



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность  $2^\circ$  и начинающуюся с угла  $132^\circ$ . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ .
3. [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 1080$ .
4. [5 баллов] Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а отношение оснований  $AD : BC = 1 : 2$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанных в треугольники  $BMC$  и  $AMD$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$ , а  $\omega_2$  – в точках  $Z$  и  $W$  ( $X$  и  $Z$  находятся ближе к  $M$ ). Найдите радиус окружности  $\omega_1$ , если  $I_1I_2 = 8$ , а  $MZ \cdot MY = 9$ .
5. [5 баллов] Что больше:  $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$  или  $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$ ?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости  $\alpha$ , а остальные 4 расположены вне плоскости  $\alpha$ . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость –  $\alpha$ . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  ( $S$  – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром  $\sqrt{2}$ . Точка  $X$  лежит на прямой  $SF$ , точка  $Y$  – на прямой  $AD$ , причём отрезок  $XY$  параллелен плоскости  $SAB$  (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $XY$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Углы:  $132; 132+1 \cdot 2; 132+2 \cdot 2; 132+3 \cdot 2; \dots; 132+k \cdot 2$   
всего углов  $k+1 \Rightarrow \sum(\text{углов}) = 180^\circ(k+1-2) = \frac{(132 + 132 + 2k) \cdot (k+1)}{2};$

$$180^\circ(k-1) = (132+k) \cdot (k+1); \quad 180k - 180 = 132k + 132 + k^2 + k;$$
$$k^2 - 47k + 312 = 0; \quad D = 47^2 - 4 \cdot 312 = 961 = 31^2;$$

$$k = \frac{47 \pm 31}{2}; \quad \begin{cases} k = 39 \\ k = 8 \end{cases}, \text{наибольшее} - k = 39.$$

Ответ: 39 вершин



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(12) Уравнение  $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$ ,  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \cdot \ln 25 + y \cdot \ln 75 + z \cdot \ln 125 - \ln 45 = 0$  задаёт точки  $(x; y; z)$ , принадлежащие некоторой  $\alpha$ -плоскости с нормалью

$\vec{n}_\alpha = (\ln 25; \ln 75; \ln 125)$ .  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  — ур-е ~~плоскости~~ <sup>сферы</sup> с центром в точке  $(0; 0; 0)$ , причём точки  $(x, y, z)$  должны принадлежать  $\alpha$ . Минимальный радиус сферы реализуется, когда сфера касается плоскости, тогда  $\vec{R} \perp \alpha$  и  $\vec{R} = k \cdot \vec{n}_\alpha$ , так  $\vec{n}_\alpha \perp \alpha$ .

$$\vec{R} = (k \cdot \ln 25; k \cdot \ln 75; k \cdot \ln 125), \quad R^2 = |\vec{R}|^2 = (k \cdot \ln 25)^2 + (k \cdot \ln 75)^2 + (k \cdot \ln 125)^2 = k^2 (\ln^2 25 + \ln^2 75 + \ln^2 125).$$

При этом, точка с коорг.  $(k \cdot \ln 25; k \cdot \ln 75; k \cdot \ln 125) \in \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow k \cdot \ln^2 25 + k \cdot \ln^2 75 + k \cdot \ln^2 125 = k (\ln^2 25 + \ln^2 75 + \ln^2 125) = \ln 45;$$

$$k = \frac{\ln 45}{\ln^2 25 + \ln^2 75 + \ln^2 125} \Rightarrow |\vec{R}|^2 = \frac{\ln^2 45}{\ln^2 25 + \ln^2 75 + \ln^2 125} = (x^2 + y^2 + z^2)_{\min}.$$

$$\text{Ответ: } \min(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\ln^2 45}{\ln^2 25 + \ln^2 75 + \ln^2 125}.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 Пусть  $M = \{x; x+1; x+2; x+3; x+4; x+5; x+6\}$  на примере  $p$ .

$\Sigma = 7x+21$ ; тогда  $p$  и  $q$  удовлетворяют:  $p = 7x+21-a$ , простое,

$a_1 \in M$ . пусть  $a_1 = x+t$ ,  $t \in [0; 6]$ ,  $t \in \mathbb{N}$ .

$p = 7x+21 - x-t = 6x+21-t$  - простое, тогда  $t$  - четное, т.е.

если  $t$  - нечет  $\Rightarrow 6x+21-t$  - чет  $\Rightarrow$  не простое.

