



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



- [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
- [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
- [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
- [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
- [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
- [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
- [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n 7

Пусть n - число вершин многоугольника, a_1, \dots, a_n - величины n -угл.

$$\left\{ \begin{aligned} S_{\text{вершин}} &= \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n, \text{ где } a_1 = 143^\circ; d = 2^\circ \\ S_{\text{вершин}} &= 180^\circ n - 360^\circ \text{ для любого многоугольника.} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{2 \cdot 143 + 2(n-1)}{2} \cdot n = 180n - 360$$

$$142n + n^2 = 180n - 360; n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$D_1 = \left(\frac{38}{2}\right)^2 - 360 = 361 - 360 = 1$$

$$\begin{cases} n = \frac{38-1}{2} = 18 & (2) \\ n = \frac{38+1}{2} = 20 & (1) \end{cases}$$

Проверяем (1) $n = 20 \Rightarrow a_{20} (20\text{-я вершина}) =$

$$= a_1 + 19 \cdot d = 143 + 19 \cdot 2 = 143 + 38 = 181^\circ > 180^\circ$$

(2) $n = 18$; $a_{18} = a_1 + 17d = 143 + 17 \cdot 2 = 143 + 34 = 177^\circ$

Тогда 18 - наибольшее возможное число вершин \checkmark

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x_0 = -\frac{16}{50}, y_0 = -\frac{12}{50}, z_0 = 1$$

Проверка:

$$x_0 \ln 16 + y_0 \ln 8 + z_0 \ln 24 = \ln 6$$

$$-\frac{16}{50} \ln 16 - \frac{12}{50} \ln 8 + \ln 24 = \ln 6 \quad | \cdot 50;$$

$$-16 \ln 16 - 12 \ln 8 + 50 \ln 24 = 50 \ln 6;$$

$$\ln \left(\frac{24^{50}}{16^{16} \cdot 8^{12}} \right) = \ln (6^{50}) \Leftrightarrow \frac{24^{50}}{16^{16} \cdot 8^{12}} = 6^{50};$$

$$3^{50} \cdot (2^3)^{50} = 2^{60} \cdot 3^{50} \cdot (7^2)^{16} \cdot (2^3)^{12};$$

$$3^{50} \cdot 2^{750} = 2^{60} \cdot 3^{50} \cdot 7^{32} \cdot 2^{36} \quad \checkmark \text{ Тогда при } x = -\frac{16}{50}, y = -\frac{12}{50};$$

$z = 1$ $x^2 + y^2 + z^2$ принимает наименьшее значение.

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{256 + 144}{2500} + 1 = \frac{2800}{2500} = \frac{28}{25} = \frac{146}{100} = 1,46.$$

Ответ: 1,46; 1,16.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

22
Тогда ширина будет достигаться при z в вершине параболы.

$$y_0 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{225}{16} = -\frac{3 \cdot 16}{4 \cdot 50} = -\frac{12}{50} = -\frac{6}{25}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{-2y - 3}{4} = \frac{-12 - 3}{2} = \frac{-15}{2} = -\frac{15}{2}$$

$$z = 1$$

Проверка:

$$x_0 \ln 16 + y_0 \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6;$$

$$-\frac{15}{2} \ln 16 + \frac{6}{25} \ln 8 + \ln 24 = \ln 6 \quad | \cdot 200$$

$$-157 \ln 16 + 24 \ln 8 + 100 \ln 24 = 100 \ln 6$$

$$\ln \frac{24^{100}}{16^{157} \cdot 8^{24}} = \ln 6^{100} \Leftrightarrow \frac{24^{100}}{(2^4)^{157} \cdot (2^3)^{24}} = 2^{100} \cdot 3^{100}$$

$$(2^3)^{100} \cdot 3^{100} = 2^{100} \cdot 3^{100} \cdot 4 \cdot 57 + 3 \cdot 24$$

$$\Rightarrow 4x + 3y + 3 - 1 = 0 \quad y = \frac{-2 - 4x}{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 1 + \frac{16x^2 + 16x + 4}{9} = \frac{25}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{13}{9}$$

передняя коэф. при $x^2 > 0 \Rightarrow$ парабола вверх, минимум

достигается в вершине

$$x_0 = \frac{16}{2 \cdot \frac{25}{9}} = \frac{16}{50} = -\frac{16}{50}; \quad y_0 = \frac{-2 + \frac{64}{50}}{3} = \frac{-\frac{36}{50}}{3} = -\frac{12}{50}$$

↑
позв. вершина



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n 2.

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6,$$

$$x \ln 2^4 + y \ln 2^3 + z \ln (3 \cdot 2^3) = \ln (3 \cdot 2),$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + z \ln 3 = \ln 2 + \ln 3,$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 - \ln 2 = \ln 3 - z \ln 3$$

$$\ln 2 (4x + 3y + 3z - 1) = \ln 3 (1 - z)$$

$$4x + 3y + 3z - 1 = \frac{\ln 3}{\ln 2} (1 - z)$$

$$4x + 3y + 3z - 1 = \log_2 3 (1 - z)$$

$\in \mathbb{Z}$ $\in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \log_2 3 (1 - z) \in \mathbb{Z}, \text{ но } \log_2 3 \notin \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow \log_2 3 (1 - z) \in \mathbb{Z}$ только в том случае,

когда $1 - z = 0$, $z = 1$.

$$\Rightarrow 4x + 3y + 3 - 1 = 0; \quad x = \frac{-2 - 3y}{4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(-2 - 3y)^2}{16} + y^2 + 1 = \frac{9y^2 + 12y + 4}{16} + y^2 + 1 =$$

$$= \frac{7 \cdot 5y^2 + 12y + 20}{16} = \frac{25}{16}y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{5}{4}$$

Заметим, что $\frac{25}{16}y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{5}{4}$ — квадрат, что и требуется.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н3

$p, q \in \mathbb{N}$, p, q - простые

$$p^2 - q^2 = 292, \quad (p+q)(p-q) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$p^2 - q^2 = 292 > 0 \Rightarrow p > q, \quad p+q > p-q$$

Разделим 292:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 18, 22, 24, 33, 36 ...

