МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок - простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{3\pi}{14}$ или $4\cos\dfrac{\pi}{7} - 5\sin\dfrac{\pi}{14}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть у многоугольника n вершин, тогда сумма углов этого многоугольника — $(n-2)180°$

Углы составляют арифметическую прогрессию с разницей $2°$ и начинающуюся со $143°$

т.е. $143°, 145°, \dots, 143° + (n-1)2°$

Тогда сумма углов будет равна:

$$\frac{143° + (143° + (n-1)2°)}{2} \cdot n$$

что равно $(n-2)180°$

т.е.:

$$\frac{143° + 143° + (n-1)2°}{2} n = (n-2)180°$$

$$(143° + (n-1)\cdot 1°)n = (n-2)180°$$

$$143n + n^2 - n = 180n - 360$$

$$n^2 + 142n - 180n + 360 = 0$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$D = 38^2 - 4\cdot 360 = 4(19^2 - 360) = 4(361-360) = 2^2$$

$$n_{1,2} = \frac{38 \pm 2}{2} = \left[\begin{array}{l} 20 \\ 18 \end{array}\right.$$

Если $n = 20$, то самый большой угол этого многоугольника $143° + (n-1)2° = \cancel{180} \; 181° > 180°$

т.е. n не может быть $= 20$

Если $n = 18$, то самый большой угол — $143° + (18-1)2° = 177° < 180°$ — всё хорошо

Ответ: 18 вершин

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x, y, z \in \mathbb{Z}$

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$

$(x^2+y^2+z^2)$ наим. $-$?

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$

$4x\ln 2 + 3y\ln 2 + 3z\ln 2 + z\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$(4x+3y+3z-1)\ln 2 = (1-z)\ln 3$ $\qquad \ln 2 \neq 0$

$\underbrace{(4x+3y+3z-1)}_{\in \mathbb{Z}} = (1-z)\frac{\ln 3}{\ln 2} = \underbrace{(1-z)}_{\in \mathbb{Z}}\underbrace{\log_2 3}_{\notin \mathbb{Z}}$

$\Downarrow$

уравнение имеет решение $\Leftrightarrow (1-z) = (4x+3y+3z-1) = 0$

$\Downarrow$

$z = 1$ и $4x+3y+3-1=0$ т.е. $4x+3y=-2$

$x = \frac{-3y-2}{4}$ при этом $y \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathbb{Z}$

т.е.:

$-3y-2 \underset{4}{\equiv} 0 \Leftrightarrow 3y \underset{4}{\equiv} 2 \Leftrightarrow y \underset{4}{\equiv} 2$

$x^2+y^2+z^2 = \left(\frac{-3y-2}{4}\right)^2 + y^2 + 1 = \frac{9y^2+12y+4}{16} + \frac{16y^2+16}{16} =$

$\frac{25y^2}{16} + \frac{12}{16}y + \frac{20}{16}$ $-$ парабола, ветви вверх

наименьшее значение в вершине

$y = \frac{-\frac{12}{16}}{2\cdot\frac{25}{16}} = -\frac{12}{50}$

ближайшее целое число дающее ост. 2 при делении на 4 это -2

т.е $y = -2$ $\qquad x = \frac{-3\cdot(-2)-2}{4} = 1$ $\qquad z = 1$

тогда $x^2+y^2+z^2 = 1+4+1 = 6$

Ответ: 6

$a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ a+5,\ a+6$ – 7 подряд идущ. чисел

p, q – простые $\qquad a \in \mathbb{N}$

$p^2 - q^2 = 792$

$(p-q)(p+q) = 792 = 8 \cdot 99 = 33 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$p-q$ максимальное $= 6$ если взять за p сумму последних шести чисел, а за q первых шести.

$\Downarrow$

т.к. $p-q$ это целое, то $(p-q)$ делитель 792

$\Downarrow$

5 вариантов:

$p-q=1$, $p+q=792$, $2p=793 \not\vdots 2$, $\varnothing$

$p-q=2$, $p+q=396$, $2p=398$, $p=199$, $q=197$ — 1 вар.

$p-q=3$, $p+q=264$, $2p=267 \not\vdots 2$, $\varnothing$

$p-q=4$, $p+q=198$, $2p=202$, $p=101$, $q=97$ — 2-ой вар.

