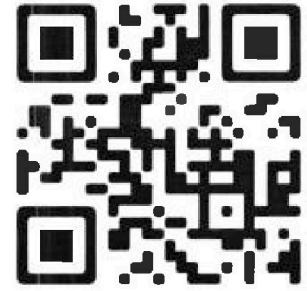




МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13



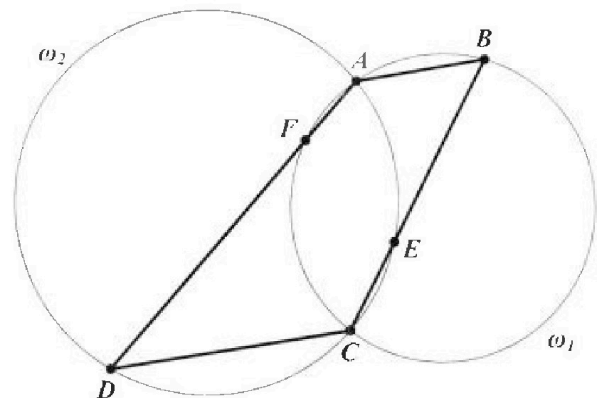
- [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны  $|2x - 2|$  и  $|x^2 + 3x|$ , а длина гипотенузы равна  $|3x + 1|$ . Найдите  $x$ .
- [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 - y^2 + z^2$ .
- [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде  $a(a + 1)$ , где  $a \in \mathbb{N}$ . Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна  $81 \cdot 10^{2024}$ .
- [5 баллов] Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4x - x^2 - 3} - 3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}}.$$

- [5 баллов] Остроугольный треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром  $O$ , а  $AA_1$  и  $BB_1$  – его высоты. Найдите расстояние от точки  $O$  до стороны  $AC$ , если  $AB_1 = 6$  и площадь треугольника  $OBA_1$  равна 6.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

- [6 баллов] Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AB$  и  $CD$  ( $AB < CD$ ). Окружность  $\omega_1$ , описанная около треугольника  $ABC$ , повторно пересекает сторону  $AD$  в точке  $F$ , а окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $ACD$ , повторно пересекает сторону  $BC$  в точке  $E$  (точки  $E$  и  $F$  расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков  $AF$  и  $CE$ , если отношение радиуса окружности  $\omega_1$  к радиусу окружности  $\omega_2$  равно  $1 : 2$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{146};$$

$$2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + z\sqrt{29} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29};$$

$$2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{29} - z\sqrt{29};$$

$$\sqrt{2}(2x + 3y - 4) = \sqrt{29}(2 - z);$$

Если обе части возвести в квадрат, то увидим, что в получившемся выражении  $2(2x + 3y - 4)^2 = 29(2 - z)^2$  в левой части делитель  $\sqrt{2}$  будет встречаться четное количество раз, т.к.  $2 \times 29$ , а если  $\sqrt{29}(2x + 3y - 4) = t$ , то  $\sqrt{29}(2x + 3y - 4)^2 = 2\sqrt{29}(2x + 3y - 4) = 2t \cdot 2$ , а в правой части

$$\text{если } \sqrt{29}(2 - z) = u, \text{ то } \sqrt{29}(29(2 - z)^2) = \sqrt{29}(29) + 2\sqrt{29}(2 - z) =$$

$= 2u + 1 \times 2$ , т.е. 29 будет встречаться нечетное количество раз. Но поскольку эти части равны, то чтобы не возникало противоречия,  $(2 - z)^2$  ~~должны~~ <sup>должны</sup> равняться нулю. Тогда  $(2 - z)^2 = 0$ ;  $2 - z = 0$ ;  $z = 2$ , соответственно и  $2(2x + 3y - 4)^2 = 0$ ;  $2x + 3y - 4 = 0$ ;  $2x + 3y = 4$ . Так как значение  $z$  нам стало известно, теперь достаточно вычислить минимальное значение  $x^2 - y^2$ :

Тогда  $(2 - z)^2 = 0$ ;  $2 - z = 0$ ;  $z = 2$ , соответственно и  $2(2x + 3y - 4)^2 = 0$ ;  $2x + 3y - 4 = 0$ ;  $2x + 3y = 4$ . Так как значение  $z$  нам стало известно, теперь достаточно вычислить минимальное значение  $x^2 - y^2$ :

$$2x + 3y = 4; \quad 2x = 4 - 3y; \quad x = \frac{4 - 3y}{2} = 2 - y - \frac{y}{2}.$$