Т.к. $p, q, p+q, p-q \in \mathbb{N}$, то:

$$\begin{cases} p-q=1 \\ p+q=292 \end{cases}$$

Заметим, что разность между двумя соседними делителями $(p-q)$ и $(p+q)$ имеет разницу четности десятикратно, т.к.

$$\begin{cases} p-q = \text{член } 2^k \\ p+q = \text{член } 2^k \end{cases} \Rightarrow \text{разность} = 0 \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} p-q=2 \\ p+q=296 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=149 \\ q=197 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} p-q=4 \\ p+q=196 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=101 \\ q=97 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} p-q=6 \\ p+q=132 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=39 \\ q=27 \end{cases} \quad \text{т.к. } p, q \text{ - простые}$$

$$\begin{cases} p-q=8 \\ p+q=99 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\begin{cases} p-q=12 \\ p+q=66 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=31 \\ q=13 \end{cases} \quad \text{т.к. } 21 = 1+2+3+4+5+6 \text{ - мин. сумма в разл. числах}$$

$$\begin{cases} p-q=18 \\ p+q=44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=29 \\ q=7 \end{cases} \quad \text{т.к. } 27 = 1+2+3+4+5+6 \text{ - ?}$$

$$\begin{cases} p-q=22 \\ p+q=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=69 \\ q=63 \end{cases} \quad \text{т.к. } p, q \in \mathbb{N} \text{ - простые}$$

$$\begin{cases} p-q=24 \\ p+q=33 \end{cases} \quad \emptyset$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3
1) $p = 39$
 $q = 22$
 $p, q - \text{б из 2 посл. пар. чисел}$
 $\Rightarrow p - q = a_i - a_i$ $\Rightarrow a_i, a_i - \text{числа по}$
 из 2 посл. чисел
 $p - q = a_i - a_i = 17 > 6$ не подходит
 $\text{Всего на странице пох. формул системы 7 и посл. из 2}$
 $\text{послед. чисел} = 2 \times 6 - 2 \times 6 = 0$

2) $p = 155$
 $q = 197$
 $p = 101$
 $q = 97$
 $\Rightarrow M \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37\}$
 $p - \sum M \{32\}$
 $q - \sum M \{34\}$

(1) Заметим, что если $M \{17, 18, 19, 20, 21, 22\}$, то

$$\sum M = 98 < 101 = p - \text{не подходит}$$

$M \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\} - \sum = 105$, получим больше
 $\text{получим из } M \text{ получим } 93 < 97$

$M \{13, \dots, 29\} - \sum = 172$, $\text{при этом получим больше}$

$$98 < 101 \Rightarrow \text{если рассмотреть больше } < 101 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$M \{14, 15, 20\} - \sum = 179$, при этом получим