$p-q=6$, $p+q=132$, $2p=138$, $p=69 \vdots 3$ не прост.

1 вар. $\quad p=199 \quad q=197$

$p = 6a + x$ где $x \in [15; 21]$ $\qquad \left(\begin{array}{l} 15 = 1+2+3+4+5+0 \\ 21 = 1+2+3+4+5+6 \end{array}\right)$

$199 = 6 \cdot 33 + 1$ ✗

$6 \cdot 32 + 7$ ✗

$6 \cdot 31 + 13$ ✗

$6 \cdot 30 + 19$ ✓ $\qquad 19 \in [15; 21]$

$6 \cdot 29 + 25$ ✗

др. вариантов нет

$\Downarrow$

$a = 30$

30, 31, 32, 33, 34, 35, 36 – множество M

$199 = 30 + 31 + 33 + 34 + 35 + 36$

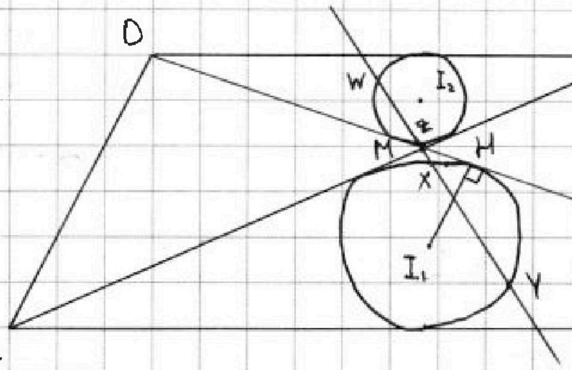
$197 = 30 + 31 + 32 + 33 + 35 + 36$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$

r_1 - ?

r_1 - радиус окр. с центром I_1

$I_1I_2 = \frac{13}{2}$ $MZ \cdot MY = 5$

H - точка касания окр. ω_1 и BD

Решение:

1.) $\triangle CMB \sim \triangle BMA$ с коэф. подобия 2 по двум углам (накрест лежащие)

2.) MI_1 и MI_2 - биссектрисы $\Rightarrow$ M, I_1 и I_2 лежат на одной прямой

3) Все расстояния в этих треугольниках относятся как коэф подобия т. е. 1 : 2

т. е. : $\frac{MZ}{MX} = \frac{1}{2}$ и $\frac{MI_2}{MI_1} = \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$MI_1 = \frac{2}{3} \cdot I_1I_2 = \frac{13}{3}$

$MZ = \frac{1}{2} MX$

$\Downarrow$

$MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY = 5 \Rightarrow MX \cdot MY = 10$

4 MY - секущая, MH - касательная $\Rightarrow$

$MH^2 = MX \cdot MY = 10$

$\Downarrow$

по th Пифагора в $\triangle I_1HM$:

$I_1H = \sqrt{MI_1^2 - MH^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{3}\right)^2 - 10} = \sqrt{\frac{169-90}{9}} = \frac{\sqrt{79}}{3}$

I_1H - это r_1

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5-4\sin\frac{5\pi}{14} \vee 4\cos\frac{\pi}{7}-5\sin\frac{\pi}{14}$ $\Leftrightarrow$

$5-4\left(3\sin\frac{\pi}{14}-4\sin^3\frac{\pi}{14}\right) \vee 4\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{14}\right)-5\sin\frac{\pi}{14}$

Замена $t=\sin\frac{\pi}{14}$

$5-12t+16t^3 \vee 4-8t^2-5t$ $\Leftrightarrow$

$16t^3+8t^2-7t+1 \vee 0$

$t=-1$ — корень

тогда

$$\begin{array}{r|l} 16t^3+8t^2-7t+1 & t+1 \\ \hline -\,16t^3+16t^2 & 16t^2-8t+1 \\ -8t^2-7t+1 & \\ -\,-8t^2-8t & \\ t+1 & \\ -\,t+1 & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow 16t^3+8t^2-7t+1=$

$=(16t^2-8t+1)(t+1)=$

$=(4t-1)^2(t+1)$

Почему $4t-1\neq 0$?