$t \neq 6$ , т.к.  $6x+21-6 = (6x+15) \Leftrightarrow$  это делится на 3, не простое  
 $t = 0, 2$  или  $4$ .

$$p^2 - q^2 = (7x+21-a_1)^2 - (7x+21-a_2)^2 = 1020 \quad (a_1, a_2 \in M)$$

$a_1 = x+t$ ;  $a_2 = x+n$ ,  ~~$t$  и  $n = 0, 2$  или  $4$~~ , пусть  $t < n$ . ( $a_1 < a_2$ )

$$p^2 - q^2 = (6x+21-t)^2 - (6x+21-n)^2 = (n-t)(12x+42-t-n) = 1020;$$

~~$(n; t) = (2; 0)$~~   ~~$(n; t) = (4; 0)$~~ : 1)  $(n; t) = (2; 0)$ :  $12x+40 = 540$ ;  $x = \frac{500}{12}$

2)  $(n; t) = (4; 0)$ :  $12x+38 = 270$ ;  $x = \frac{232}{12} = \frac{58}{3} \notin \mathbb{N}$ .  $\frac{125}{3} \notin \mathbb{N}$ .

3)  $(n; t) = (4; 2)$ :  $12x+36 = 540$ ;  $x = \frac{504}{12} = \frac{126}{3} = 42 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  исконое  $M = \{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$ .

Ответ:  $M = \{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N4 \quad \frac{64 \cdot 256}{81} - \frac{128}{9} r_1^2 + \frac{r_1^4}{4} = 81, \quad 64 \cdot 256 - 9 \cdot 128 r_1^2 + 81 r_1^4 = 81^2 = 6561$$

$$\frac{81 r_1^4}{4} - 9 \cdot 128 r_1^2 + 5823 = 0; \quad \Delta = \left(\frac{9 \cdot 128}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} \cdot 9823 = \frac{531441}{4} = \left(\frac{729}{2}\right)^2$$

$$r_1^2 = \frac{\frac{9 \cdot 128}{2} \pm \frac{729}{2}}{\frac{81}{4}} = \frac{2(1152 \pm 729)}{81}; \quad \begin{cases} r_1^2 = \frac{2 \cdot 47 \cdot 9}{81} = \frac{94}{9}; \\ r_1^2 = \frac{2 \cdot 209 \cdot 9}{81} = \frac{418}{9}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3} \\ r_1 = \frac{\sqrt{418}}{3} \end{cases} \quad \text{или } r_1 < M I_1 = \frac{16}{3} = \frac{\sqrt{256}}{3} \Rightarrow \text{возможны только} \\ r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

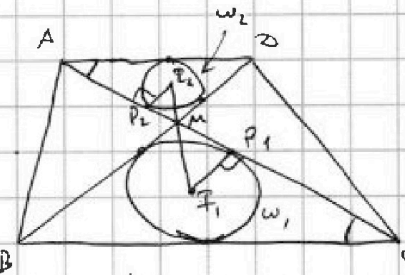
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $\omega_2$  кас-ся  $AM$  в  $\tau. P_2$ , а

$\omega_1$  кас-ся  $MC$  в  $\tau. P_1$ ,  $MI_1$  и  $MI_2$  лежат

на дис-сах углов  $\angle BMC$  и  $\angle BMA$  соотв-но,



т.к. это виссак-окр-ти. Также  $\triangle BMC \sim \triangle BMA$  ( $\angle MCB = \angle MAB$  -накрест. лежащ. при  $AB \parallel BC$  и сек.  $AC$ ) и  $\angle BMC = \angle BMA$  (вертик.)  $\Rightarrow$

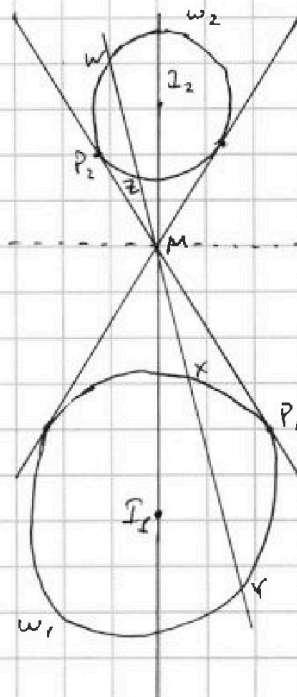
$\Rightarrow$  если  $R(\omega_1) = r_1$ ,  $R(\omega_2) = r_2$ , то  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{BC}{AB} = 2$  (висс. окр.  $\varphi$