$\text{получим } 105 > 101 - \text{больше не надо}$

Тогда $M \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$

Отсюда $M \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$

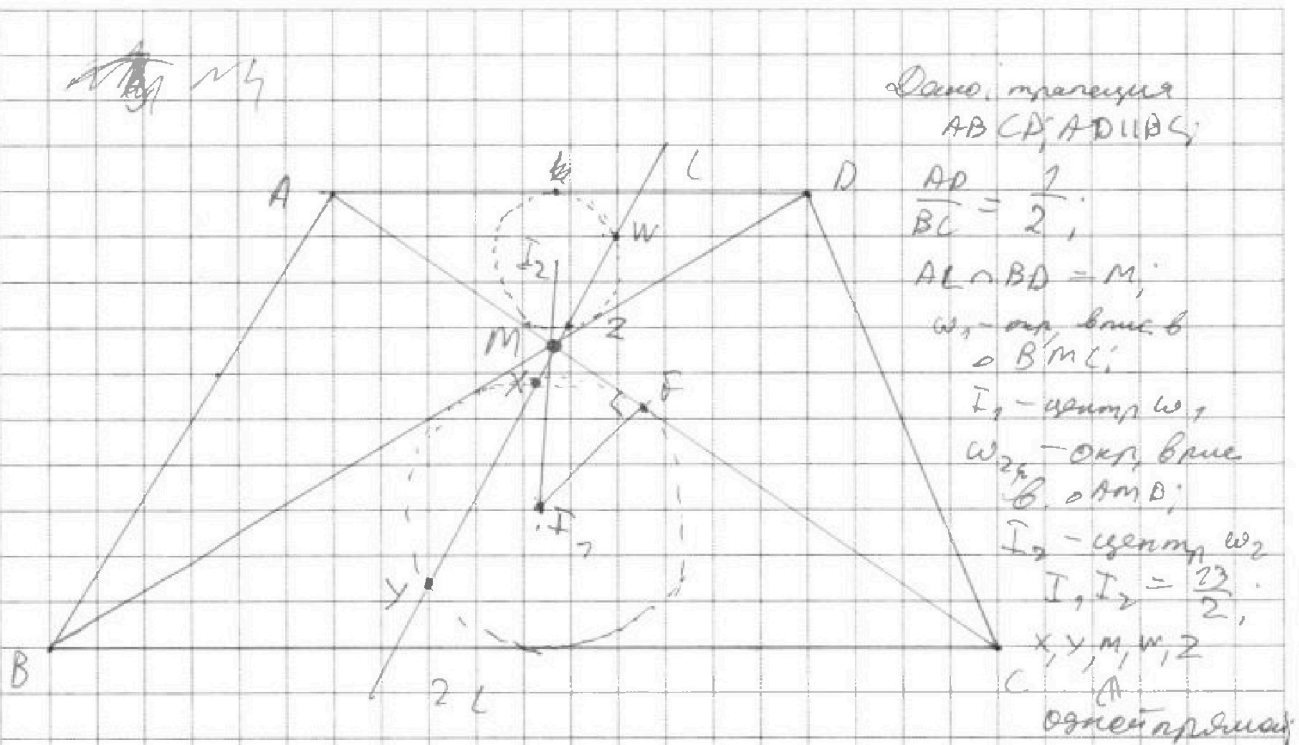


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
7 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: трапеция
ABCD, AD || BC;

$$\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2};$$

$$AC \cap BD = M;$$

ω_1 - окр. впис. в $\triangle BMC$;

I_1 - центр ω_1 ;

ω_2 - окр. впис. в $\triangle AMD$;

I_2 - центр ω_2 ;

$$I_1, I_2 \in \frac{AC}{2};$$

X, Y, M, W, Z

с. одной прямой;

$X, Y \in \omega_1$;

$W, Z \in \omega_2$;

$$MZ \cdot MY = 5$$

Найти: I_1, X - ?

Решение:

$$\angle BMC = \angle AMD \text{ (верт. уг.)}$$

$\angle DBC = \angle ADB$ как впис. при $AD \parallel BC$ и сеч. BD

$$\Rightarrow \triangle BMC \sim \triangle AMD \text{ (по 2-м уг.)} \Rightarrow \frac{MW}{MY} = \frac{MZ}{MX} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2} = \frac{I_1 X}{I_2 Z}$$

(все совп. и \sim - сов. по теореме)

ω_1, ω_2 - впис. окр. $\Rightarrow I_2 M$ - бисек. $\angle AMD$; $\angle AMI_2 = \angle I_2 M D$

$I_1 M$ - бисек. $\angle BMC$; $\angle BMI_1 = \angle I_1 M C$

$\Rightarrow I_2 M I_1$ - бисек. $\angle AMD$ и $\angle BMC \Rightarrow I_2, M, I_1$ лежат на одной прямой.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \frac{I_2 M}{I_1 M} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$I_2 M = \frac{1}{2} I_1 M; I_1 M = 2 I_2 M$$

$$I_1 I_2 = I_1 M + I_2 M = 3 I_2 M; I_2 M = \frac{23}{6}; I_1 M = \frac{20}{6}$$

$$\frac{m_z}{m_x} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_z = \frac{1}{2} m_x; \frac{m_w}{m_y} = \frac{1}{2}; m_w = \frac{1}{2} m_y$$

$$m_z \cdot m_y = m_z \cdot 2 \cdot m_w = 2 m_z$$

$$m_z \cdot m_y = \frac{1}{2} m_x \cdot m_y = \frac{m_x \cdot m_y}{2}$$

Прямая ω_1 касается MN в точке F . $\Rightarrow MF$ - отрезок касательной

$I_1 X = I_1 F$ - радиусы ω_1 .

$$MF^2 = m_x \cdot m_y \text{ (по св. сек. и кас.)} = 2 m_z \cdot m_y = 20$$

MF - кас $\Rightarrow \angle MFI_1 = 90^\circ$ (по св. кас) $\Rightarrow MF I_1$ - диаметр.

(по опр.)

По теореме Пифагора

$$MF^2 + FI_1^2 = MI_1^2$$

$$FI_1 = \sqrt{MI_1^2 - MF^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{6}\right)^2 + 10} = \sqrt{\frac{6^2 + 360}{36}} = \frac{\sqrt{1036}}{6} = \frac{2\sqrt{259}}{6} = \frac{\sqrt{259}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{259}}{3}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

$$5 - 4 \sin \frac{3\alpha}{7} \vee 4 \cos \frac{\alpha}{7} - 5 \sin \frac{\alpha}{7}$$

Пусть $\frac{\alpha}{7} = \alpha$

$$5 - 4 \sin 3\alpha \vee 4 \cos 2\alpha - 5 \sin \alpha$$

$$5 - 4(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) \vee 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) - 5 \sin \alpha$$

$$16 \sin^3 \alpha + 8 \sin^3 \alpha - 7 \sin \alpha + 7 \vee 0$$

Пусть $\sin \alpha = t$, $-1 \leq t \leq 1$

$$26t^3 + 8t^2 - 7t + 7 \vee 0$$

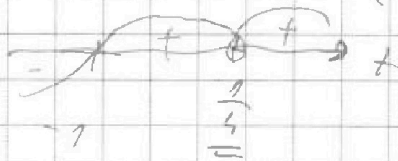
Замечая, что при $t = -1$, $26t^3 + 8t^2 - 7t + 7 =$

$$= -16 + 8 + 7 + 7 = 0 \Rightarrow t = -1 \text{ — корень } 26t^3 + 8t^2 - 7t + 7 \vee 0$$

$$\begin{array}{r} 26t^3 + 8t^2 - 7t + 7 \mid t + 1 \\ \underline{26t^3 + 26t^2} \\ -18t^2 - 7t + 7 \\ \underline{-18t^2 - 18t} \\ 11t + 7 \\ \underline{11t + 11} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 26t^3 + 8t^2 - 7t + 7 = (t + 1)(26t^2 - 8t + 7) = (t + 1)(4t - 1)^2$$

$$(t + 1)(4t - 1)^2 \vee 0, \quad (t + 1)\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 \vee 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

