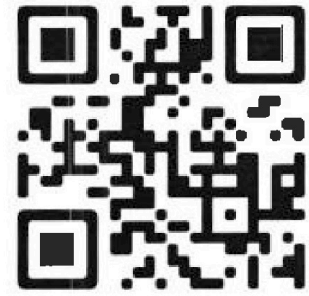




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13



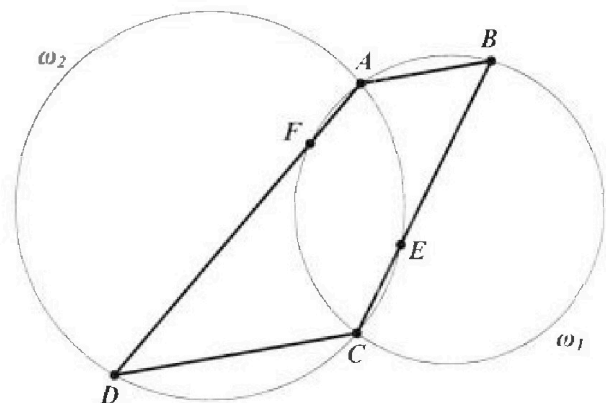
1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x - 2|$ и $|x^2 + 3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x + 1|$. Найдите x .
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 - y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a + 1)$, где $a \in \mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81 \cdot 10^{2024}$.
4. [5 баллов] Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4x - x^2} - 3} - 3 \leq \frac{1}{\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 2}}.$$

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O , а AA_1 и BB_1 - его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC , если $AB_1 = 6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.
6. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB < CD$). Окружность ω_1 , описанная около треугольника ABC , повторно пересекает сторону AD в точке F , а окружность ω_2 , описанная около треугольника ACD , повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE , если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1 : 2$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для прямоугольного треугольника выполняется
 $(|2x-2|)^2 + (|x^2+3x|)^2 = (|3x+1|)^2$, а также длина
стороны не может быть равной нулю, поэтому

$$\left. \begin{array}{l} |2x-2| \neq 0 \quad (1) \\ |3x+x^2| \neq 0 \quad (2) \\ |3x+1| \neq 0 \quad (3) \end{array} \right\} \text{Условие}$$

P.S $(|a|)^2 = a^2$

Решая ур-е (0), получаем:

- Раскроем все скобки и перенесем в одну часть:

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = 0. \text{ Это эвклидентно.}$$

$$(x-2)(x+3)(x^2+4x-1) = 0$$

Но 1 и 3 не могут быть решениями, ибо
это противоречит (1) и (2) соответственно. По-
тому решениями будут только корни квадратного
уравнения

$$x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x = -2 \pm \sqrt{5}$$

Ответ: $x_1 = -2 - \sqrt{5}$; $x_2 = -2 + \sqrt{5}$.

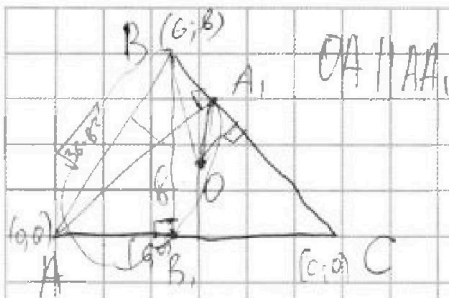


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

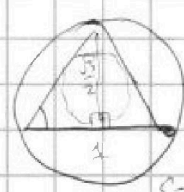
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Черновик



$$2R = \frac{1}{\sin 60} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}$$

$$S = \frac{1}{4}$$

$$S = BB_1 \cdot \frac{1}{4}$$

$$36 + b^2 = AA_1^2 - AB^2$$

AB, A1B - вписанный

Не одинаковы ли площади OBA, OAB1

$$OH_1 \cdot AB_1 = OH_2 \cdot BA_1$$

~~AA1 = y~~

~~OH2 = 2~~

$$AA_1 = y$$

$$BB_1 = x$$

$$S = \frac{1}{4} BB_1 \cdot \frac{1}{4}$$

$$OB = OA = \sqrt{4 + (6+a)^2}$$

$$A_1B^2 = BB_1^2 + x^2 - y^2$$

$$\frac{S_{OAB_1}}{S} = \frac{4a^2(c^2 - b^2)}{c^2} \cdot \frac{R \cdot BB_1^2 \cdot \frac{c^2}{b^2}}{4a^2 b^2}$$