Поскольку  $x \in \mathbb{Z}$ , пусть  $\frac{y}{2} = k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), тогда  $y = 2k$ ,

$$x = 2 - y - \frac{y}{2} = 2 - 2k - k = 2 - 3k;$$

$$x^2 - y^2 = (2 - 3k)^2 - (2k)^2 = 4 - 12k + 9k^2 - 4k^2 = 5k^2 - 12k + 4.$$

Это график квадратичной функции, парабола, ветви которой направлены вверх (т.к.  $a = 5 > 0$ ). Значит, минимальное её значение достигается в точке  $k_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 5} = 1,2$ .

Но поскольку  $k \in \mathbb{Z}$ , рассмотрим ближайшие к  $k_0$  целые





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

значения:  $+1$  и  $2$ . При  $k=1$   $x^2 - y^2 = 5 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 4 = 5 - 12 + 4 = -3$ ,  
при  $k=2$   $x^2 - y^2 = 5 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 4 = 20 - 24 + 4 = 0$  - видим, что  
при  $k=1$  получилось меньшее значение, тогда при  $k=1$   
 $x = 2 - 3 \cdot 1 = -1$ ,  $y = 2 \cdot 1 = 2$ ,  $x^2 - y^2 + z^2 = (-1)^2 - 2^2 + 2^2 = 1 - 4 + 4 = 1$ .  
Ответ: 1.

(Замечание: В данной задаче  $v_p(a)$  - степень вхождения  
простого делителя  $p$  в число  $a$ . Например,  $v_3(24) = 1$ ,  
т.к. по каноническому разложению  $24 = 2^3 \cdot 3$ . Из свойств  
наконец вытекают свойства, что  $v_p(a^k) = k \cdot v_p(a)$  и  
 $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ .)





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3.  $a, b$ , где  $a > b$ ,  
 Рассмотрим числа  $a, b \in \mathbb{N}$ , а точнее их "хорошие" версии  $a(a+1)$  и  $b(b+1)$ :  
 $a^2 + a - b^2 - b = 81 \cdot 10^{2024}$ ;  $(a^2 - b^2) + (a - b) = 81 \cdot 10^{2024}$ ;  
 $(a-b)(a+b) + (a-b) = 81 \cdot 10^{2024}$ ;  $(a-b)(a+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$ .  
 Заметим, что если  $a$  и  $b$  одной чётности, то  $a-b \equiv 2$ ,  $a+b \equiv 2$ , но  $a+b+1 \not\equiv 2$ , если  $a$  и  $b$  разной чётности, то  $a-b \not\equiv 2$ ,  $a+b \equiv 2$ , но  $a+b+1 \equiv 2$ , т.е. в любой из случаев имеем, что один множитель чётный, другой - нечётный, т.е. один из множителей забирает все 2 из числа  $81 \cdot 10^{2024}$  себе. А поскольку по каноническому разложению  $2^{20} \cdot 81 \cdot 10^{2024} = 2^{2024} \cdot 3^4 \cdot 5^{2024}$ , то для начала докажем, что рассмотрим случай, что  $a-b$  забрал  $2^{2024}$  себе, тогда способ разместить добавит туда же степени  $3 - 5$  (от 0-й до 4-й включительно, остальные 3 уйдут в  $a+b+1$ ), аналогично способ разместить туда степень  $5 - 2025$ . Значит, в всего у нас  $5 \cdot 2025 = 10125$  способов сделать множитель  $a-b$  в этом случае. Аналогично получаем 10125 способов, если всю степень двойки забрало число  $a+b+1$ . Заметим, что раз  $a > b \geq 1$ , то  $a+b+1 > 2b+1 \geq 3$ , поэтому случай, когда  $a+b+1 = 1$ , мы исключаем. Остаётся  $10125 + 10125 - 1 = 20249$  способов. Теперь докажем, что пара чисел не совпадают друг с другом. Предположим, нашли такие пары  $(a_1, b_1)$  и  $(a_2, b_2)$ , что  $a_1 - b_1 = a_2 + b_2 + 1$  и  $a_2 - b_2 = a_1 + b_1 + 1$ . Очевидно, это невозможно, т.к. из 1-го уравнения  $a_1 - a_2 = b_1 + b_2 + 1$ , из 2-го  $a_2 - a_1 = b_1 + b_2 + 1$ , а это возможно только, когда  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ .  
 Ответ: 20249 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
6 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