Проверяем, что если $\begin{cases} t \neq -1 \\ t \neq \frac{1}{4} \end{cases}$, то $16t^3 + 8t^2 - 2t + 1 > 0$.

$$\begin{cases} \cos \alpha \neq -1 \\ \sin \alpha \neq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{3\alpha}{4} \neq -1 \\ \cos \alpha \neq \frac{1}{4} \quad \sin \frac{\alpha}{4} \neq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Важно

Проверяем, что $16t^3 + 8t^2 - 2t + 1 > 0$

$$\Rightarrow 5 - 4 \sin \frac{3\alpha}{4} > 4 \cos \frac{\alpha}{4} - 5 \sin \frac{\alpha}{4}$$

Обратно $5 - 4 \sin \frac{3\alpha}{4}$ больше



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) ^{кб} $n=3$:

В этом случае нам позволено любые 4 точки из 7, кроме тех, которые лежат в одной прямой. Кроме того шуря, когда все точки

лежат в одной прямой: $\binom{7}{4} - 6 = 35 - 6 = 29$

лежат в одной прямой, т.е. в одной прямой

кол-во пирамид: $\binom{7}{4} - \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$

$$= 35 - 35 = 0$$

→ всего пирамид = $29 + 35 = 64$

Ответ: 64.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. $(p-q)(p+q) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$ $p > q$ $2 \times 3 = 22$

$792 = 2 \cdot 396 = 4 \cdot 198 = 8 \cdot 99 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$ $4 - 3 \cdot 2 = 24$

$\Rightarrow p - q = 24$ $\Rightarrow p + q = 33$

$p - q = 2$
 $p + q = 396$

$p - q = 3$
 $p + q = 264$

$p - q = 4$
 $p + q = 198$

$p - q = 6$
 $p + q = 99$

$p - q = 8$
 $p + q = 59$

$p - q = 9$
 $p + q = 99$

$p - q = 12$
 $p + q = 88$

$p - q = 18$
 $p + q = 72$

$p - q = 22$
 $p + q = 36$

~~$p - q = 24$
 $p + q = 33$~~

732
 66
 792
 66
 132

18
 144
 352
 $33 \cdot 12$
 396
 66
 132

$264 \cdot 3$
 $24 \cdot 88$
 24
 25
 $29 = \frac{57}{12}$
 75

~~$1, 2, 3, 4, 8, 9, 11, 22, 33, 44$
 $1, 2, 3, 4, 8, 9, 11, 18$
 $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 18, 22, 24$~~

$p - q = 1$
 $p + q = 792$ $\Rightarrow \emptyset$ $2, 25, 7, 17, 13, 17$

$p - q = 2$
 $p + q = 396$ $\Rightarrow p = 299$
 $q = 197$ ~~197~~ \emptyset \emptyset \emptyset

$p - q = 3$ \emptyset $p - q = 4$ $p < 101$
 $p + q = 264$ $p + q = 198$ $q = 97$

$5 + 6 + 2 + 8 + 9 + 10 + 11 = 52$

$6 + 2 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 58$
 $77 \cdot 3$

$8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 22 = 72 = 2 \cdot 36$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{64} \cdot \frac{64}{81} + 7 + \frac{64}{49} + \frac{36}{49} = \frac{769}{49}$$

Ответ: $\frac{769}{49}$

$$\text{Решение: } 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{4} \sqrt{4 \cos \frac{\pi}{4} - 5 \sin \frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{\pi}{4} = d$$

$$5 - 4 \sin 3d \sqrt{4 \cos d - 5 \sin d}$$

$$5 - 4(3 \sin d - 4 \sin^3 d) \sqrt{4(1 - 2 \sin^2 d) - 5 \sin d}$$

$$5 - 12 \sin d + 16 \sin^3 d \sqrt{4 - 8 \sin^2 d - 5 \sin d}$$

$$46 \sin^3 d + 8 \sin^2 d - 12 \sin d + 7 = 0$$

$$\sin d = t$$

$$46t^3 + 8t^2 - 12t + 7 = 0$$

$$4t^3 + 1 = 48t^2 + 12t - 7$$

$$D_1 = 84 + 7 - 48 = 16 \cdot 4 + 7 \cdot 3 \cdot 16 = 16(27 + 4) = 16 \cdot 31 = (4\sqrt{31})^2$$

$$t = \frac{-8 - 20}{48} = -\frac{28}{48} = -\frac{7}{12}$$

$$t = \frac{22}{48} = \frac{11}{24}$$

$(\frac{x}{2})^2 = x$
 $\frac{x^2}{4} = x$
 $x^2 = 4x$
 $x^2 - 4x = 0$
 $x(x - 4) = 0$
 $x = 0$ or $x = 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 y^2 z^2 = \frac{16 + 16y^2 - 9y^2 - 72y - 4}{16} = \frac{7y^2 - 12y + 12}{16}$$