$$4a^2 b^2 \cdot R \cdot BB_1^2 = \frac{S}{c}$$

(a, b, c)

$$AA_1 \cdot \frac{1}{4} b = BB_1 \cdot \frac{1}{4} c \Rightarrow AA_1 = BB_1 \cdot \frac{c}{b} \quad \left(R = \frac{S}{4abc} \right)$$

$$OH_1 = \sqrt{R^2 - BB_1^2}$$

$$R \cdot S = 2abc$$

$$R = \frac{2abc}{S}$$

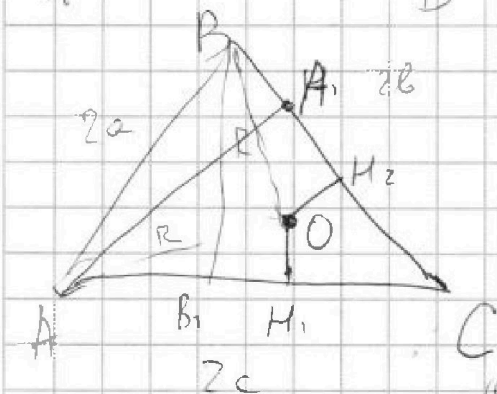
$$AB_1 = \sqrt{4a^2 - BB_1^2}$$

$$A_1B = \sqrt{4a^2 + BB_1^2}$$

$$OH_2 = \sqrt{R^2 - b^2}$$

$$AB_1 = \sqrt{4a^2 - BB_1^2}$$

$$OH_2 = \sqrt{R^2 - c^2}$$



$$4a^2 c^2 - (R BB_1)^2 = 4a^2 b^2 - (R BB_1 \frac{c}{b})^2 \Rightarrow (4a^2 - (BB_1 \frac{c}{b})^2) / (R^2 - b^2)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть мы нашли два таких числа, $a(a+1)$ и $b(b+1)$.
Рассмотрим их разность $a(a+1) - b(b+1)$ (пусть $a > b$
для определенности). Тогда:

$$a^2 + a - b^2 - b = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$(a-b)(a+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

Заметим, что эти скобки имеют разную четность,
Тогда одна скобка должна делиться на $81 \cdot 10^{2024}$, а
вторая - вообще не делиться на 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} - \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}} \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x-x^2-3}+3}{(\sqrt{4x-x^2-3}-3)(\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2})} \leq 0$$

При решении ОДЗ уже выясним, что

$\sqrt{4x-x^2-3}-3 < 0$, поэтому домножим на него, меняя знак нр-во

$$\frac{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x-x^2-3}+3}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}} \geq 0$$

Числитель всегда больше знаменателя, ибо равен знаменателю + положит. число. Поэтому когда знаменатель > 0 , нр-во выполняется:

$$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2} > 0$$

$$\sqrt{2x-x^2} > \sqrt{x^2+x-2}. \text{ Оба подкоренных выраж } > 0$$

$$2x-x^2 > x^2+x-2$$

$$2x^2+x-2 < 0$$

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$$

Учитывая ОДЗ, в ответ: $x \in \left[3; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$