Сложив оба уравнения системы, получим:

$$x^2 + 2x - 3xy + 2y^2 - 3y + 1 = 0.$$

Решим здесь квадратное уравнение относительно  $x$ :

$$x^2 + x(2-3y) + 2y^2 - 3y + 1 = 0.$$

$$D = (2-3y)^2 - 4 \cdot (2y^2 - 3y + 1) = 4 - 12y + 9y^2 - 8y^2 + 12y - 4 = y^2.$$

$$x_{1,2} = \frac{-(2-3y) \pm \sqrt{y^2}}{2 \cdot 1} = \frac{3y-2 \pm y}{2} \quad (\text{так можно раскрыть квадратный корень, потому что в обоих случаях корни входят одинаково})$$

$$x_1 = \frac{3y-2-y}{2} = \frac{2y-2}{2} = y-1,$$

$$x_2 = \frac{3y-2+y}{2} = \frac{4y-2}{2} = 2y-1.$$

1) Для более лёгкого поиска решений выразим  $x$  через  $y$  во втором ~~выражении~~ <sup>уравнении</sup>, получим  $x(2-y) - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0$ ,

$$x(2-y) = y^3 - 5y^2 + 3y - 2, \quad x = \frac{y^3 - 5y^2 + 3y - 2}{2-y}.$$

1)  $x = y-1$ : из второго уравнения  $(y-1)(2-y) - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0$  получим  $(y-1)(2-y) - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0$ ;  
 $2y - y^2 - 2 + y - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0$ ,  $-y^3 + 4y^2 = 0$ ;  $y^3 - 4y^2 = 0$ ;  
 $y^2(y-4) = 0$ . Если отсюда  $y = 0$ , то  $x = 0-1 = -1$  - подставляя в первое уравнение, выясняем, что такая пара подходит. Если  $y = 4$ , то  $x = 4-1 = 3$ , и такая пара тоже, аналогично первой, подходит.

2)  $x = 2y-1$ : из второго уравнения аналогично сразу 1 получим  $(2y-1)(2-y) - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0$ ;

$$4y - 2y^2 - 2 + y - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0; \quad -y^3 + 3y^2 + 2y = 0; \quad 1: (-1)$$

$y(y^2 - 3y - 2) = 0$ . Если  $y = 0$ , то  $x = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ , а такая пара уже была, значит, осталось проверить корни дроби

$$y^2 - 3y - 2 = 0; \quad y^2 - 3y - 2 = y^2 - 2y - y + 2 = y(y-2) - (y-2) = (y-1)(y-2) = 0$$

Если  $y = 1$ , то  $x = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ .  $y^2 - 3y - 2 = 0$ :





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

7 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$D = (-3)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Если  $y = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ , то  $x = 2 - \frac{3 - \sqrt{17}}{2} - 1 = 2 - \sqrt{17}$ .

Если  $y = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$ , то  $x = 2 - \frac{3 + \sqrt{17}}{2} - 1 = 2 + \sqrt{17}$ . Подставляя обе эти пары в первое уравнение, получаем, что они тоже подходят.

Ответ:  $(x; y) = (-1; 0), (3; 4), (2 - \sqrt{17}; \frac{3 - \sqrt{17}}{2}),$

$(2 + \sqrt{17}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2})$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 ИЗ 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7.

Обозначим углы  $\angle ABC = \alpha$  и  $\angle ADC = \beta$ . Тогда, так как  $AB \parallel CD$ ,  
 $\angle BAD = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - \beta$ ,  $\angle BCD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha$ .

Рассмотрим  $\triangle BCF$ : заметим, что он вписан в окружность  $\omega_1$ , значит, сумма его противоположных углов равна  $180^\circ$ . Отсюда  $\angle AFC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha$ . Аналогично  $\triangle ADE$  вписан в  $\omega_2$ , отсюда  $\angle AEC = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - \beta$ .

$\angle DFC = 180^\circ - \angle AFC = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$ , аналогично  $\angle AEB = 180^\circ - \angle AEC = 180^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta$ .

Рассмотрим  $\triangle DFC$ :  $\angle FDC = \beta$ ,  $\angle DFC = \alpha \Rightarrow \angle DCF = 180^\circ - \alpha - \beta$ .

Аналогично в  $\triangle ABE$   $\angle ABE = \alpha$ ,  $\angle AEB = \beta$ ,  $\angle BAE = 180^\circ - \alpha - \beta$ .