подобных  $\triangle$ -ках). Поодни также  $\triangle MP_1I_1 \sim \triangle MP_2I_2$ , т.к.  $\angle P_1MI_1 =$

$\angle P_2MI_2$  -вертик.,  $\angle MP_1I_1 = \angle MP_2I_2 = 90^\circ$ , т.к.  $P_1$  и  $P_2$  -точки касанья.

$$\frac{I_1P_1}{I_2P_2} \equiv \frac{r_1}{r_2} = \frac{MI_1}{MI_2} = 2 \Rightarrow \frac{MI_1}{8-MI_2} = 2; MI_1 = \frac{16}{3}; MI_2 = \frac{8}{3}$$

Рассмотрим вертикальные углы трапеции без сторон  $AD$  и  $BC$ . картинка в нижней полукруглости (содержащ.  $\omega_2$ ) поворачиваем картинку в верхней полукруглости на  $180^\circ$  и увеличим в 2 раза, потому все отрезки ~~смы~~ между "вершинами" с коэф. 2 (соответствующие). В частности,



$$\frac{MX}{MZ} = \frac{MY}{MW} = 2; \Rightarrow MZ \cdot MY = MX \cdot MW = 9.$$

По т. о касат и секущ. ( $\omega_2$ ):  $MP_2^2 = MZ \cdot MW$   
аналогично,  $\omega_1$ :  $MP_1^2 = MX \cdot MY$ .

Тогда:  $MP_2^2 + MP_1^2 = MX \cdot MY + MZ \cdot MW = 9 + 9 = 18$ .

$MP_2^2 = MI_2^2 - P_2I_2^2 = MI_2^2 - r_2^2$ ; (т. Пифагора в  $\triangle MP_2I_2$ )  $\omega_2$

$MP_1^2 = MI_1^2 - r_1^2$  (аналогично);

$$(MI_2^2 - r_2^2) + (MI_1^2 - r_1^2) = 18; \left(\frac{64}{9} - \frac{r_1^2}{4}\right) + \left(\frac{256}{9} - r_1^2\right) = 18;$$

$$\frac{64+256}{9} - \frac{64}{9}r_1^2 - \frac{r_1^2 \cdot 256}{4 \cdot 9} + \frac{r_1^2}{4} = 18; \quad (\text{см. след. стр.})$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(NS)  $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$  (VS)  $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$ ; если обозначим  $\alpha = \frac{3\pi}{14}$ , то

$5 - 4 \sin 3\alpha$  (VS)  $3 \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha$ ;

$5 - 4(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha)$  (VS)  $3 \sin \alpha - 4(1 - 2 \sin^2 \alpha)$ ;

$5 - 12 \sin \alpha + 16 \sin^3 \alpha$  (VS)  $3 \sin \alpha - 4 + 8 \sin^2 \alpha$ ;  $16 \sin^3 \alpha - 8 \sin^2 \alpha - 15 \sin \alpha + 9$  (VS) 0

(знак пер-ва не меняется. обозначим  $\sin \alpha = t$ ,  $|t| \leq 1$ )

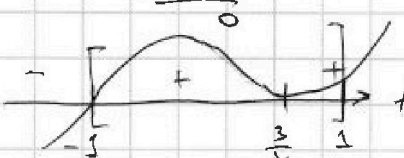
$16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 = 0$ ;  $t = -1$  - корень  $(16 \cdot (-1)^3 - 8 \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-1) + 9 = -16 - 8 + 15 + 9 = 0)$

$\frac{16t^3 - 8t^2 - 15t + 9}{16t^3 + 16t} \Big| \frac{t+1}{16t^2 - 24t + 9} = (4t)^2 - 2 \cdot 4t \cdot 3 + 3^2 = (4t - 3)^2$ .

$$\begin{array}{r} -24t^2 - 15t \\ -24t^2 - 24t \\ \hline 9t + 9 \\ -9t + 9 \\ \hline 18 \end{array}$$

$16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 = (t+1)(4t-3)^2 = (t+1) \cdot 16 \cdot (t - \frac{3}{4})^2$ .

если не накладывать ограничения на  $t$ , можно попытаться найти функцию  $f(t) = 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9$ :



$f(t)$  определена при  $|t| \leq 1$ , но при

этих значениях  $f(t) \geq 0$ . если  $t = \frac{3}{4}$ , то  $f(t) = 0$ , во всех остальных случаях  $f(t) > 0$ .