Если же числитель ≤ 0 , то и знаменатель ≤ 0 , тогда нам тоже подходит. Иные же (числ > 0 и знам < 0 - не подходит)

$$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x-x^2-3}+3 \leq 0$$

ОДЗ:

$$1) 4x-x^2-3 \geq 0$$

$$(x-3)(x+3) \leq 0$$

$$x \in [-3; 3]$$

$$2) x^2-2x \leq 0$$

$$x(x-2) \leq 0$$

$$x \in [0; 2]$$

$$3) x^2+x-2 \geq 0$$

$$(x+2)(x-1) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$$

$$\Downarrow$$

$$x \in [1; 2]$$

$$4) \sqrt{4x-x^2-3} \neq 3$$

$$x^2-4x+6 \neq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$5) \sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2} \neq 0$$

$$x \neq \pm \sqrt{17}$$

$$\text{Итого ОДЗ: } x \in \left[3; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right]$$



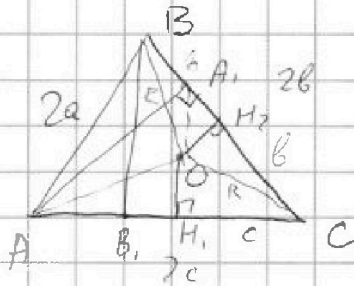
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Введем следующие обозначения:

$AB=2a$; $BC=2b$; $AC=2c$. Середины

перпендикуляров к AC и BC соответственно, на пересечении которых и лежат O , OH_1 и OH_2 .

Также $AA_1 \cdot 2b = BB_1 \cdot 2c = 2S_{ABC} \Rightarrow AA_1 = BB_1 \cdot \frac{c}{b}$;

Тогда по Тл. Пифагора: $A_1B = \sqrt{(2a)^2 - (BB_1 \cdot \frac{c}{b})^2}$

$AB_1 = \sqrt{(2a)^2 - BB_1^2}$. Обозначив $OA=OB=R$ за R , получим

$OH_1 = \sqrt{R^2 - c^2}$ (т.к. $H_1C=c$) и $OH_2 = \sqrt{R^2 - b^2}$ ($H_2B=b$).

Но $\sqrt{4a^2 - (BB_1 \cdot \frac{c}{b})^2} \cdot \sqrt{R^2 - b^2} = \sqrt{4a^2 - BB_1^2} \cdot \sqrt{R^2 - c^2}$.

Действительно: (возводим в квадрат, все положительное)

$$(4a^2 - (BB_1 \cdot \frac{c}{b})^2)(R^2 - b^2) = (4a^2 - BB_1^2)(R^2 - c^2)$$

$$4a^2c^2 - R \cdot BB_1^2 = 4a^2b^2 - (R \cdot BB_1 \cdot \frac{c}{b})^2$$

$$4a^2(c^2 - b^2) = R^2 \cdot BB_1^2 \cdot \frac{c^2 - b^2}{b^2}$$

Если $c^2 - b^2 \neq 0$ выполняются,
если нет - сокращаем

$$4a^2 = R^2 \cdot \frac{BB_1^2}{b^2}$$

Возьмем корень, все расст. > 0

$$2ab = R \cdot BB_1, \text{ но } BB_1 = \frac{S_{ABC}}{b}, \text{ а } R = \frac{2S_{ABC}}{c}$$

Тождество доказано. Но тогда $A_1B \cdot OH_2 = OH_1 \cdot AB_1 = 2S_{OBA_1B_1}$

$$\Rightarrow OH_1 (\text{искомая величина, перп.}) = \frac{2 \cdot S_{OBA_1B_1}}{AB_1} = \frac{2 \cdot b}{c} = 2.$$

Ответ: 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{y^3 - 5y^2 + 3y - 2}{2 - y} \quad y \neq 2, \text{ это решение не подходит}$$

Подставляя в первое уравнение и раскрывая скобки, получаем:

$$y - 7y^5 - 2y^4 + 8y^3 - 2y = 0$$

$$y(y+1)(y^4 - 8y^3 + 6y^2 - 2y - 2) = 0$$

$$\text{При } y=0 \quad x = \frac{-2}{2-0} = -1$$

$$\text{При } y=1: \quad \frac{-2+5-3-2}{2+2} = -\frac{1}{3}$$

Ответы $(-1; 0)$ и $(-\frac{1}{3}; -1)$.
(одни из)

