



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 14



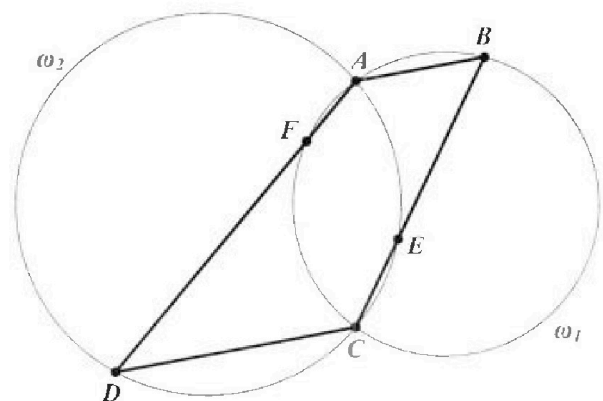
1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|x - 1|$ и $|x^2 + 4x|$, а длина гипотенузы равна $|2x + 3|$. Найдите x .
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{2} + y\sqrt{12} + z\sqrt{75} = \sqrt{32} + \sqrt{108}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 - z^2$.
3. [4 балла] Назовём числа хорошими, если они представимы в виде $a(a + 1)$, где $a \in \mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $343 \cdot 10^{1000}$.
4. [5 баллов] Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{6x - x^2} - 5} \leq \frac{1}{\sqrt{3x - x^2} - \sqrt{x^2 - x - 2}}$$

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O , а AA_1 и BB_1 - его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC , если $AB_1 = 5$, а площадь треугольника OBA_1 равна 3.
6. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + y + y^3 = 0, \\ 2x + 1 - y^3 - 2y^2 + 2xy = 0. \end{cases}$$

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB < CD$). Окружность ω_1 , описанная около треугольника ABC , повторно пересекает сторону AD в точке F , а окружность ω_2 , описанная около треугольника ACD , повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение радиусов окружностей ω_1 и ω_2 , если $AF : CE = 3 : 5$.





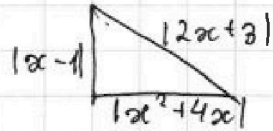
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1



$$(2x+8)^2 = (x-1)^2 + (x^2+4x)^2$$

$$x^4 + 8x^3 + 13x^2 - 14x - 8 = 0$$

$$(x-1)(x^3 + 9x^2 + 22x + 8) = 0$$

$$x \neq 1$$

$$x^3 + 9x^2 + 22x + 8 = 0$$

$$x(x^2 + 5x + 2) + 4(x^2 + 5x + 2) = 0$$

$$(x^2 + 5x + 2)(x + 4) = 0$$

$$x \neq -4, \text{ т.к. тогда } |x^2 + 4x| = 0$$

$$x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2₁

$$x\sqrt{2} + y\sqrt{12} + z\sqrt{75} = \sqrt{32} + \sqrt{108}$$

$$x\sqrt{2} + y \cdot 2\sqrt{3} + z \cdot 5\sqrt{3} = 4\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$$

$$x\sqrt{2} + \sqrt{3}(2y + 5z) = 4\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$$

⇓

$$x = 4 \quad 2y + 5z = 6 \Rightarrow y = 3 - \frac{5}{2}z$$

2) $x^2 + y^2 - z^2 \rightarrow \min$

$$16 + (3 - \frac{5}{2}z)^2 - z^2 \rightarrow \min$$

$$\frac{21}{4}z^2 - 15z + 25 \rightarrow \min$$

$$z_0 = \frac{15}{\frac{21}{2}} = \frac{30}{21} = \frac{10}{7}$$

$$\frac{21}{4} \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^2 - 15 \cdot \frac{10}{7} + 25 = \frac{100}{7}$$

Ответ: $\frac{100}{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3'

$$a(a+1) \cdot b(b+1) = 343 \cdot 10^{1000}, \text{ где } a, b \in \mathbb{N} \text{ и } a > b$$

$$(a-b)(a+b) + (a-b) = (a-b)(a+b+1) = 343 \cdot 10^{1000}$$

Т.к. $(a-b)$ и $(a+b+1)$ - разной четности, 10^{1000} - принадлежат одной скобке

~~$$c = 10^{1000}$$~~

~~$$a - b = 7^n$$~~

~~$$a + b + 1 = c \cdot 7^{3-n} \quad (\text{Если } c \text{ принадлежит } (a-b), \text{ то } b < 0)$$~~