$\angle FCE = \angle BCD - \angle FCD = \angle BCD - \angle DCF = (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \alpha - \beta) = \beta$ ;  $\angle EAF = \angle BAF - \angle BAE = \angle BAD - \angle BAE = (180^\circ - \beta) - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha$ . Отсюда, так как  $\angle ECF = \angle AEB = \beta$ ,  $AE \parallel CF$ , тогда  $AECF$  - трапеция.

Пусть радиус окружности  $\omega_1$  -  $R_1$ , окружности  $\omega_2$  -  $R_2$ .

Тогда по теореме синусов для  $\triangle ABC$   $\frac{AC}{\sin \alpha} = 2R_1$ ,

для  $\triangle ACD$   $\frac{AC}{\sin \beta} = 2R_2$ . Поделив <sup>второе</sup> первое выражение на первое, получим  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2R_2}{2R_1} = \frac{R_2}{R_1} = 2$ ;  $\sin \alpha = 2 \sin \beta$ .

Поскольку  $AECF$  - трапеция,  $\angle AEF = \angle CFE$ , т.к.  $FE$  - секущая для  $AE$  и  $CF$ . Тогда по теореме синусов для  $\triangle AFE$

$\frac{FE}{\sin \alpha} = \frac{AF}{\sin \angle AEF}$ , для  $\triangle FCE$   $\frac{FE}{\sin \beta} = \frac{CE}{\sin \angle CFE}$ . Поделив

первое выражение на второе, получим  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{CE \cdot \sin \angle AEF}{AF \cdot \sin \angle CFE}$

а поскольку  $\angle AEF = \angle CFE$ , то  $\frac{CE}{AF} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2$ ;  $\frac{AF}{CE} = \frac{1}{2}$ .

Ответ:  $\frac{AF}{CE} = \frac{1}{2}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Delta AFE: \frac{FE}{\sin \alpha} = \frac{AF}{\sin \angle AEF} \quad \Delta FCE: \frac{FE}{\sin \beta} = \frac{CF}{\sin \angle CFE}$$

$$\angle AEF = \angle CFE$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{CF}{AF} = 2$$

$$CF = 2AF$$

$$\frac{AF}{CF} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 2x - 3xy + 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$x^2 + x(2-3y) + (2y^2 - 3y + 1) = 0$$

$$D = (2-3y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2y^2 - 3y + 1) = 4 - 12y + 9y^2 - 8y^2 + 12y - 4 = y^2$$

$$x_{1,2} = \frac{3y-2 \pm y}{2} \quad x$$

$$x = \frac{y^3 - 5y^2 + 3y - 2}{2-y}$$

$$1) x = y - 1: (y-1)^2 - 2y(y-1) + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 - 2y^2 + 2y + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$y^3 - 5y^2 = 0; y^2(y-5) = 0; y = 0; 5$$

$$y = 0: x^2 - 2x + 2 = 0, x = -1 \text{ - для } 1-20 \text{ подходит}$$

$$y = 5: x^2 - 2x - 5x - 5^3 + 5 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 2 = 0;$$

$$-3x - 17 = 0; x = -\frac{17}{3}$$

$$\left(-\frac{17}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{17}{3}\right) \cdot 5 + 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 1 = \frac{289}{9} + \frac{170}{3} + 125 - 75 - 1 = \frac{289 + 159 + 390}{9} - 49 \neq 0 > 0$$

$$2) x = 2y - 1: (2y-1)^2 - 2y(2y-1) + y^3 - 3y^2 - 1 = 0;$$

$$4y^2 - 4y + 1 - 4y^2 + 2y + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$y^3 - 3y^2 - 2y = 0; y(y^2 - 3y - 2) = 0$$

$$y = 0: x = -1 \text{ - тоже}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 - 3y - 2 = 0. \quad D = 9 + 8 = 17$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = 2y - 1: \quad 2 + (2 - y)(2y - 1) - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0.$$

$$4y - x - 2y^2 + y - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0.$$

$$4y^3 - 2y^2 + 2y = 0.$$

$$y(2y^2 - y + 1) = 0.$$

$$y_1: \quad D = 1 - 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0.$$

$$1 \text{ сл. } (2 - y)(y - 1) - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0.$$