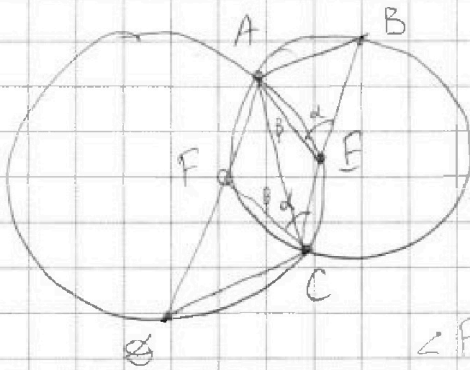


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~Доказано~~

Решение: Для начала докажем,

что $AE \parallel FC$. Пусть $\angle FCE = \alpha$, тогда

$\angle FAB = \frac{180-\alpha}{2}$ из вписанности $\triangle FAB$, тогда

$\angle ADC = \alpha$ из того, что $ABCO$ - трапеция, тогда $\angle AEB = \alpha$

из вписанности $\triangle CEA \Rightarrow \angle AEB = \angle FCB \Rightarrow AE \parallel FC$. Но

тогда $\angle ACE = \angle ACF$ как накрест лежащие. Тогда:

$$\frac{EC}{\sin \beta} = 2R(w_2), \text{ а } \frac{AF}{\sin \beta} = 2R(w_1) \Rightarrow \frac{AF}{CE} = \frac{R(w_1)}{R(w_2)} = \frac{1}{2}$$

Отв: $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2} \leq \sqrt{4x-x^2} - 3$$

меньше 0 меньше 0
должен быть

$x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, 2\right]$ — уже решали.

Тогда возведение в квадрат не сразу меняет знак

$$2x - x^2 - x^2 - x + 2 - 2\sqrt{2x-x^2}\sqrt{x^2+x-2} \geq 9 + 4x - x^2 - 3 - 6\sqrt{4x-x^2}$$

$$x^2 + 3x - 4 \leq -6\sqrt{4x-x^2} - 2\sqrt{2x-x^2}\sqrt{x^2+x-2}$$

$$-6\sqrt{4x-x^2} - 2\sqrt{2x-x^2}\sqrt{x^2+x-2} \geq -6\sqrt{4x-x^2} \quad \text{При } x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, 2\right]$$

~~Это выражение монотонно возрастает. Поэтому $f(x) = 4x^2 - x^2 - 3$~~

~~при $x = 1,25 \leq f(x)$ при $x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, 2\right] \Rightarrow$ со знаком~~

~~минус наоборот, $6\sqrt{4x-x^2}$~~

$x^2 + 3x + 4 > 0$ при ~~любых~~ $x \in [1, 2]$, а правая часть < 0 . То есть, такое не выполняется при $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ это невозможно

Ответ: $x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$$

$$2x\sqrt{2} + 3y\sqrt{2} + z\sqrt{29} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$$

$$(z-2)\sqrt{29} = \sqrt{2}(4-2x-3y)$$

Если $z \neq 2$, можем поделить на $(z-2)$; и $4-2x-3y \neq 0$.

$$\frac{\sqrt{29}}{z} = \frac{4-2x-3y}{z-2}$$

Рациональное число равно иррациональному, противоречие. Тогда $z=2$, и

$$4-2x-3y = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.$$

Нам нужно минимизировать (x^2-y^2) . При этом

$$2x+3y=4 \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$$
 Решая Диофантово уравнение,

$$\text{получаем: } \begin{cases} x=2-3t \\ y=2t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}. \text{ А } (x^2-y^2) \text{ тогда:}$$

$$(2-3t)^2 - (2t)^2 = 5t^2 - 12t + 4, \text{ парабола с ветвями}$$

вверх достигает минимума в $x_{\text{вз}} = \frac{-12}{5 \cdot 2} = \frac{6}{5}$. Бли-

жайшая целая точка (из св-ва параболы) и будет

t_{min} (в других целых точках значения будут

больше, парабола симметрична относительно вершины).