Предположим,  $\sin \alpha = \frac{3}{4} = \sin \frac{3\pi}{14}$ ; на интервале  $[0; \frac{\pi}{2}]$   $\sin x$  монотонно возрастает.  $\frac{3}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} > \sin \frac{7\pi}{14} > \sin \frac{3\pi}{14}$

$\frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{7\pi}{14}) > \sin(\frac{3\pi}{14})$ , т.е.  $\sin \frac{3\pi}{14} < \frac{3}{4} \Rightarrow$  предположение

неверно  $\Rightarrow \sin \frac{3\pi}{14} \neq \frac{3}{4}$ ,  $t \neq \frac{3}{4} \Rightarrow f(t) > 0 \Rightarrow$  (\*) = " $>$ ".

(1):  $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ , т.к.  $3\sqrt{2} > 4$ , т.к.  $18 > 16$ ; (2)  $\frac{7\pi}{14} = \frac{3,5\pi}{14} > \frac{3\pi}{14} \Rightarrow \sin(\frac{7\pi}{14}) > \sin(\frac{3\pi}{14})$

в силу монотонности на  $[0; \frac{\pi}{2}]$  ( $\frac{\pi}{4}$  и  $\frac{3\pi}{14} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ ). т.к. знак пер-ва не меняется, получаем:  $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$ .

Ответ:  $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$  - больше



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_\_ ИЗ \_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$700^2 = 490000$$

$$750^2 = 75^2 \cdot 100 = MZ \cdot MY = 9$$

$$MZ = (MX + XY) = 9$$

$$K_2 = 5625 \cdot 00$$

$$MP_1^2 = MX \cdot MY = MS_1 \cdot MK_1 =$$

$$= (MI_1 - r_1) \cdot (MI_1 + r_1) = MI_1^2 - r_1^2$$

$$MP_2^2 = MZ \cdot MW$$

$$750^2 - 700^2 = 1499$$

или

$$\frac{MX}{MK_1} = \frac{MS_1}{MY}; \quad MS_1 \cdot MK_1 = MX \cdot MY$$

$$MP_1^2 =$$

$$4 = \frac{MP_1^2}{MP_2^2} = \frac{MX \cdot MY}{MZ \cdot MW} = 4$$

$$MX = 2MZ$$

$$MY = 2MW$$

$$4 \cdot \frac{MX \cdot MW}{MZ \cdot MW} = 2MZ \cdot \frac{MY}{2} = MZ \cdot MY = 9$$

$$4 \cdot \frac{MX \cdot MY}{MZ \cdot MW} = 4 \cdot MZ = \frac{MX \cdot MY}{MW}$$

$$4 \cdot \frac{9}{MY} = \frac{MX \cdot MY}{MW}$$

$$\frac{4 \cdot 9}{MY^2} = \frac{MX}{MW}$$

$$\frac{24}{MY^2} = \frac{MX}{MW}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 81 \\ \hline 648 \\ 6561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1152 \\ \times 1152 \\ \hline 2304 \\ 5760 \\ 1152 \\ \hline 1327104 \\ - 795663 \\ \hline 531441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1152 \\ - 225 \\ \hline 423 \\ - 36 \\ \hline 83 \end{array}$$

$$\frac{64 \cdot 256}{81} - \frac{64 r_1^2}{9} - \frac{r_1^2 \cdot 256}{2 \cdot 9} + \frac{r_1^4}{4} = 81$$

$$64 \cdot 256 - 9 \cdot 64 r_1^2 - 9 \cdot 64 r_1^2 + 21 r_1^4 = 81$$

$$256 = 2^8 = 2^2 \cdot 2^6 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^4 \cdot 2^2 = 16 \cdot 2 = 32$$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ + 1536 \\ \hline 2560 \\ - 1010 \\ \hline 1550 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16384 \\ - 6561 \\ \hline 9823 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 781 \\ \times 241 \\ \hline 241 \\ 781 \\ 781 \\ \hline 18721 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1152 \\ \times 779 \\ \hline 1881 \\ 73 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ \times 14 \\ \hline 3584 \end{array}$$

$$1152$$

$$\begin{array}{r} 5823 \\ \times 81 \\ \hline 46584 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9823 \\ \times 81 \\ \hline 78584 \\ 795663 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