~~т.к. $n = 0, 1, 2, 3$ - всего 4 варианта~~
~~Ответ: 4 пары~~

$$c = 2^{1000}$$

$$\begin{cases} a - b = 7^n \cdot 5^k \\ a + b + 1 = c \cdot 7^{3-n} \cdot 5^{1000-k} \end{cases}$$

$$n \in [0; 3]; k \in [0; 1000]$$

Всего вариантов: $4 \cdot 1001 = 4004$

Если c - "принадлежит" $(a-b)$, то $b < 0$

Ответ: 4004 пары



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\frac{1}{\sqrt{6x-x^2}-5} \leq \frac{1}{\sqrt{3x-x^2}-\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [0; 6] \\ 3x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [0; 3] \\ x^2-x-2 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty) \end{array} \right.$$

$$\Downarrow$$

$$(1) \exists x \in [2; 3]$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{U}_3(1): \sqrt{6x-x^2} \in [2\sqrt{2}; 3] \\ \sqrt{3x-x^2} \in [0; \sqrt{2}] \\ \sqrt{x^2-x-2} \in [0; 2] \end{array} \right\} (2)$$

1) Т.к. $(\sqrt{6x-x^2}-5) < 0$, то часть решения:

$$\sqrt{3x-x^2} - \sqrt{x^2-x-2} > 0$$

$$2x^2 - 4x - 2 < 0$$

$$x \in (1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$$

Тогда: $x \in [2; 1+\sqrt{2})$ - решение

2) Если: $\sqrt{3x-x^2} - \sqrt{x^2-x-2} < 0$, то:

$$\sqrt{x^2-x-2} - \sqrt{3x-x^2} \geq 5 - \sqrt{6x-x^2}$$

$$\mathcal{U}_3(2): 5 - \sqrt{6x-x^2} \geq 2, \text{ и } \sqrt{x^2-x-2} \leq 2$$

Тогда $x=3$ - единственное решение

$$\text{Ответ: } x \in [2; 1+\sqrt{2}) \cup \{3\}$$

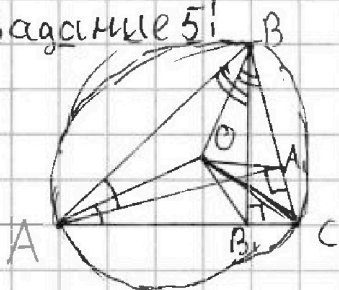


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5!



$$AB_1 = 5$$

$$S_{OBA_1} = 3$$

Докажем, что $S_{OBA_1} = S_{OAB_1}$:

$$1) \frac{AO \cdot AB_1 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{BO \cdot BA_1 \cdot \sin \beta}{2}, \text{ где } \angle OAB_1 = \alpha \text{ и } \angle OBA_1 = \beta$$

т.к. $AO = OB$ (как радиусы):

$$\frac{AB_1}{\sin \beta} = \frac{BA_1}{\sin \alpha} - \text{показать}$$

$$2) \Delta BOC - \text{равнобедренный} \Rightarrow \angle OBC = \angle BCO = \beta \Rightarrow \angle BOC = 180^\circ - 2\beta$$

$$\angle BOC = \overset{\frown}{BC} = 180^\circ - 2\beta$$

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC} = 90^\circ - \beta$$

$$\angle ABB_1 = 90^\circ - \angle BAC = \beta$$

Аналогично: $\angle BAA_1 = \alpha$

$$3) \text{Из (2)} \Rightarrow \frac{AB_1}{2\sin \beta} = R(\Delta ABB_1) \text{ и } \frac{BA_1}{2\sin \alpha} = R(\Delta AA_1B)$$