Тогда $t_{\text{min}} = 1$ (ближе всего к $\frac{6}{5}$), $x = -1$; $y = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + z^2 = (-1)^2 - 2^2 + 2^2 = 1. \quad \text{Ответ: } 1$$

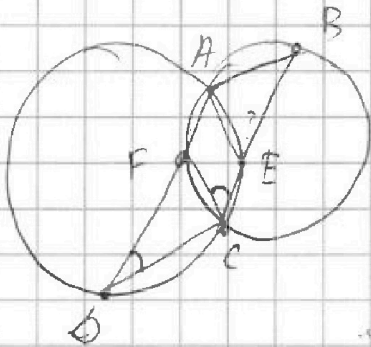


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$FCE = 180 - FAB \text{ (из вн.)} = \angle ADC = \angle AEB$$

$$AE \parallel FC$$

Пусть $a-b$: $a-b = 2^{2024} \cdot x$ $x \leq 10^{1012} \cdot 9$

$2b+1=0$
 $a = b + 2^{2024} \cdot x$

$1 + 2b + 2^{2024} \cdot x = \frac{81 \cdot 5^{2024}}{x}$ Не больше половины 5-го

0,7 проки

$2b = \frac{81 \cdot 5^{2024}}{x} + 2^{2024} \cdot x - 1$

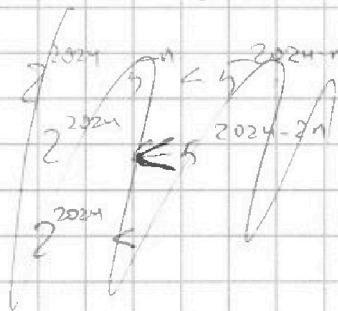
~~2x-1=0~~

$2y^3 - 24y^2 + 12y - 2$
преобразовать

$2y^3 - 12y^2 + 6y - 1 = 0$

$a(a-1) + b(b+1) \mid a-b \mid (a+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$
делится на 81

$5 \mid 5^{2024-n}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

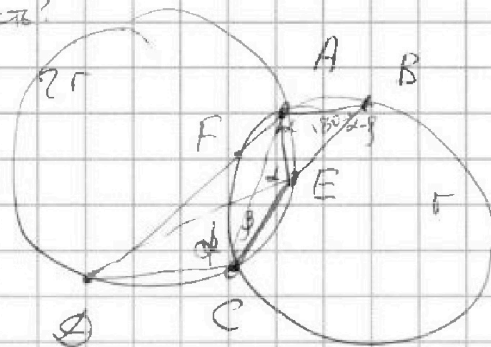
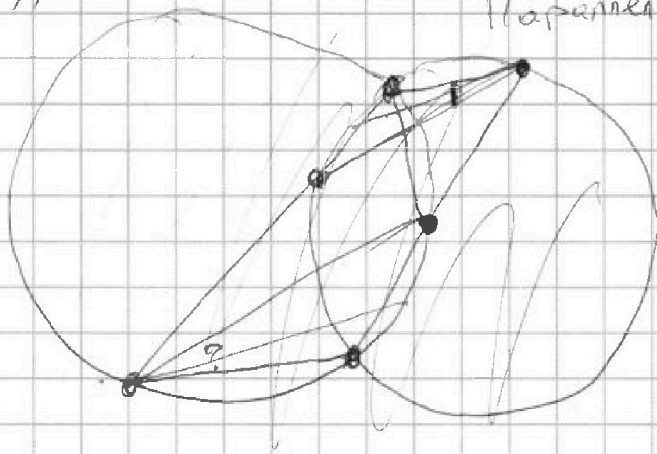
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7)