$$= \frac{7}{16} y^2 - \frac{3}{4} y + \frac{3}{4} = f(y)$$

Для поиска минимума $f(y)$ при $y > 0$ → правило Лобача → min в начале

$$f'(y) = \frac{7}{8} y - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \frac{7y}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 7} = \frac{6}{7}$$

$$y = \frac{6}{7} \quad x = \frac{-2 - 3y}{4} = \frac{-2 - \frac{18}{7}}{4} = \frac{-14 - 18}{28} = -\frac{32}{28} = -\frac{8}{7}$$

$$z = \frac{-36 + 18 + 24}{7} = \frac{6}{7}$$

$$x = -\frac{8}{7}, \quad y = \frac{6}{7}, \quad z = \frac{6}{7}$$

$\sin 2\alpha = \sin 2\theta \cos \varphi \cos \psi = 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + (1 - 2 \sin^2 \theta) \cos \varphi \cos \psi = 3 \sin^2 \theta - 4 \sin^2 \theta \cos \varphi \cos \psi$

$$\frac{6}{7} \ln 8 - \frac{8}{7} \ln \frac{16}{7} + \ln 24 = \ln 6 \cdot 7$$

2036

$$6 \ln 8 - 8 \ln 16 + 7 \ln 24 = 2 \ln 6$$

$$\ln \frac{8^6 \cdot 24^7}{16^8} = \ln 6^2 \Rightarrow \frac{8^6 \cdot 24^7}{16^8} = 6^2$$

$$(2^3)^6 \cdot (2^3 \cdot 3)^7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot (2^4)^2$$

$$2^{18} \cdot 2^{21} \cdot 3^7 = 3^2 \cdot 2^8 \cdot 2^{16}$$

$$2^{39} \cdot 3^7 = 3^2 \cdot 2^{24} \quad \checkmark \Rightarrow x = -\frac{8}{7}, \quad y = \frac{6}{7}, \quad z = \frac{6}{7}$$