Но из свойств ортоцентра: точки A, B, A_1, B_1 - лежа на одной окружности $\Rightarrow R(\Delta ABB_1) = R(\Delta AA_1B)$

$$\frac{AB_1}{2\sin \beta} = \frac{BA_1}{2\sin \alpha} \Rightarrow \frac{AB_1}{\sin \beta} = \frac{BA_1}{\sin \alpha} \Rightarrow S_{OBA_1} = S_{OAB_1}$$

$$4) \frac{1}{2} \cdot x \cdot AB_1 = S_{OBA_1} = S_{OAB_1}, \text{ где } x - \text{искомое расстояние}$$

$$x = \frac{6}{5}$$

Ответ: $\frac{6}{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} x^2 - xy + y + y^3 = 0 \\ 2x + 1 - y^3 - 2y^2 + 2xy = 0 \end{cases}$$

$$2x + 1 - y^3 - 2y^2 + 2xy = 0$$

$$2x + 1 - y^3 - 2y^2 + 2xy = (y+1)(2x - y^2 - y + 1) = 0$$

1) $y = -1$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x = 1 \quad x = -2$$

2) $y \neq -1$

$$\begin{cases} 2x - y^2 - y + 1 = 0 \\ x^2 - xy + y + y^3 = 0 \end{cases}$$

$$2x = y^2 + y - 1$$

$$4x^2 - 4xy + y + 4y + 4y^3 = 0$$

$$(y^2 + y - 1)^2 - 2y(y^2 + y - 1) + 4y + 4y^3 = 0$$

$$y^4 + 4y^3 - 3y^2 + 4y + 1 = 0$$

$$y^2(y^2 - y + 1) + 5y(y^2 - y + 1) + (y^2 - y + 1) = 0$$

$$(y^2 - y + 1)(y^2 + 5y + 1) = 0, \quad y^2 - y + 1 \neq 0, \text{ т.к. } D < 0$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}, \quad x = 6 \mp \sqrt{21}$$

Ответ: $(1; -1); (-2; -1); (6 + \sqrt{21}; \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}); (6 - \sqrt{21}; \frac{-5 + \sqrt{21}}{2})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7;

1) Докажем, что $AE \parallel FC$:

Для того: $\angle FCB + \angle AFC = 180^\circ$ - доказать

$\triangle ABC$ - вписан в окружность $\Rightarrow \angle AFC + \angle ADC = 180^\circ$

Аналогично: $\angle FCB + \angle FAB = 180^\circ$

$$\angle FAB + \angle ADC = 180^\circ$$

$$\angle AFC + \angle ADC + \angle FCB + \angle FAB = 360^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\angle AFC + \angle FCB = 180^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$AE \parallel FC$$

2) т.к. $AE \parallel FC$:

$$\angle FCA = \angle CAE = 2$$

$$R(w_1) = \frac{AF \sin \angle FCA}{2 \sin \angle FCA}; (\text{т.к. } \triangle FCA - \text{вписан в } w_1)$$

$$R(w_2) = \frac{EC}{2 \sin \angle CAE}; (\text{т.к. } \triangle CAE \text{ вписан в } w_2)$$

$$\frac{R(w_1)}{R(w_2)} = \frac{AF}{2 \sin 2} \cdot \frac{2 \sin 2}{EC} = \frac{AF}{EC} = \frac{3}{5}$$

