(3 - \cos x) = p + 7,5$$

$$\cos x \in [-1; 1]$$

$$(\cos^2 x + 0,75)(3 - \cos x) = \frac{p + 7,5}{2}$$

$$(\cos^2 x + 0,75)(3 - \cos x) = \frac{p + 7,5}{2}$$

$$-\cos^3 x + 3\cos^2 x - 0,75\cos x + 2,25 = \frac{p + 7,5}{2}$$

$$-4t^3 + 12t^2 - 3t + 9 = 2p + 15$$

$$-4t^3 + 12t^2 - 3t - 6 - 2p = 0$$

$$4t^3 - 12t^2 + 3t + 6 + 2p = 0$$

$$12t^2 - 24t + 3 = 0$$

$$4t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 4 = 48$$

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2 \cdot 4} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ — мин, макс}$$

$$\begin{array}{r} 7p + 5 \mid 9 \\ -12 \quad 875 \\ \hline 67 \\ -63 \\ \hline 45 \\ -45 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$y^2 - 40y + 400 + 4|y - 20||y - 35| + 4y^2 - 280y + 1200 = 22,5 - z^2$$

$$5y^2 - 320y + 5075 + z^2 + 4|y - 20||y - 35| = 0$$

$$y \in (20; 35)$$

$$4(y^2 - 55y + 700) + 4y^2 - 220y + 2800 = 0$$

$$8y^2 - 540y + 4500 = 0$$

$$y^2 - 100y - 2275 = 0$$

$$D = 50^2 - 2275 = 1875$$

$$y_{1,2} = 50 \pm 15 = 50 \pm 15$$

$$y \in [35; 65]$$

$$y \in (25; 35) \text{ — ОДЗ}$$

$$y \in (-\infty; 20] \cup [35; \infty)$$

$$9y^2 - 540y + 7875 = 0$$

$$y^2 - 60y + 875 = 0$$

$$D = 30^2 - 875 = 25$$

$$y_{1,2} = \frac{30 \pm 5}{2} = 30 \pm 5$$

$$y \in [12; 5]$$

$$y_{1,2} \in [25; 35]$$

$$\text{но ОДЗ: } y \in (-\infty; 20] \cup [35; \infty)$$

$$\Rightarrow y = 35 \text{ — ед. решение}$$

$$y^2 - 540y + 7875 + z^2 = 0$$

$$z^2 = 0$$

$$z = 0 \text{ и } y = 35$$

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}$$

$$\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$(x+7)(5-x) = 2\sqrt{(x+7)(5-x)}$$

$$12 + 2\sqrt{(x+7)(5-x)} = 140 - 8x - 4x^2 - 24\sqrt{(x+7)(5-x)} + 36$$

$$22\sqrt{(x+7)(5-x)} + 4(x^2 + 2x - 35) - 24 = 0$$

$$4(35 - 2x - x^2) - 22\sqrt{35 - 2x - x^2} + 24 = 0$$

$$4t^2 - 22t + 24 = 0$$

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

$$D = 121 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 25$$

$$t_{1,2} = \frac{11 \pm 5}{4}$$

$$t_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{4}$$

$$\text{галубие решение}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a > b$
 $a - b \div 3$
 $(a-c)(b-c) = p^2$
 $a + b^2 = 820$

$b \in [0; 29]$

$a > 0$ или $b \neq -29$

$b = -29$
 $a = -21$
 $a - b \div 3$

$(29+c)(21+c) = p^2$

~~$x(x-8) = p^2$~~
 $21+c=1$
 $c = -20$
 $p^2 = 9$
 $p = 3$

29
 $\times 29$
 $\hline 261$
 $+ 58$
 $\hline 841$

28
 $\times 28$
 $\hline 224$
 $+ 56$
 $\hline 784$

$(a-c)(b-c) = p^2$
 $(c-b)(c-a) = c^2 - (a+b)c + ab = p^2$

$a > b \Rightarrow b - c = 1$ или $b - c = -1$
 $c \leq b - 1$ или $a - c = 1$
 $(a-b) = p^2$ или $a - c = 1$
 $a - b = (p-1)(p+1) = p^2 - 1$
 $a^2 - 2ab + b^2 = p^2 - 1$