т.е. $\sin\frac{\pi}{14}\neq\frac{1}{4}$

Предположим, что это так, и $\sin\frac{\pi}{14}=\frac{1}{4}$

тогда: $\cos\frac{\pi}{7}=1-2\sin^2\frac{\pi}{14}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ $\Rightarrow$

$\sin\frac{\pi}{7}=\sqrt{1-\frac{49}{64}}=\frac{\sqrt{15}}{8}$ $\Rightarrow$

$\sin\frac{2\pi}{7}=2\cdot\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}=2\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7\sqrt{15}}{32}$ $\Rightarrow$

$\cos\frac{2\pi}{7}=\sqrt{1-\left(\frac{7\sqrt{15}}{32}\right)^2}=\sqrt{\frac{1024-49\cdot 15}{32^2}}=\frac{\sqrt{289}}{32}=\frac{17}{32}$ $\Rightarrow$

$\sin\frac{4\pi}{7}=2\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}=2\cdot\frac{7\sqrt{15}}{32}\cdot\frac{17}{32}=\frac{119\sqrt{15}}{512}$

$\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}=\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot\frac{17}{32}+\frac{7\sqrt{15}}{32}\cdot\frac{7}{8}=\frac{(49+17)\sqrt{15}}{256}$

$\sin\frac{4\pi}{7}$ и $\sin\frac{3\pi}{7}$ должны быть равны т.к. они расположены симметрично относительно $\frac{\pi}{2}$: $\pi-\frac{4\pi}{7}=\frac{3\pi}{7}-0$, а в нашей ситуации:

$\sin\frac{4\pi}{7}=\frac{119\sqrt{15}}{512}\neq\frac{132\sqrt{15}}{512}=\sin\frac{3\pi}{7}$ $\Rightarrow$ противоречие и

$\sin\frac{\pi}{14}\neq\frac{1}{4}$ и $(4t-1)\neq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Итого :

Имеем уравнение

$(4t-1)^2(t+1)$ где $(4t-1)^2>0$ т.к. $4t-1\neq 0$

$t+1>0$ т.к. $t>-1$ т.к. $t=\sin\frac{\pi}{14}$ $\left(\frac{\pi}{14}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\Downarrow$

$(4t-1)^2(t+1)>0$

$\Downarrow$

$5-4\sin\frac{3\pi}{14}>4\cos\frac{\pi}{7}-5\sin\frac{\pi}{14}$ – начальное неравенство

Ответ: $5-4\sin\frac{3\pi}{14}>4\cos\frac{\pi}{7}-5\sin\frac{\pi}{14}$

1) Четырёхугольная пирамида считается выпуклой если в эти 4 точки не лежат на одной плоск.

$\Downarrow$

всего четвёрок $\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$ т.к. если поменять в одной четвёрке местами 2 точки это будет та же самая пирамида

И надо вычесть те четверки когда 4 т лежат на одной плоск. т.е. $\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot2\cdot3\cdot4}$

$\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 5\cdot11\cdot9 - 7\cdot5 = 5\cdot92 = 460$ - кол-во четырёхугольных пирамид

2) n-угольная пирамида (при $n \geq 5$) считается выпуклой если в основании лежит выпуклый $(n-1)$ угольник. $(n-1 \geq 4)$

больше 3 точек на одной плоскости $\Rightarrow$ эта плоскость α

~~Какой~~ не бы ~~многоугольник~~ точки мы не выбрали на этой плоскости многоугольники получатся выпуклыми т.к. все точки на окружности

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Кол-во 4 угольников – $\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=35$

5 угольников – $\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=21$

6 угольников – $\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=7$

7 угольников – $\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}=1$

каждый из этих многоугольников может образовать ~~б~~ пяти, шести, семи и восьмиугольную (соответственно) пирамиду с каждой из 5 точек вне плоскости L. Больше пирамид нет, т.к. никакие 8 точек не ~~на~~ ~~на~~ лежат на одной плоскости.