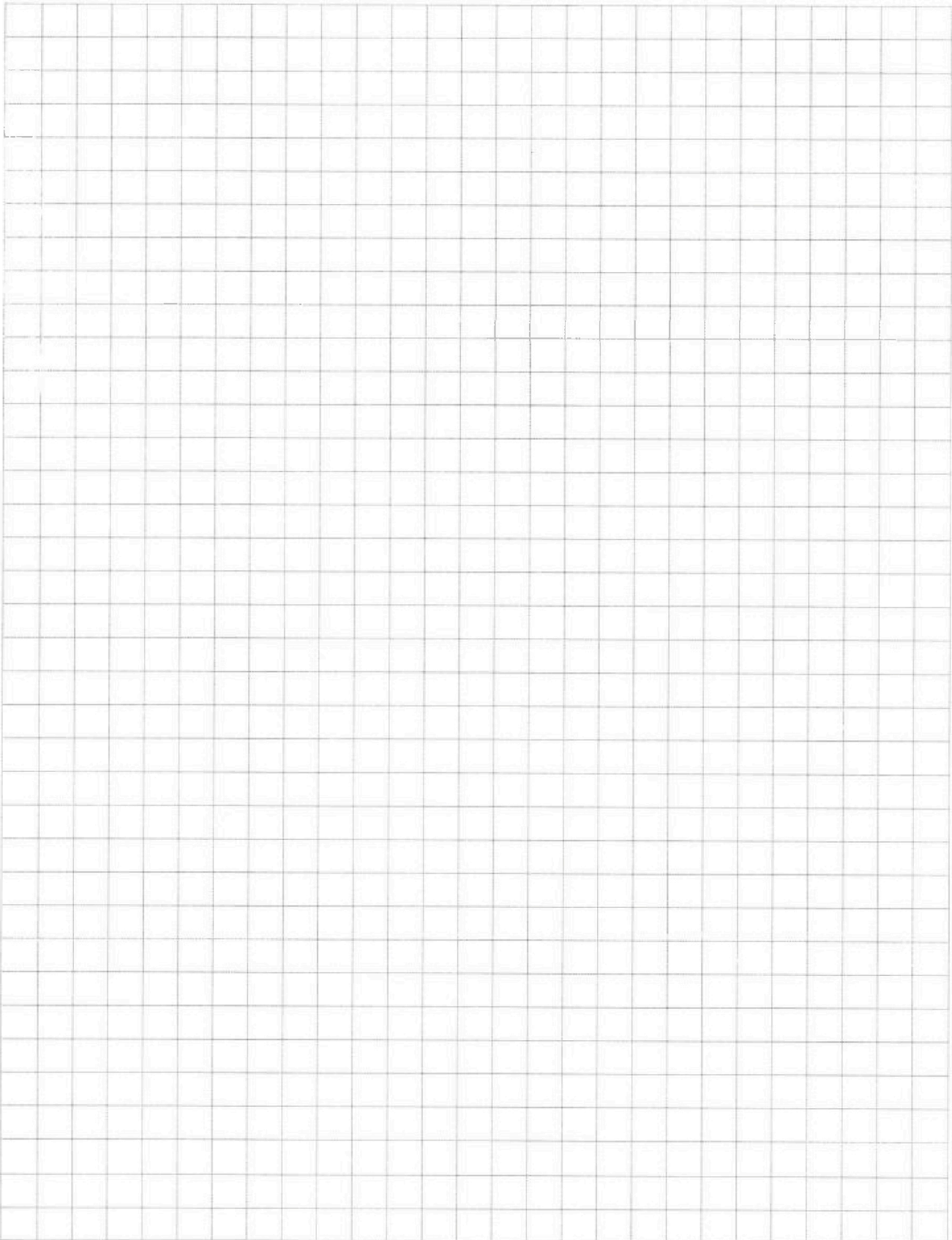


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



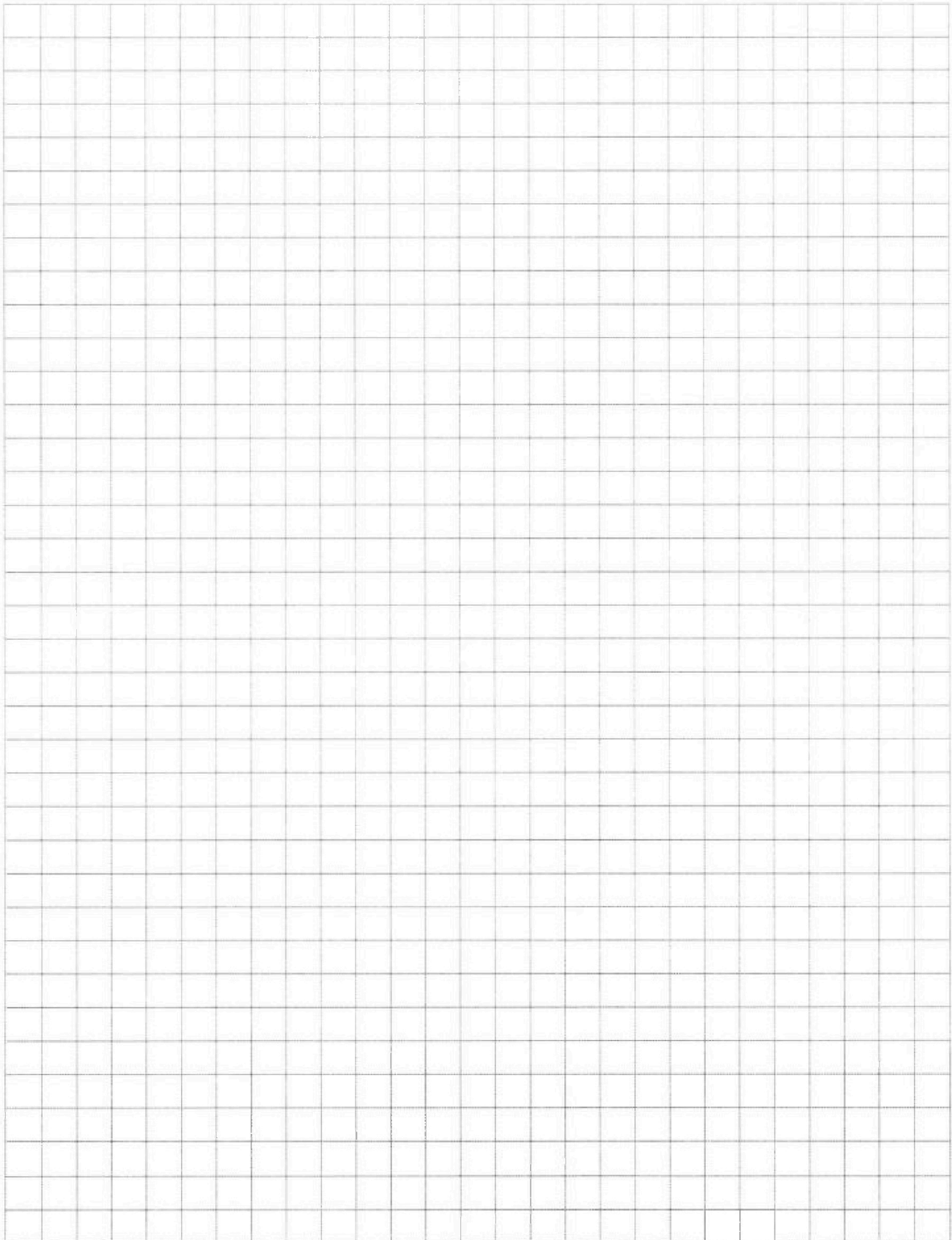


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. 2 летат на 2, иначе 4 аз ост. 5 не летают в м-м.

⇒ если летают 2, то в м-м 4 большая

⇒ пусть n - количество в ост. летают.

$$45 \leq n \leq 7$$

n - летают в д, в м-м не летают в д

$$n = 3$$

все, что угодно.

$$1) n=9: x = C_7^9 \cdot C_5^7$$

$$n=5: x = C_9^5 \cdot C_5^7$$

$$\frac{1080}{400} = 2.7$$

$$\frac{25 \cdot 256}{92500} = 16.12$$

$$\Rightarrow \Sigma = C_9^7 (C_2^4 + C_2^5 + C_2^6 + C_2^7)$$

$$= 5(C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 + C_2^3) =$$

$$= 5(1 + 2 + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{6}) =$$

$$= 5(7 + 2 + 3 + 1) = 320$$

2) $n=3$ иначе 4 там не летают в м-м, как от не в м-м.