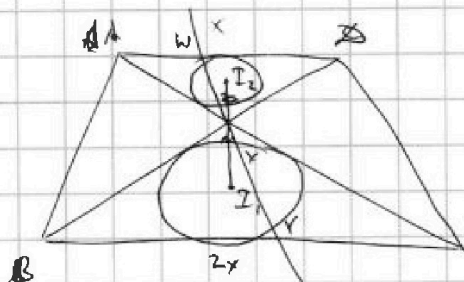
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 239 \\ \times 239 \\ \hline 6651 \\ + 2217 \\ \hline 5173 \\ 546121 \\ \hline 731 \\ \times 731 \\ \hline 731 \\ + 2193 \\ \hline 5117 \\ 534361 \end{array}$$

128

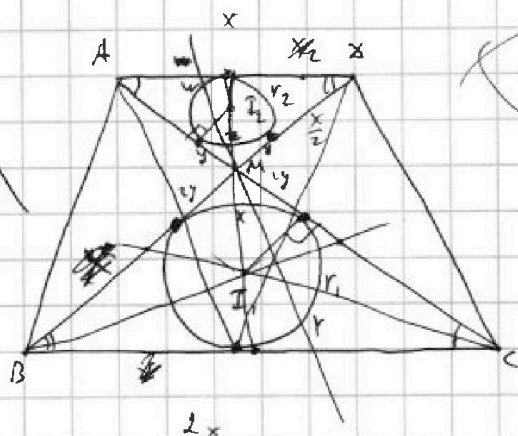
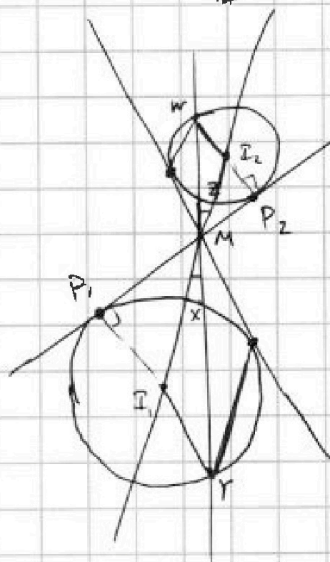
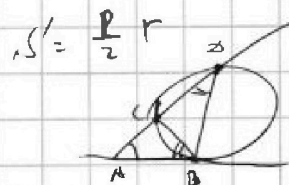
$$\begin{array}{r} 729 \\ \times 729 \\ \hline 6561 \\ + 4581 \\ \hline 5103 \\ 531441 \end{array}$$

$I_1 I_2 = 8;$   
 $MP_2 \cdot MP_1 = 9$



$MP_2^2 \cdot MP_1^2 = MW \cdot MX \cdot MY$   
 $MP_2^2 \cdot MP_1^2 = 9 \cdot MW \cdot MX$   
 $(MI_2^2 - r_2^2)(MI_1^2 - r_1^2) = 9 \cdot MW \cdot MX$

$MP_2^2 = MZ \cdot MW$   
 $MP_1^2 = MX \cdot MY$



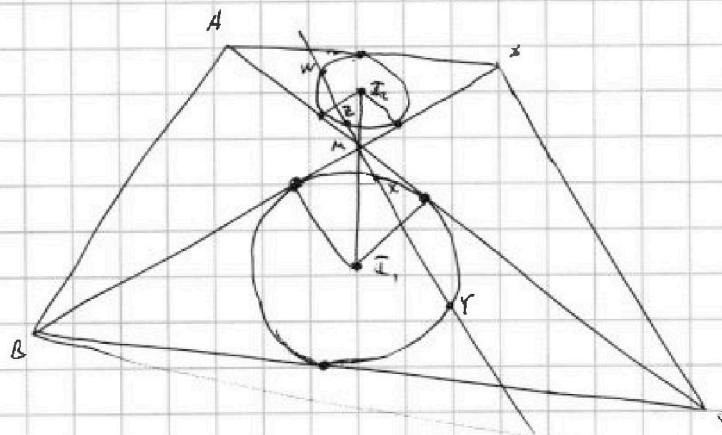
$\frac{r_1}{r_2} = \frac{z}{1}, \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AB} = \frac{BC}{BA}$   
 $AB^2 = AC \cdot AB$

$\frac{MI_2 + r_2}{MI_1 + r_1} = \frac{1}{2}$   
 $\frac{(b - MI_1) + \frac{r_1}{2}}{MI_1 + r_1} = \frac{1}{2}$

$16 - 2MI_1 + \frac{r_1}{2} = MI_1 + r_1$   
 $16 = 3MI_1$   
 $MI_1 = \frac{16}{3}$   
 $MI_2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$