$$2y - 2 - y^2 + y - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0.$$

$$-y^3 + 4y^2 = 0; \quad y^3 y^2(y - 4) = 0$$

$$y = 4: \quad x = \frac{4^3 - 5 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 - 2}{2 - 4} = \frac{64 - 80 + 12 - 2}{-2}$$

$$= \frac{-6}{-2} = 3.$$

$$3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 1 = 9 - 24 + 64 - 48 - 1 = 0.$$

$$(0; (-1, 0), (3; 4).$$

$$(2 - \sqrt{17})^2 - 2 - (2 - \sqrt{17}) \left( \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \right) + 3 \cdot \left( \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \right)^3 - 3 \cdot \left( \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \right)^2$$

$$- 1 = 4 - 4\sqrt{17} + 17 - 6 + 2\sqrt{17} + 6\sqrt{17} - 34 +$$

$$+ 27$$



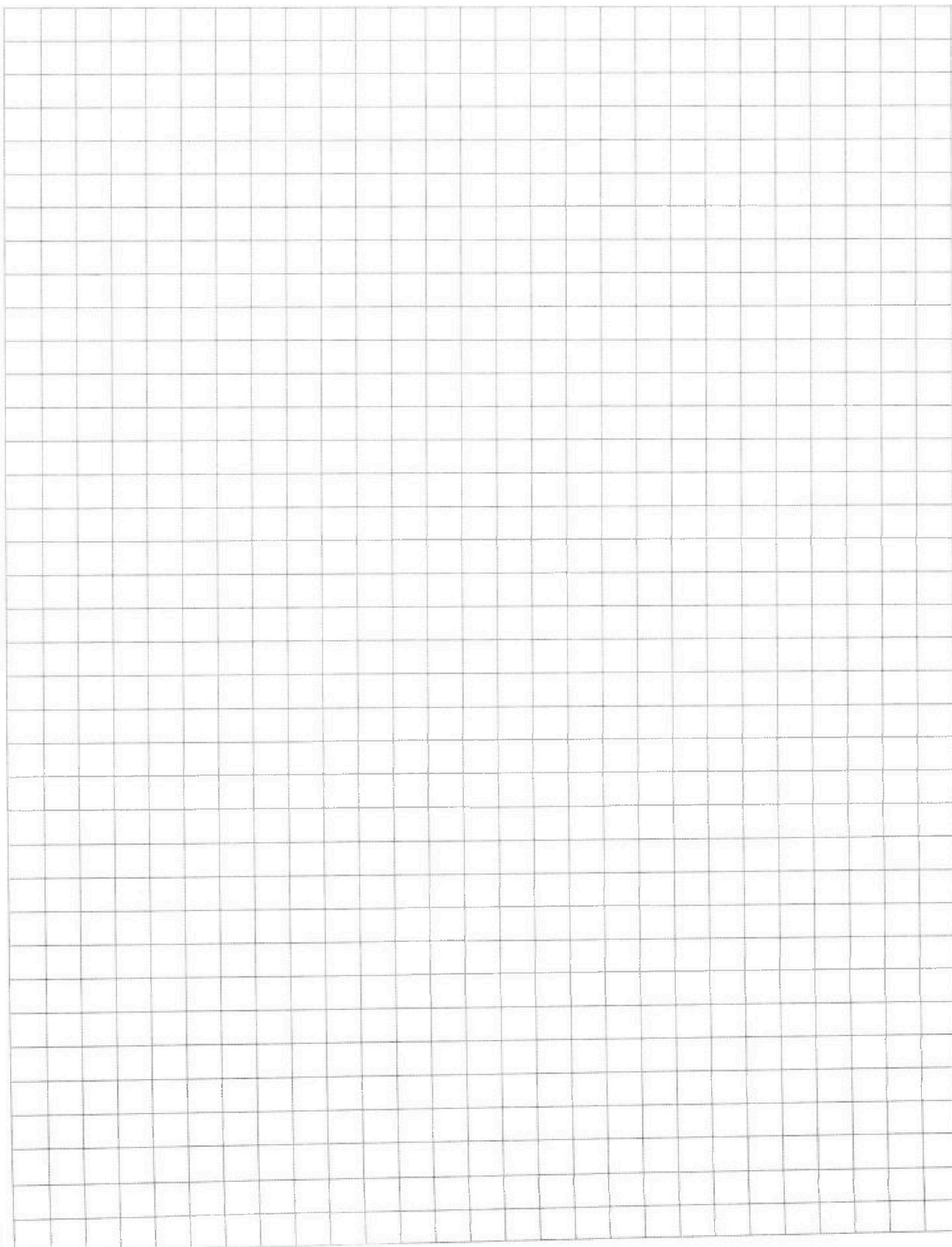


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

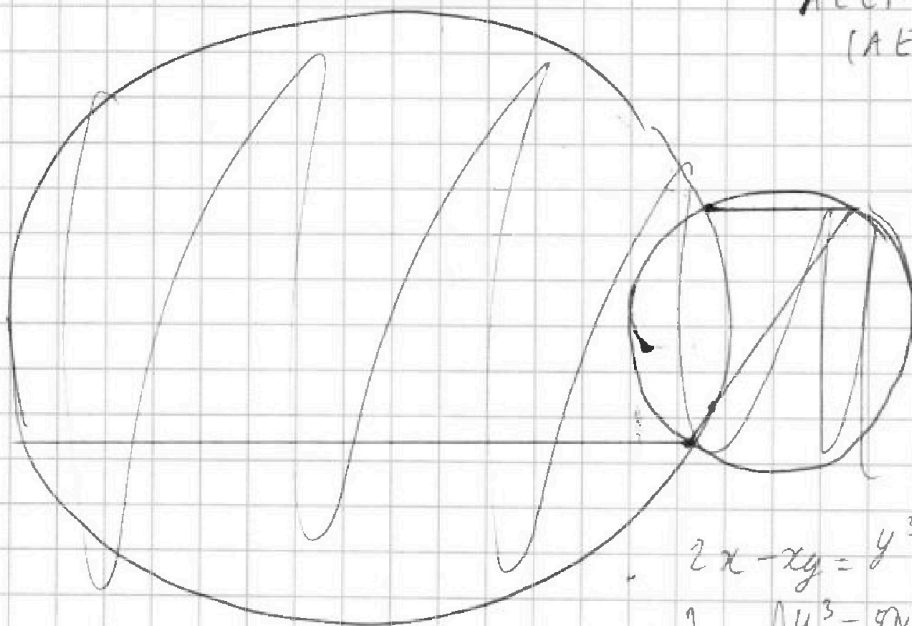
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$CE \parallel AF$ , т.к.  $\angle AEB = \angle FEB$ . Тогда  $AD \parallel BC \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow AE \parallel CF$ , т.к.  $\angle AEB = \angle FEC$ .  $AF \parallel CE \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow AFCE$  - паралл. и тогда  $\frac{AF}{CE} = 1$ .~~

$AECE$  - трап.  