$$\Rightarrow x = \frac{C_{12}^9 \cdot C_7^9}{C_7^9} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} =$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} =$$

$$= 11 \cdot 5 \cdot 9 - 7 \cdot 5 = 495 - 35 = 460 + 320 = 780$$

Ответ: 780

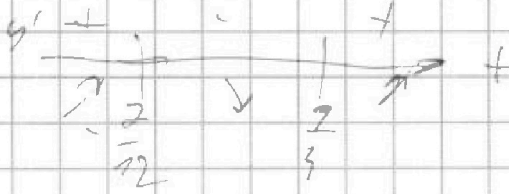


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

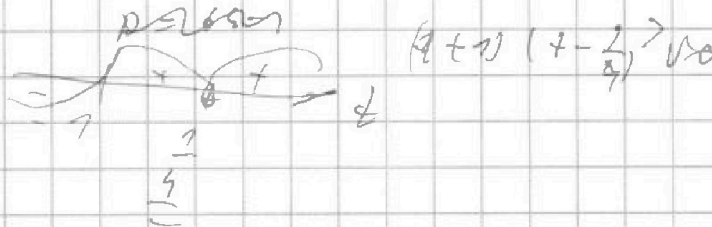


⇒ если при $t = -1$ и при $t = \frac{1}{4}$... > 0 , то ...

$$t = -1: -16 + 8 + 2 \cdot 1 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 16t^3 + 8t^2 - 26t + 1 & t + 1 \\ \hline 76t^3 + 16t^2 & 16t^2 - 8t + 1 \\ \hline -8t^2 - 8t & \\ -8t^2 - 8t & \\ \hline & t + 1 \end{array}$$

$$(t + 1)(16t^2 - 8t + 1) = (t + 1)(4t - 1)^2 \geq 0$$



$$\Rightarrow \text{при } \left[\sin \frac{3\pi}{4} \cdot 4 - 1 \right] > 0 \Rightarrow 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{4} > 4 \cos^2 \frac{\pi}{4} - 5 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Ответ: } 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{4} > 4 \cos^2 \frac{\pi}{4} - 5 \sin \frac{\pi}{4}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(p-q) | p+q | = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$22 : 6 = 72$$

Делители 792:

$$169 \cdot 13 = 18$$

$$\begin{array}{r} 769 \\ + 13 \\ \hline 782 \\ + 13 \\ \hline 795 \end{array}$$

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 18, 22, 24, 33, 36, ...

$$7 \cdot 9 + 3 + 4 + 6 + 8 = 21$$

$$\begin{cases} p-q=2 \\ p+q=390 \\ p-q=4 \\ p+q=190 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=199 \\ q=197 \\ p \neq q \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=199 \\ q=192 \end{cases} \quad | \quad 41$$

p, q — простые

$$\begin{cases} p-q=6 \\ p+q=132 \end{cases} \quad 1+2+3+4+5+6+7 = 28$$

$$2 \cdot k + 78 = 209$$

$$\begin{cases} p=101 \\ q=97 \end{cases} \quad | \quad 31$$

$$\begin{cases} p=69 \\ q=63 \end{cases} \quad | \quad 21$$

$$\begin{cases} p-q=8 \\ p+q=99 \end{cases} \quad \emptyset \quad k=197$$

$$\begin{cases} p=39 \\ q=27 \end{cases} \quad | \quad 11$$

$$7 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\begin{cases} p-q=12 \\ p+q=66 \end{cases} \quad k=28$$

$$\begin{cases} p=37 \\ q=13 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\begin{cases} p-q=18 \\ p+q=66 \end{cases} \quad 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 = 28$$

$$p=28$$

$$\begin{cases} p-q=20 \\ p+q=66 \end{cases} \quad 20 + 28 + 30 + 32 + 34 + 36 + 38 = 28$$

$$q=7$$

$$\begin{cases} p-q=22 \\ p+q=66 \end{cases}$$

$$p-q = 22 \quad \emptyset \quad (\text{н.н. числа})$$

$$\begin{cases} p-q=24 \\ p+q=66 \end{cases}$$

$$2) \quad p-q = 0 \quad \rightarrow \quad i = 2; \quad j = 7$$

$$\begin{cases} p-q=26 \\ p+q=66 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\rightarrow \quad \text{н.н. } 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15$$

3)