Ответ: 3 : 5

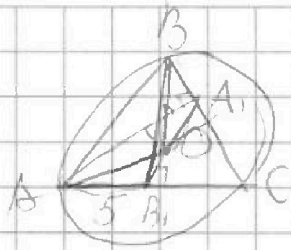


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

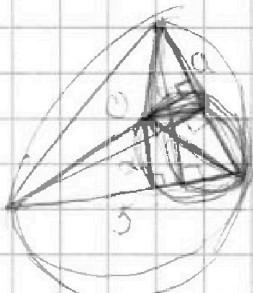


$$S_{\triangle BA_1C} = 3$$

120°

$$n = 1$$

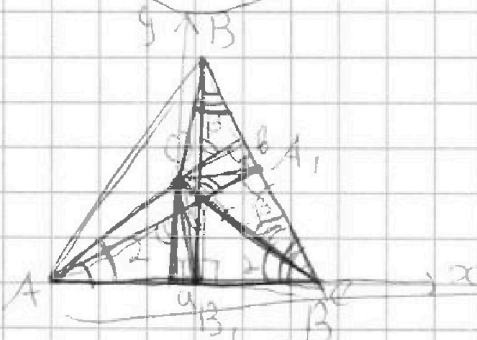
2 2



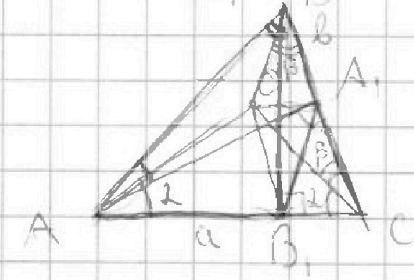
$$\frac{1}{2} a \gamma = 3$$



$$180^\circ - 2$$



$$O(0; \infty) \quad \left| \begin{array}{l} AB_1 \cdot \sin \beta = BA_1 \cdot \sin \beta \\ AB_1 = \frac{a \sin \beta}{\sin 2\beta} \\ BA_1 = \frac{a \sin \alpha}{\sin 2\alpha} \end{array} \right.$$



$$\angle C = 180^\circ - 2\beta$$

$$\angle A = 90^\circ - \beta \Rightarrow \angle ABB_1 = \beta$$

$$\angle B = 90^\circ - 2 \Rightarrow \angle BAA_1 = 2$$

$$\frac{AB_1}{2 \sin \beta} = R(\triangle ABB_1)$$

$$\frac{BA_1}{2 \sin 2} = R(\triangle BAA_1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x\sqrt{2} + y\sqrt{12} + z\sqrt{75} = \sqrt{32} + \sqrt{108} \quad 36 \cdot 3 \quad 108 \cdot 2$$

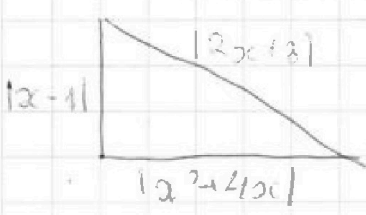
$$x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \min \quad \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \quad \frac{12\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} \quad 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 4$$

$$x\sqrt{2} + y\sqrt{12} + z\sqrt{75} = 9 - 5 \cdot 3z + \frac{25}{4}z^2 - z^2 + 16 \quad 3 \cdot 9 \cdot 4 \cdot \frac{1}{75}$$

$$x\sqrt{2} + y2\sqrt{3} + z \cdot 5\sqrt{3} = 4\sqrt{2} + 6\sqrt{3} \quad 25 - \frac{25}{7} \quad 4\sqrt{2}$$

$$x=4 \quad 2y+5z=6 \quad 25-4 \quad -\frac{25}{7} \quad 25 \cdot 3$$

$$y^2 + z^2 \rightarrow \min \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{7} \cdot \frac{10}{7} \quad \frac{5}{7} \cdot \frac{10}{7} \quad -15 \cdot \frac{10}{7} + 25$$



$$x^2 - 2x + 1 + x^4 + 8x^3 + 16x^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$\frac{x^4 + 8x^3 + 13x^2 - 14x - 8}{x^4 - x^3} = \frac{10x - 1}{x^3 + 9x^2 + 22x + 8}$$

$$x-1 + 2x+3 = 2+2 \quad \frac{9x^3 + 13x^2}{2x^3 - 9x^2} \quad (x-1)(x+4)(x^2+6x+8)$$

$$|a| \quad \frac{22x^2 - 14x}{22x^2 - 22x} \quad 8x - 8$$

$$|a+b|^2 - 4 \quad a^2 + ((a+b)^2 - 4)^2 = b^2 \quad (x-1)(x^3 + 9x^2 + 22x + 8) = 0$$

$$|2x+3| + 2x+3 = x-1 \quad \frac{x^3 + 9x^2 + 22x + 8}{x^3 + 4x^2} \quad \frac{x+4}{x^2 + 5x + 2}$$

$$x = -4 \quad D = 25 - 8 = \frac{15x^2 + 22x}{15x^2 + 22x} \quad \frac{2x+8}{2x+8} \quad 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{6x-x^2}-5 \leq \sqrt{3x-x^2}-\sqrt{x^2-x-2}$$