( $AE \parallel CF$ ).



Реш.

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \\ 2x - xy + y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$2x - xy = y^3 - 5y^2 + 3y - 2$$

$$-x = \frac{y^3 - 5y^2 + 3y - 2}{y - 3y}$$

$$4x - 2xy - 2y^3 + 10y^2 - 6y + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3xy + 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1 + y^2 - 3xy + \frac{9}{4}x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{4}$$

$$(x+1)^2 + (y - \frac{3}{2}x)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}(x^2+1)$$

$$x^2 - 4x + 3y^3 - 13y^2 + 6y - 5 = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = y^2 - 3y$$

$$-\sqrt{8} + 2\sqrt{18} + 2\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$$

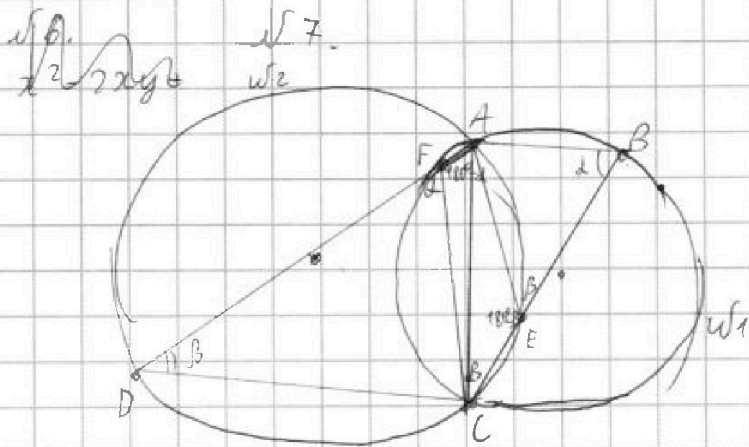


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$$

$$(180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \beta$$

$$(180^\circ - \beta) - (180^\circ - \alpha) = \alpha$$

$$= \alpha$$

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = 2R_1$$

$$\frac{AC}{\sin \beta} = 2R_2$$

$$AC = 2R_1 \sin \alpha = 2R_2 \sin \beta$$

$$R_1 \sin \alpha = R_2 \sin \beta; \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{2};$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \beta$$