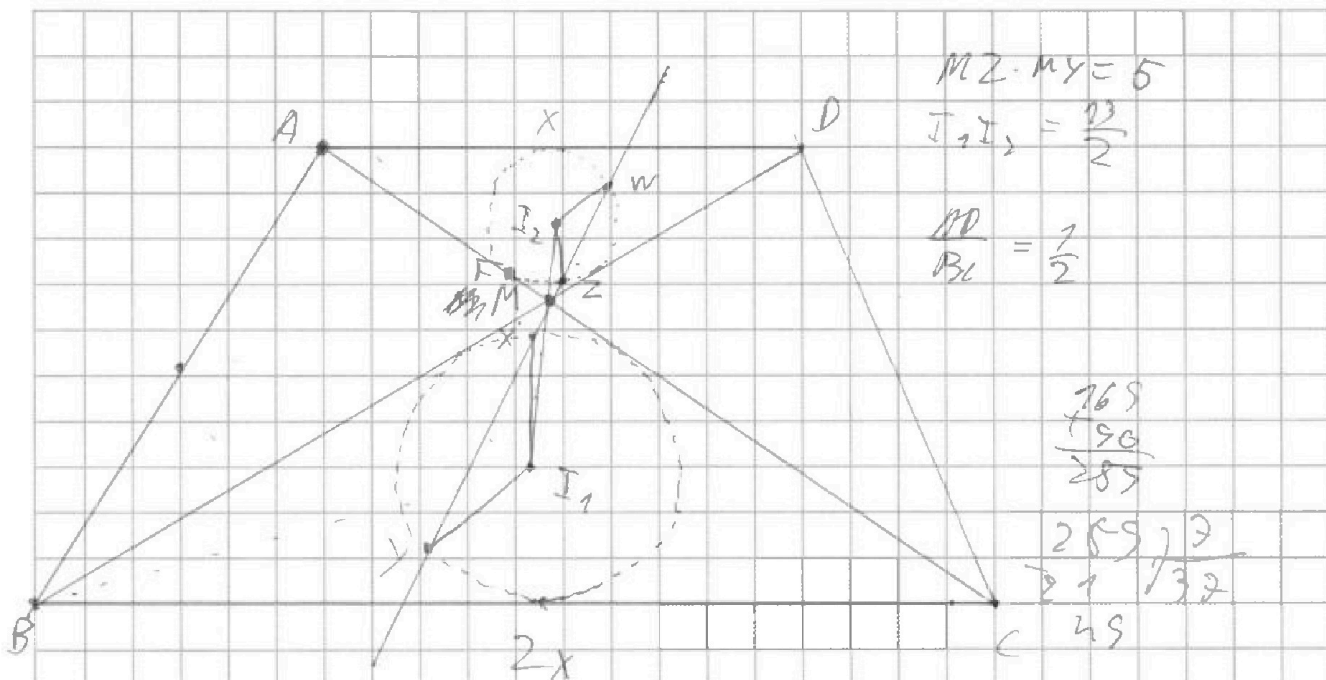


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$MZ \cdot MY = 5$$

$$I_1 I_2 = \frac{13}{2}$$

$$\frac{MP}{BL} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 769 \\ 190 \\ \hline 289 \\ 289 \overline{) 289} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{I_1 M}{I_2 M} = 2$$

$$MZ \cdot MY - 2MZ(MZ + WZ) = 5$$

$$MZ \cdot MW = \frac{5}{2} = MF^2$$

$$MF^2 + R_2^2 = I_2 M^2$$

$$R_1 = 2R_2 = 2 \sqrt{I_2 M^2 + MF^2} = 2 \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}} =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{769}{36} + \frac{5}{2}} = 2 \sqrt{\frac{165 + 5 \cdot 18}{36}} = 2 \sqrt{\frac{289}{36}}$$

$$= \frac{2 \sqrt{289}}{6} = \frac{\sqrt{289}}{3}$$

Ответ: $\frac{289}{3}$

28	26	22	28	29	30	31	203
26	23	28	29	30	31		217
30	34	33	33	34	35	36	231
19	20	25	20	25	28	28	266
10	17	12	73	14	15	10	51
18	17	14	15	16	17	18	108
13	...	17	22				172
14	...						172



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. или $133, 145, \dots$ $S = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

или ~~$133, 247, \dots$~~

123

$S = \frac{21+2}{2} \cdot 3$

$\frac{2 \cdot 133 + 2n}{2} \cdot n = 180 \cdot n - 360$

$S = \frac{2+2}{2} \cdot 3 = 6$

$145n = 180n - 360$ $35n = 360$

$n \neq$

вознос!

$2 \cdot 143 + 2n - 2$

$\frac{\quad}{2} \cdot n = 180n - 360$

$142n + n^2 = 180n - 360$

~~$147n + 2n$~~

~~$n^2 + 34n + 360 = 0$~~
 ~~$D = 324 - 360$~~

$\frac{2 \cdot 143 + 2(n-1)}{2} \cdot n = 180n - 360$

$2 \ln n^2 = 2 \ln 3 \cdot 2 = 4 \ln 3$
 $= 2 \ln 3 + 2 \ln 3$

$142n + n^2 = 180n - 360$; $n^2 - 36n + 360 = 0$

2. $x \ln 2 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$

$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + z \ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$\ln 2 (4x + 3y + 3z - 1) = \ln 3 (1 - z)$

$\Rightarrow \log_2 3(1-z) \in \mathbb{Z}$

$4x + 3y + 3z - 1 = \log_2 3(1-z)$

$\Rightarrow 1-z = 0$
 $z = 1$

$\frac{1}{z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{\text{чисел } a, n} = S_{\text{чисел } m, n}$$

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = 180n - 360;$$

$$a_1 n + \frac{(n-1)n}{2} \cdot d = 180n - 360$$

$$143n + n^2 - n = 180n - 360;$$

$$n^2 + 142n = 180n - 360$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$D_1 = 36^2 - 360 = 0$$

$$n = 19 - 1 = 18$$

$$n = 19 + 1 = 20$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{5}x + \frac{16}{5}x + \frac{12}{9}$$

$$x_0 = -\frac{20}{9} \cdot \frac{9}{50}$$

$$= -\frac{20}{50}$$

ответы:

38

$$a_{20} = a_1 + 2 \cdot 29 = 143 + 40 = 183 \neq 180$$

$$a_{18} = a_1 + 2 \cdot 27 = 143 + 54 = 197 \checkmark$$

Ответ: 18.

2.7.3

$$2. \begin{cases} 4x + 3y + 3z - 1 = \log_2 3(1-2) \\ z = 2 \end{cases}$$

$$4x + 3y + 2 = 0$$

$$x = \frac{-2-3y}{4}$$

$$y = \frac{-2-4x}{3}$$

$$x^2 + y^2 + 4x + \frac{4x^2 + 6x + 1}{9} = 1$$

$$10x^2 + 26x + 23 = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + y^2 - \left(\frac{2+3y}{4}\right)^2 = 1 + y^2 - \frac{4y^2 + 12y + 4}{16}$$

$$= \frac{20x^2 + 26x + 23}{9}$$