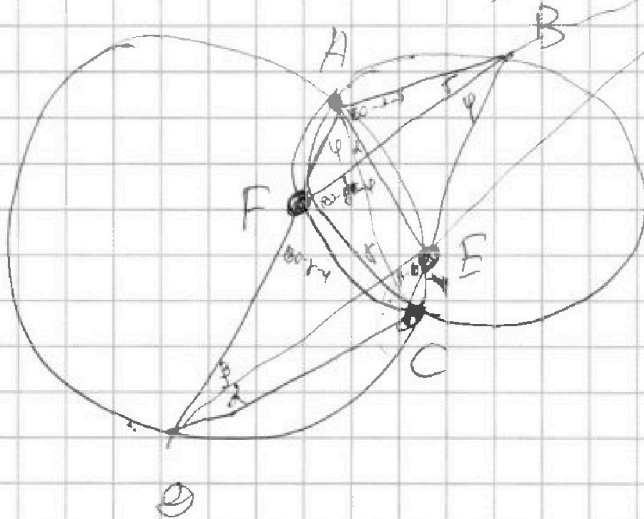
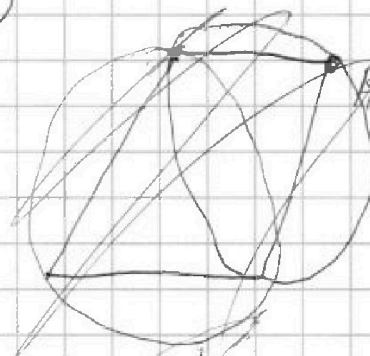
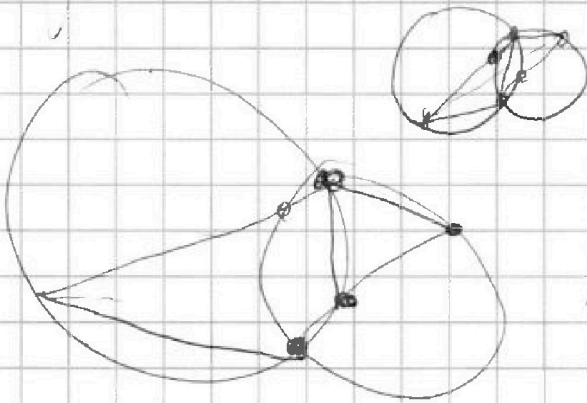
Параллельность?



$$\frac{CE}{AF} > \frac{BC}{\sin \alpha} = 2r$$

$$\frac{AD}{\sin \alpha} = 4r$$

$$AD = 2BC$$



Достаточно: $\angle ACB = \beta$
 или $\angle ACF = \alpha$
 $\angle FCB = \alpha + \beta$ из
 вписанности

$$\angle AFC = 180 - \alpha - \beta$$

$$\begin{aligned} \angle CAB &= 180 - \alpha - \beta - \gamma = \\ &= 180 - \beta - \gamma - \alpha \end{aligned}$$

$$180 - \alpha - \gamma - (\beta + \alpha)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) $\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}} - 3 \leq \frac{1}{\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2}}$

$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}} - 3 = 0$

$\frac{\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2} - \sqrt{4x-x^2-3} + 3}{(\sqrt{4x-x^2-3})^2 - 3(\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2})} \leq 0$

всегда < 0

$\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2} - \sqrt{4x-x^2-3} + 3 \geq 0$

$(\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{x^2+x-2})$

Знаки знаменателя:

$y^4 - 8y^3 + 6y^2 - 2y - 2 \mid y^2 - 2$

$y^4 - 8y^3 + 6y^2 - 2y - 2 \mid y^2 - 2$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{4}$

ОДЗ:

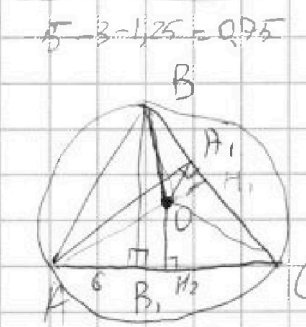
1) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ max=1
 $(x-3)(x-1) \leq 0$
 $x \in [1; 3]$

2) $x^2 - 2x \leq 0$
 $x \in [0; 2]$

3) $x^2 + x - 2 \geq 0$
 $(x+2)(x-1) \geq 0$
 $x \in [-2; 1]$

Все существует только при $x=1$
 $x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$