Количество n-угольников $(n \geq 4)$

$35+21+7+1=64$

Количество пирамид с основаниями этих n угольников: ~~n~~ $64\cdot5=320$

Итого суммарное кол-во пирамид: $460+320=780$

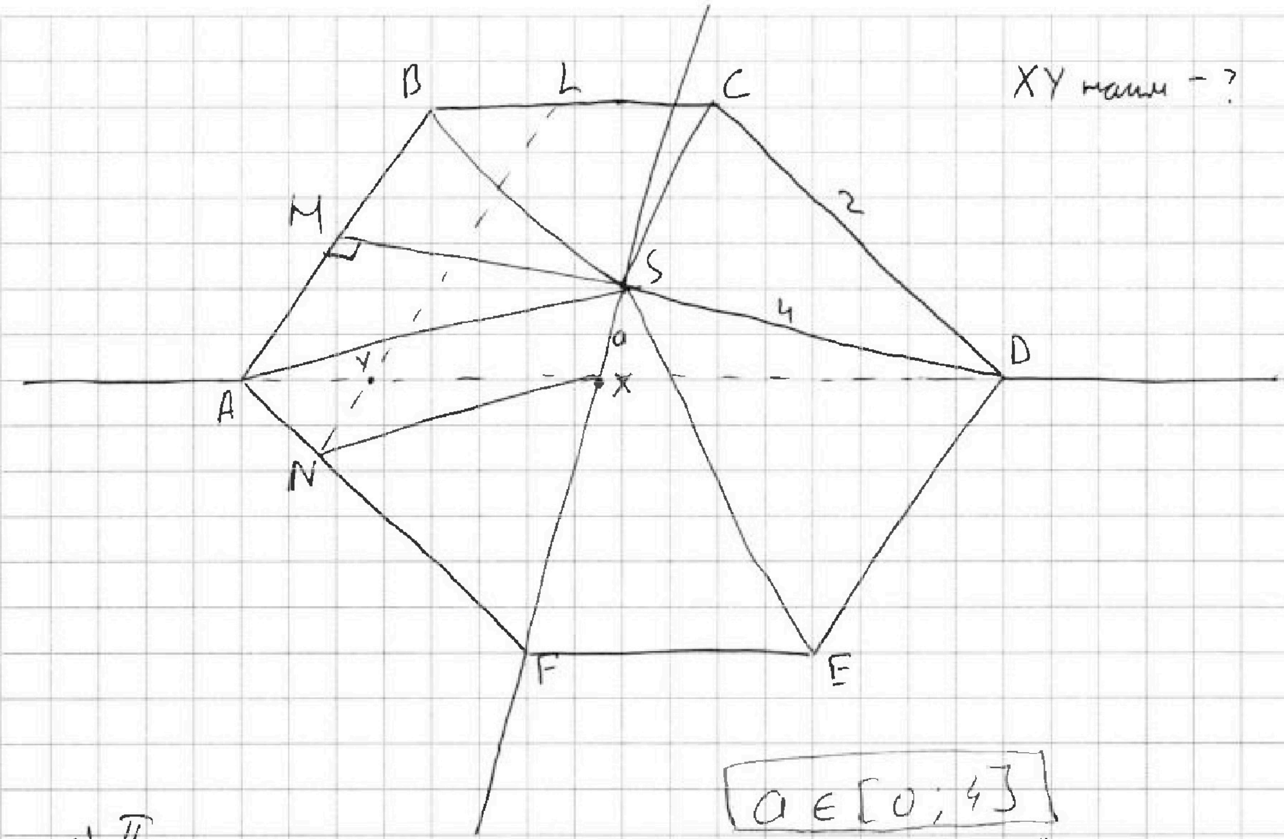
Ответ: 780

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\boxed{a \in [0; 4]}$

1) Пусть $SX = a$, $XN \parallel AS$, а $NL \parallel AB$

тогда $AD \cap NL = Y$ т.к. $NLX \parallel ABS \Rightarrow$

$XY \parallel ABS$

2) $AS \parallel NX \Rightarrow \frac{AN}{SX} = \frac{AF}{SF} = \frac{2}{4} \Rightarrow AN = \frac{1}{2} SX = \frac{1}{2} a$

3) $NY \parallel AB \Rightarrow \Delta AYN$ – равносторонний т.е.