$$\triangle BEA \sim \triangle FDC \quad (k=2)$$

$AB \parallel CD$

$$\triangle ACF: \frac{AC}{\sin(180^\circ - \alpha)} = 2R_1$$

$$\frac{AF}{\sin \angle ACE} = 2R_1$$

$$\triangle AEC: \frac{CE}{\sin \angle CAE} = 2R_2$$

$$\frac{AF \cdot \sin \angle CAE}{CE \cdot \sin \angle ACE} = \frac{1}{2}$$

$$\triangle AFC: \frac{AC}{\sin \angle AFC} = \frac{AF}{\sin \angle ACF}$$

$$\sin \angle ACF = \frac{AC \cdot \sin \angle AFC}{AF}$$

$$AC = \frac{AF \cdot \sin \angle ACF}{\sin \angle AFC}$$

$$\angle FAC = \angle CAE$$

$$AF \parallel CE$$

$$CE \parallel AF?$$

~~$$\triangle ACF: \frac{CF}{\sin \angle FAC} = 2R_1$$~~

~~$$\frac{CF}{AF} = \frac{1}{2}$$~~

~~$$\triangle CAE: \frac{AE}{\sin \angle CAE} = 2R_2$$~~

~~$$AF = 2CE$$~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

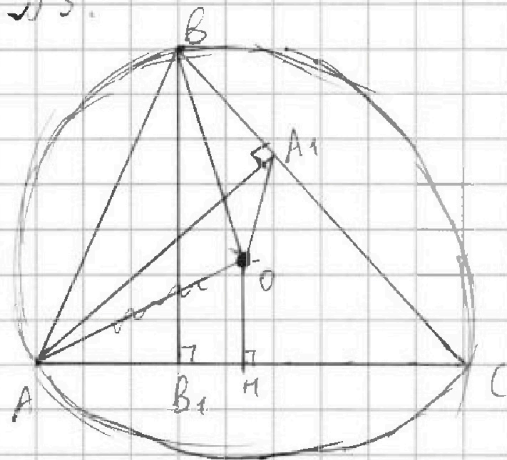
$$3y^2 - x^2 + 2xy + 1 = 5y^2 - 2y + 2x - 3y + 2.$$

$$2y^2 + x^2 - 3xy + 2x - 3y + 1 = 0.$$

$$4y^2 + 2x^2 - 6xy + 4x - 6y + 2 = 0.$$

$$9y^2 - 6y + 1 - 4x^2 + 4x + 1 = 0.$$

У5.



OH - ?

$$S_{OBA_1} = 6.$$

$$AB_1 = 6.$$

У1.

$$|2x-2|^2 + |x^2+3x|^2 = |3x+1|^2$$

$$(2x-2)^2 + (x^2+3x)^2 = (3x+1)^2$$

$$4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = 0.$$

$$1 + 6 + 4 - 14 + 3 = 0.$$

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 \mid x-1$$

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 \\ \hline 7x^3 + 4x^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 + 7x^2 + 11x - 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7x^3 + 7x^2 \\ \hline 7x^3 - 7x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11x^2 - 14x \\ \hline -11x^2 - 11x \end{array}$$

$$-3x + 3$$

$$\begin{array}{r} -3x + 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^3 + 7x^2 + 11x - 3 = 0.$$

$$1 + 7 + 11 - 3 = 0 \quad x = -3.$$

$$27 + -27 + 33 - 3 = 0.$$

$$\Rightarrow (x+3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x^3 + 7x^2 + 11x - 3 \\ - (x^3 - 3x^2) \\ \hline 10x^2 + 11x \\ - (10x^2 - 30x) \\ \hline 41x - 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-3 \\ \hline x^2 + 10x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 7x^2 + 11x - 3 \\ - (x^3 + 3x^2) \\ \hline 4x^2 + 11x \\ - (4x^2 + 12x) \\ \hline -x - 3 \\ - (-x - 3) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x+3 \\ \hline x^2 + 4x - 1 \end{array}$$

$$x^2 + 4x - 1 = 0.$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 20.$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

№6.

$$x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0.$$

$$D = (-2y)^2 - 4(y^3 - 3y^2 - 1) = -4y^3 + 16y^2 - 4.$$

№4.