$$x(6-x)$$

$$x(3-x)$$

$$(x+1)(x-2)$$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{6}{2} = -3$$

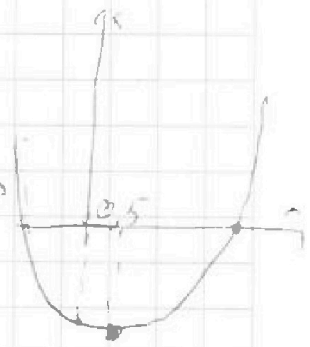
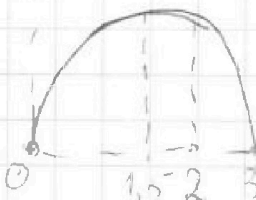
$$x \in [0; 3]$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x \in [0; 2] \cup [2; 3]$$

$$-x^2(6-x) \geq -x^2(3-x) + 4x + 2$$



$$\sqrt{6x-x^2} \in [0; 3]$$

$$\sqrt{3x-x^2} \in [0; \frac{3}{2}]$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \in [-\frac{3}{2}; 0]$$

$$2 \cdot 4$$

$$\frac{9}{4}$$

$$3x-x^2 \geq x^2-x-2$$

$$2x^2-4x-2 < 0$$

$$x^2-2x-1 < 0$$

$$D_1 = 4+4$$

$$(x-1)^2 < 2$$

$$1 \pm \sqrt{2}$$

$$x-1 < 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x < 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x \in (1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$$

$$\sqrt{6x-x^2} \in [2\sqrt{2}; 3]$$

$$1-\sqrt{2}$$

$$1+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3x-x^2} \in [\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

$$\sqrt{x^2-x-2} \in [0; 2]$$

$$SB \cdot (SA + 5x) = SA(SA + AD) = SA(SA + 3x + FD)$$

$$SA \cdot (SA + 3x) = SB(SB + BC) = SB(SB + 5x + EB)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b = 343 \cdot 10 \quad \begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \overline{) 149} \\ 63 \end{array}$$

$$a(a+1) - b(b+1) = 343 \cdot 10^{1000} = 7^3 \cdot 10^{1000}$$

$$a^2 + a - b^2 - b = (a-b)(a+b) + (a-b) = (a-b)(a+b+1)$$

$$(a-b)(a+b+1) = 7^3 \cdot 10^{1000} \quad 10^{1000} = c$$

$$a-b = 7^3 \cdot 10^n \quad a-b = c \cdot 7^3$$

$$\begin{cases} a-b = 7^3 \\ a+b+1 = c \cdot 7^3 \end{cases}$$

$$-y^3 - y^2 + y + 1$$

$$-y^2(y+1) - (y-1)(y+1)$$

$$a-b = 7^n \cdot 5^k \cdot c$$

$$a+b+1 = 7^{3-n} \cdot 5^{1000-k}$$

$$7^n \cdot 5^k \cdot c < \frac{7^n \cdot 5^k \cdot c + 7^{3-n} \cdot 5^{1000-k}}{2}$$

$$7^n \cdot 5^k \cdot c < 7^{3-n} \cdot 5^{1000-k} \rightarrow 7^{2n-3} \cdot 5^{2k-1000} \cdot c < 1$$

$$\begin{cases} x^2 - xy + y + y^3 = 0 \\ 2x + 1 - y^3 - 2y^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

$$2x + 1 - y^3 - 2y^2 - 2xy = 0$$

$$2x(y+1) - y^2(y+1) - (y-1)(y+1) = 0$$

$$(y+1)(2x - y^2 - y + 1) = 0$$

$$\begin{cases} 2x - y^2 - y + 1 = 0 \\ x^2 - xy + y + y^3 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - xy + y + y^3 = 0$$

$$2xy - y^3 - y^2 + y = 0$$

$$y^2 + 2x = y^2 + y - 1 \quad k = 1000 - k$$

$$4x^2 - 4xy + 4y + 4y^3 = 0$$

$$(y^2 + y - 1)^2 - 2y(y^2 + y - 1) + 4y + 4y^3 = 0$$

$$-2y^3 - 2y^2 + 2y$$