$NY = \frac{1}{2} a$

4.) $\frac{NX}{AS} = \frac{XF}{FS} \Rightarrow NX = \frac{XF}{FS} \cdot AS = \frac{4-a}{4} \cdot 4 = 4 - a$

5) $NL \parallel AB$ $NX \parallel AS \Rightarrow \angle LNX = \angle BAS$

$\Downarrow$

$\cos \angle LNX = \cos \angle BAS = \frac{AH}{AS} = \frac{1}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

б) XY по th ~~cos~~ косинусов в ΔXYN:

$XY = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (4-a)^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot(4-a)\cdot\frac{1}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4(4-a)^2}{4} - \frac{a(4-a)}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a^2 - 32a + 64 - 4a + a^2} =$

$\frac{1}{2}\sqrt{6a^2 - 36a + 64}$

XY мин при $6a^2 - 36a + 64$ мин.

$\Downarrow$

парабола ветви вверх.

$a_в = \frac{36}{2\cdot 6} = 3$

$XY_{мин} = \frac{1}{2}\sqrt{6\cdot 3^2 - 36\cdot 3 + 64} = \frac{1}{2}\sqrt{54 - 108 + 64} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{\sqrt{10}}{2} < 2$

Если бы т X лежала выше S, то

$XY > AS = 4$ => не наим

Если бы т X лежала ниже F, то

$XY > 2$ => не наим

$\Downarrow$

$\frac{\sqrt{10}}{2}$ – наим

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2 вар. : $p = 101$ $q = 97$

$p = 6a + x$, где $x \in [15; 21]$

$101 = 6 \cdot 16 + 5$ ×

$6 \cdot 15 + 11$ ×

$6 \cdot 14 + 17$ ✓

$6 \cdot 13 + 23$ ×

$a = 14$

14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 – мн. M

$101 = 14 + 15 + 16 + \overset{17}{\cancel{18}} + 19 + 20$

$97 = 119 - 22$ где 119 это сумма всех чисел

при этом $22 > 20 \Rightarrow 97$ составить нельзя

$\Downarrow$

этот вариант не подходит.

Ответ: $M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$a \quad a+1 \quad a+2 \quad a+3 \quad a+4 \quad a+5 \quad a+6$

p ~~=~~ q – простые

$p^2 - q^2 = 792$

$(p-q)(p+q) = 792 = 396 \cdot 2 = 198 \cdot 4 = 99 \cdot 8 = 33 \cdot 3 \cdot 2^3$

~~p макс.~~ 264 $90 = 15 \cdot 6$

$p - q$ макс. 6

$p - q = 1$
$p + q = 792$
$2p = 793$
$\varnothing$

$p - q = 2$
$p + q = 396$
$2p = 398$
$p = 199$
$q = 197$

$p - q = 3$
$p + q = 264$
$2p = 267$
$\varnothing$

$p - q = 6$
$p + q = 132$
$2p = 138$
$p = 69 \vdots 3$

$199 \not\vdots 7$
$199 \not\vdots 13$

140
59

13
169
30

$p = 199 \quad q = 197$

$p = 6a + x \quad (x \in [15; 21]$

~~$6(a+2)+n$ или $6(a+$~~

$199 = 6 \cdot 33 + 1$
$6 \cdot 32 + 7$
$6 \cdot 31 + 13$
$6 \cdot 30 + 19$ ✓
$6 \cdot 29 +$

$17 + 7 + 119$

$a = 30$

197
140
$57 \not\vdots 7$

197
169

$30 \quad 31 \quad 32 \quad 33 \quad 34 \quad 35 \quad 36$

$199 = 30 + 31 + 33 + 34 + 35 + 36$

$197 = 30 + 31 + 32 + 33 + 35 + 36$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

n кто вершин

$(n-2)180^\circ$ - сумма углов

$143^\circ \quad 145^\circ \quad \dots \quad 143^\circ + (n-1)2^\circ$

$\frac{143^\circ + 143^\circ + (n-1)2^\circ}{2} \cdot n = (n-2)180^\circ$

$(143^\circ + (n-1)^\circ) n = 180^\circ n - 360^\circ$

$143^\circ n + n^2 - n = 180n - 360$

$n^2 + 142n - 180n + 360 = 0$

$n^2 - 38n + 360 = 0$

$D = 38^2 - 4 \cdot 360 = 4(19^2 - 360) = 4$

$n_{1,2} = \frac{38 \pm 2}{2} = \left[\begin{array}{l} 18 \\ 20 \end{array}\right.$

$19 \cdot 19 = 171 + 19\ldots = 361$

$x, y, z \in \mathbb{Z}$

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$

$x^2 + y^2 + z^2$ наим -?