$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}} - \frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \geq 0.$$

$$\frac{\sqrt{4x^2-x^2-3}-3-\sqrt{2x-x^2}+\sqrt{x^2+x-2}}{(\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2})(\sqrt{4x-x^2-3}-3)} \geq 0.$$

$$(\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}) \cdot 4$$

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= a_2 + b_2 + 1 \\ a_2 - b_2 &= a_1 + b_1 + 1 \end{aligned}$$

почему не противоречия?

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= b_1 + b_2 + 1 \\ a_2 - a_1 &= b_1 + b_2 + 1 \end{aligned}$$

аналогично если  $2^{2024}$  содержит  $a+b+1$

$a_1 = a_2, b_1 = b_2.$

$a-b$	$a+b+1$	} 2025 вар.
$2^{2024} \cdot 3$	$3^3 \cdot 5^{2024}$	
$2^{2024} \cdot 3 \cdot 5$	$3^3 \cdot 5^{2023}$	

← аналогично если  $a-b$  содержит 0, 2, 3, 4 тройки

$\Rightarrow 2025 \cdot 5 = 10125$  вар.

$10125 \cdot 2 = 20250$  вар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

√3.

$a(a+1)$ ,  $a \in \mathbb{N}$  - хорошее число

$$a(a+1) - b(b+1) = 81 \cdot 10^{2024} \quad \text{какая-то такая пара?}$$

$$a^2 + a - b^2 - b = (a^2 - b^2) + (a - b) = (a - b)(a + b + 1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$81 \cdot 10^{2024} = 2^{2024} \cdot 3^4 \cdot 5^{2024}$$

$a - b = 4 \Rightarrow a$  и  $b$  одной четн. аналогично  $a - b = 4 \Rightarrow a + b = 2 \cdot 2^{2024}$   
 $a + b = 4 \Rightarrow a + b + 1 = 5$

$$a - b = k, \quad a + b + 1 = \frac{81 \cdot 10^{2024}}{k}$$

$$2a + 1 = \frac{k^2 + 81 \cdot 10^{2024}}{k}$$

$$2a = \frac{k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024}}{k}$$

$$a = \frac{k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024}}{2k}$$

$$b = a - k = \frac{2k \cdot \frac{k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024}}{2k} - k^2}{2k} = \frac{k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024} - 2k^2}{2k} = \frac{-k^2 - k + 81 \cdot 10^{2024}}{2k}$$

√2.

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}, \quad x, y, z \in \mathbb{Z}$$

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) = ?$$

$$\sqrt{32} + \sqrt{116} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$$

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = 2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + z\sqrt{29}$$

$$2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + z\sqrt{29} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$$

$$2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{29} - z\sqrt{29}$$

$$\sqrt{2}(2x + 3y - 4) = \sqrt{29}(2 - z)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2(2x+3y-4)^2 = 29(z-2)^2$$

$2x+3y-4$  не может содержать  $\sqrt{29}$ .

$\sqrt{29}$  тоже, тогда  $2x+3y-4=0$ ;  $z=2$ .

дост-о найти  $\min x^2-y^2$ .

$$2x+3y-4=0; 2x+3y=4.$$

$$2x = 4-3y \rightarrow 4-3y = z; y = z.$$

$$x = \frac{4-3y}{2} = 2 - y - \frac{y}{2}.$$

$$\frac{y}{2} = k; x = 2 - 2k - k = 2 - 3k.$$

$$y = 2k.$$

$$x^2 - y^2 = (2-3k)^2 - (2k)^2 = 4 - 12k + 9k^2 - 4k^2 =$$

$$= 5k^2 - 12k + 4.$$

$$k_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \cdot 5} = 1,2.$$

$$5 \cdot 1,2^2 - 12 \cdot 1,2 + 4 = -3,2.$$



$$k=1: x^2 - y^2 = 5 - 12 + 4 = -3 \text{ (при } x=-1, y=2)$$

$$k=2: 20 - 24 + 4 = 0. \text{ (при } x=-4, y=4)$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 - 4 - 4 + 2^2 = 1$$

№6.

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} y^3 = 3y^2 - x^2 + 2xy + 1 \\ y^3 = \frac{5y^2 + xy - 2x + 3y - 2}{5y^2 - xy + 2x - 3y + 2} \end{cases}$$