$x \in [1; 2]$



$S(OBA_1) = 6$

$S(OBA_1) = \frac{1}{2} \cdot OH \cdot \frac{1}{2} BC = \frac{1}{4} \cdot OH \cdot BC$

$OB = \frac{1}{2} BC$

$OB = \sqrt{\frac{1}{4} BC^2 - OH^2}$

$4x - x^2 - 3 = 9$

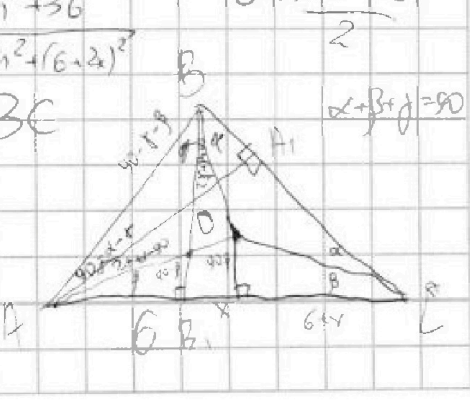
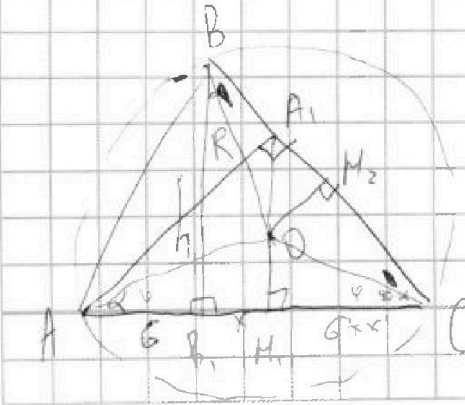
$x^2 - 4x + 6 = 0$

$BB_1 = h \Rightarrow AB = \sqrt{h^2 + 36}$

$BC = \sqrt{h^2 + (6-2)^2}$

$6 = \frac{AB \cdot OH}{2}$

$\alpha + \beta + \gamma = 90$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $\begin{cases} 2x-2 \neq 0 \\ 3x+1 \neq 0 \\ x^2+3x \neq 0 \end{cases}$ ~~Все~~ Черновик
 $2x-2 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow$ Все по модулю > 0

$$(2x-2)^2 + \cancel{x^2} (x+3)^2 = (3x+1)^2$$

$a=5t+2$
 $b=5k+3$

$$4x^2 - 8x + 4 + x^4 + 6x^3 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 = 0$$

$21 - 18 - 42 + 3 \neq 0$

$$(x-1)(x^3 + 7x^2 + 11x - 3) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + 4x - 1)(x+3) = 0$$

$(x-1)$ генератор

$$\begin{array}{r} x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 14x + 3 \\ x^4 - x^3 \\ \hline 7x^3 - 7x^2 \\ -11x^2 + 11x \\ \hline -3x + 3 \\ -27 + 63 - 33 - 3 = 0 \end{array}$$

$$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$$

$$2x\sqrt{2} + 3y\sqrt{2} + z\sqrt{29} = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{29}$$

~~$x^4 + 6x^3$~~

$$\begin{array}{r} x^3 + 7x^2 + 11x - 3 \\ x^3 + 3x \\ \hline 4x^2 + 11x \\ -4x^2 + 12x \\ \hline -x + 3 \end{array}$$

$$\sqrt{2}(2x+3y-4) = \sqrt{29}(2-z)$$

целое число
не может быть
выражено $\frac{\sqrt{29}}{2}$

Пусть $z \neq 2$

$D = 20$
 $x = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{5}}{1}$
ответ

$$\frac{2x+3y-4}{2-z} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

разы = целому \Rightarrow противоречие. $\Rightarrow z = 2$. $2x+3y-4=0$

$$a(a+1) - b(b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

Все 2-х в сумме $\begin{matrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ -4 & 4 \end{matrix}$