$4x\ln 2 + 3y\ln 2 + z\ln 8 + z\ln 3 = \cancel{\ln 6}\ln 2 + \ln 3$

~~$(4x+3y+z+1)\ln 2$~~

$4x\ln 2 + 3y\ln 2 + 3z\ln 2 + z\ln 3 - \ln 2 - \ln 3 = 0$

$(4x + 3y + 3z - 1)\ln 2 + (z-1)\ln 3 = 0$

$\underset{\in \mathbb{Z}}{(4x + 3y + 3z - 1)} = (1-z)\frac{\ln 3}{\ln 2} = \underset{\in \mathbb{Z}}{(1-z)} \underset{\notin \mathbb{Z}}{\log_2 3}$

$\overset{!!}{eq.} \quad z = 1$

$4x + 3y + 3 - 1 = 0$

$4x + 3y = -2$

$x = \frac{-3y-2}{4}$

$y \equiv_4 2$

$-3y \equiv_4 2$

$y \vdots 2 \quad y \not\vdots 4$

$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{-3y-2}{4}\right)^2 + y^2 + 1 = \frac{9y^2 + 12y + 4}{16} + \frac{16y^2 + 16}{16} =$

$\frac{25y^2 + 12y + 20}{16} =$

$y_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{12}{16}}{\frac{50}{16}} = -\frac{12}{50}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5-4\sin\frac{3\pi}{14} \vee 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$

$\sin 3\alpha = \sin(\alpha+2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha =$

$\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha =$

$\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) =$

$\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$5-4\left(3\sin\frac{\pi}{14} - 4\sin^3\frac{\pi}{14}\right) \vee 4\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{14}\right) - 5\sin\frac{\pi}{14}$

$t = \sin\frac{\pi}{14}$

$5-12t+16t^3 \vee 4-8t^2-5t$

$16t^3+8t^2-7t+1 \vee 0$

$t=-1$ ~~подх~~

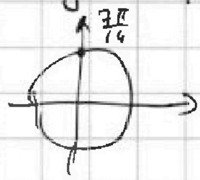
$(t+1):0$

$$\begin{array}{l|l} 16t^3+8t^2-7t+1 & t+1 \\ \underline{16t^3+16t^2} & 16t^2-8t+1 \\ \quad -8t^2-7t+1 & \\ \quad \underline{-8t^2-8t} & \\ \qquad t+1 & \\ \qquad \underline{t+1} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

$\cdot 17$
17

$17 \cdot 17$: 119, 17, 289

Почему $\sin\frac{\pi}{14} \neq \frac{1}{4}$



$49 \cdot 15$: 245, 49, 735

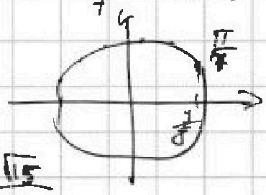
$(t+1)(4t-1)^2 \vee 0$

$\cos\frac{\pi}{7} = \left(1-2\sin^2\frac{\pi}{14}\right) = 1 - \frac{2}{16} = \frac{7}{8}$

$\sin\frac{\pi}{7} = \sqrt{1-\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\sin\frac{2\pi}{7} = 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot\frac{7}{8} = \frac{7\sqrt{15}}{32}$

$\cos\frac{2\pi}{7} = \sqrt{1-\frac{49\cdot 15}{32^2}} = \sqrt{\frac{1024-735}{32^2}} =$



$\boxed{\frac{17}{32}}$

$\sin\frac{4\pi}{7} = 2\cdot\frac{7\sqrt{15}}{32}\cdot\frac{17}{32} = \frac{119\sqrt{15}}{512}$

$265 + 24 = 289$

$\sin\frac{3\pi}{7} = \frac{7\sqrt{15}}{32}\cdot\frac{7}{8} + \frac{17}{32}\cdot\frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{66\sqrt{15}}{256}$