или $a - c = -1$
 $c = a + 1$
 $-1 \cdot (b - a - 1) = ab$

$19a - b = ab$ $p \div 3$
 $ab \div 3 + b - 1 = 0$ $p \div 3$
 $a(b+1) + b - 1 = 0$
 $19a - b = p^2$
 аналогично
 $p^2 = 9$
 $19a - b = 9$
 $a - b = 8$

p	p^2
0	0
1	1
2	4

$a - b + 1 = 0$
 $a - b \leq 2$
 $a - b \leq 0$
 $p^2 = 3$
 $p = 3$

3249
 $- 27$
 $\hline 3222$
 $+ 54$
 $\hline 3276$
 $+ 9$
 $\hline 3285$
 $\hline 3249$

19
 $\times 1861$
 $\hline 1861$
 $+ 3422$
 $\hline 3518$
 $+ 6836$
 $\hline 3249$

$a - b + 1 = 9$
 $a - b = 8$
 $a = b + 8$
 $b + 8 + b^2 = 820$
 $b^2 + b - 812 = 0$
 $D = 1 + 4 \cdot 812 = 1 + 3248 = 3249$
 $b_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3249}}{2} = \frac{-1 \pm 57}{2}$
 $b_1 = -29$ $a_1 = -21$ $c_1 = -30$
 $b_2 = 23$ $a_2 = 31$ $c_2 = 22$
 $b_3 = -29$ $a_3 = -21$ $c_3 = -20$
 $b_4 = 23$ $a_4 = 31$ $c_4 = 32$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x + 5 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos x \cdot (2 \cos 2x + 5) - 3 \cos 2x = p$$

$$\cos 2x = \frac{p}{\cos x} - 5$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{p}{\cos x} - 5$$

$$4 \cos^3 x - 2 \cos x + 5 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

$$4 \cos^3 x - 6 \cos^2 x + 3 \cos x + 3 - p = 0$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$12t^2 - 12t + 3 = 0 \quad 3(2t-1)^2$$

$$4t^2 - 4t + 1 = (2t-1)^2 = 0$$

$$2t = 1$$

$$t = 0,5$$

3р

$$f(0) = 3 - p$$

$$3,5 - p$$

$$f(0,5) = 0,5 - 1,5 + 1,5 + (3 - p) = 3,5 - p > f(0) \Rightarrow f(0,5) \text{ — максимум}$$

$$\Rightarrow p \leq 2,5$$

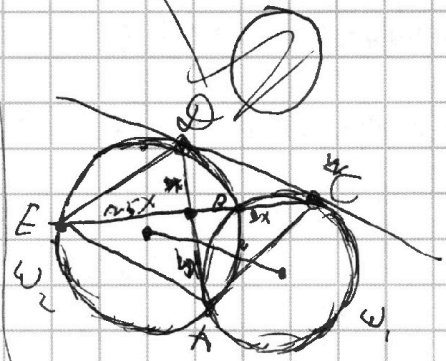
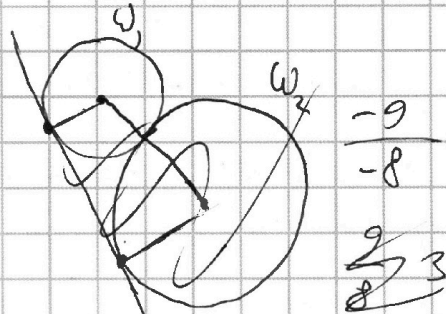
$$f(1) = 4 - p \text{ — макс}$$

$$p \leq 4$$

$$f(-1) = -4 - 6 - 3 + 3 - p = -10 - p$$

$$f(1) = 4 - 6 + 3 + 3 - p = 4 - p$$

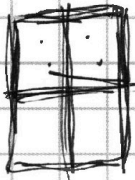
$$p \geq -10$$



$$\frac{-9}{-8}$$

$$\frac{9}{8}$$

$$\frac{9}{8}$$



-10