$x = 2 + 3t$
 $y = 2t$

$$a^2 - b^2 + a - b = 81 \cdot 10^{2024}$$

$$(a-b)(a+b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$$

$(2-3t)^2 - (2t)^2 =$
 $= 4 - 12t + 9t^2 - 4t^2 = 4 - 12t + 5t^2$
min $t = \frac{+12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5} = \frac{6}{5}$

Они равны \downarrow четности. $a-b < a+b+1$

$$\begin{cases} a-b+1 \\ a-b=3 \\ a-b=9 \\ a-b=81 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b+1 = 81 \cdot 10^{2024} \\ a+b+1 = 27 \cdot 10^{2024} \\ a+b+1 = 9 \cdot 10^{2024} \\ a+b+1 = 10^{2024} \end{cases}$$

5 вариантов

Ближе всего $t = 3 \checkmark$
 $(-1)^2 - 2^2 + 3^2 = 1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

$$2x^2 - 5xy + y^3 - y^2 - 3y = 0$$

~~$$x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 \neq 0$$~~
~~$$-2x^2 + xy + 4y^3 - 5y^2$$~~

$$y=0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x = -1 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 + 2x - 3xy + 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

(x+1)

$$(x+1)^2 + y(2y - 3x - 3) = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 + y^2 - y - 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y^3 - 3y^2 - 2y = 0$$

$$y(y^2 - 3y - 2) = 0$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

~~$$3y(x+1) + 2y^2 = 0$$~~

$$4x - 2xy - 2y^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$$

$$(x+1)(x+1-3y) + 2y^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3y^3 - 3y^2 - 6y - 9 = 0$$

$y^2 - 2$

$$\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} - \frac{19 \pm 11\sqrt{17}}{11}$$

-6

~~$$(x^2 - 4x + 3y^3 - 3y^2 - 6y - 9) - (3xy + y^2 - y)$$~~

$$(x-2)^2 =$$

$$8 - 20 + 6 - 2$$

$$x(2-y) = y^3 - 5y^2 + 3y^2 - 2$$

$$y \neq 2$$

$$-x(x-2y) + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$16 - 64 + 24 + 2$$

$$\frac{y^3 - 5y^2 + 3y - 2}{2-y} \left(\frac{y^3 - 5y^2 + 3y - 2}{2-y} - 2y \right) + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$8 - 16\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} - 2$$

$$\left(\frac{y^3 - 5y^2 + 3y - 2}{2-y} \right) \left(\frac{y^3 - 3y^2 - y - 2}{2-y} \right) + y^3 - 3y^2 - 1 = 0$$

$$(y^3 - 5y^2 + 3y - 2)(y^3 - 3y^2 - y - 2) + (y^3 - 3y^2 - 1)(y^2 - 4y + 4) = 0$$

~~$$y^6 - 3y^5 - y^4 - 2y^5 - 5y^4 + 15y^4 + 5y^3 + 10y^3 + 3y^4 + 9y^3 - 3y^2 - 6y - 2y^3 + 6y^2 + 4y + 4$$~~

~~$$+ y^5 - 4y^4 + 4y^3 - 3y^4 + 12y^3 - 12y^2 - y^2 + 4y - 1 = 0$$~~

$$= y^6 + 7y^5 - 2y^4 + 8y^3 + \dots - 2y = 0$$

$\therefore y+1$

$$y(y^5 - 7y^4 - 2y^3 + 8y^2 - 2) = 0$$

$$\frac{y^5 - 7y^4 - 2y^3 + 8y^2 - 2}{y^5 + 4y^4}$$

$$-8y^4$$

$$-8y^4 - 8y^3$$

$$\frac{6y^4 + 6y^2}{y^4 + 8y^2 + 6y^2}$$

$$2y^2 - 2$$

$$2y^2 + 2y$$

$$-2y^2$$

$$y(y+1)(y^4 - 8y^3 + 6y^2 + 2y - 2) = 0$$