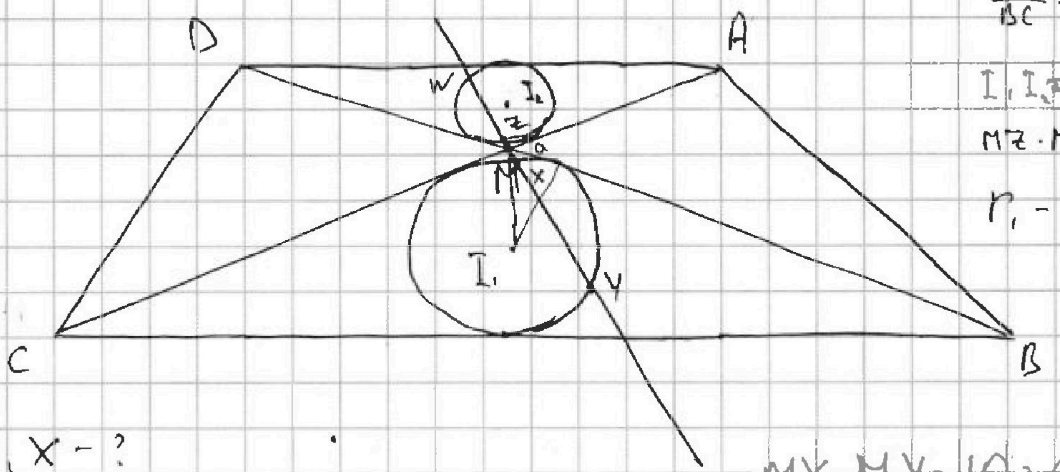
$\sin\pi =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$

$I_1 I_2 = \frac{13}{2}$

$MZ \cdot MY = 5$

$r_1 - ?$

$I_1 X - ?$

$MX \cdot MY = 10 = a^2$

$2 \quad \frac{13}{6} \quad \frac{13}{3}$

4 из 12

$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

$XY = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (4-a)^2 - \frac{a}{2} \cdot (4-a) \cdot \frac{1}{2}} =$

$\sqrt{\frac{a^2}{4} + 16 - 2a + a^2 - 2a + \frac{a^2}{2}} =$

$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 64 - 16a + 4a^2 + 2a^2}$

$\frac{1}{2}\sqrt{7a^2 - 16a + 64}$

$OB = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$

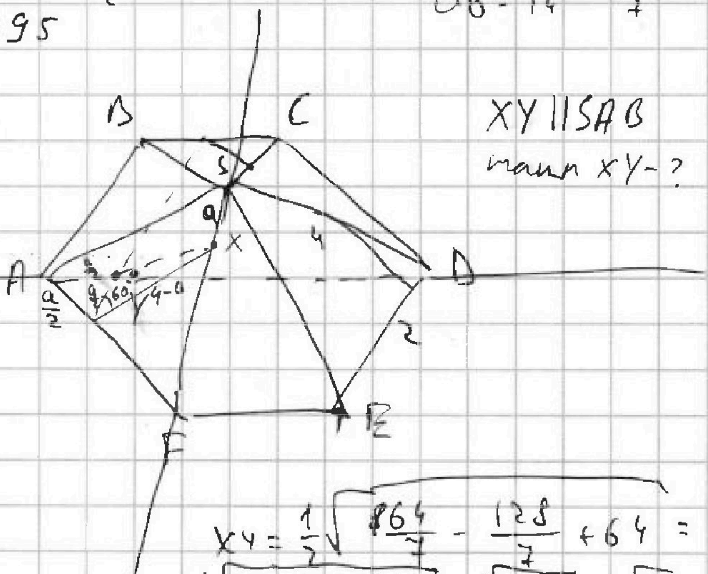
$5 \cdot 11 \cdot 9 = 99 \cdot 5 = 495$

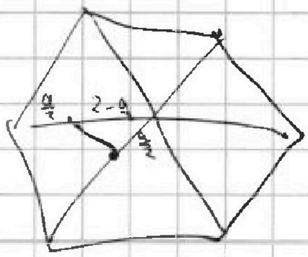
$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$

$495 - 35 =$

$XY \parallel SAB$

$\max XY - ?$





$XY = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{64}{7} - \frac{128}{7} + 64} =$

$\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{64}{7} + \frac{64 \cdot 7}{7}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{64 \cdot 6}{7}} = 4\sqrt{\frac{6}{7}}$