$\frac{MI_1}{MI_2} = \frac{z}{1} = \frac{MI_1}{b - MI_1} = \frac{z}{1}$   
 $MI_1 = 16 - 2MI_2$   
 $MI_2 = \frac{16}{3}$

$MI_2 = \frac{8}{3}$





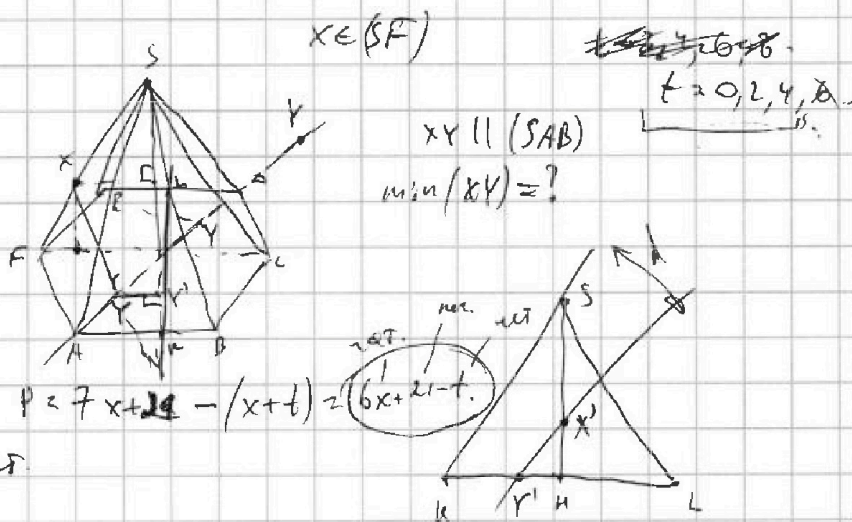


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x, x+1, x+2, \dots, x+6. \quad \Sigma = \frac{x+x+6}{2} \cdot 7 = 7(x+3)$$

$$p = 7(x+3) - a_1; \quad a_1 < a_2, \quad \text{т.к. } p^2 - q^2 = 1020 > 0$$

$$q = 7(x+3) - a_2 \quad (7(x+3) - a_1)^2 - (7(x+3) - a_2)^2 = 1020;$$

$$-14a_1(x+3) + 14a_2(x+3) + a_1^2 - a_2^2 = 1020;$$

$$a_2 - a_1 = \Delta$$

$$a_1 + a_2 = 2a_1 + \Delta$$

$$14(x+3)(a_2 - a_1) + (a_1 + a_2)(a_1 - a_2) = 1020$$

$$\Delta(14x + 42 - (2a_1 + \Delta)) = 1020. \quad \underbrace{(a_2 - a_1)}_{\geq 1} \underbrace{(14(x+3) - a_1 - a_2)}_{-(a_1 + a_2)} = 1020;$$

$$a_1 + a_2 \leq 2x + 11.$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$132, 134, \dots, 132 + 2 \cdot k$$

$$\Sigma = \frac{(132 + 2k) + 132}{2} \cdot (k+1) = \frac{20(k+1)}{2}$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad (k+1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 12^2$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 42 \\ \hline 329 \\ 700 \\ \hline 714 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times 312 \\ \hline 276 \end{array}$$

$$180(k-2)$$

$$3a^2 + 6a + c = 561$$

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha \cos 2\alpha + \\ &+ \cos\alpha \sin 2\alpha = \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + \cos\alpha \cdot 2\sin\alpha \cos\alpha = \\ &= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha \cos^2\alpha = \sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \\ &= 3\sin\alpha \cos^2\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\ \min(x^2 + y^2 + z^2) &= ? \end{aligned}$$

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$x \ln 25 + y \ln 25 + y \ln 3 + z \ln 25 + z \ln 5 = \ln 9 + \ln 5 = 2 \ln 3 + \ln 5$$

$$\ln 25(x + y + z) + y \ln 3 + z \ln 5 = 2 \ln 3 + \ln 5$$

$$R(\ln 25, \ln 75, \ln 125), \quad x = y = z$$

$$\frac{3\pi}{14} = \alpha; \quad \frac{3\pi}{7} = 2\alpha; \quad \frac{9\pi}{14} = 3\alpha$$

$$\mu = -76$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$S(x_0, y_0, z_0) \in K$$

$$f(t) = 46t^2 - 16t - 15 = 0$$

$$46 \cdot \frac{9}{16} - 16 \cdot \frac{3}{4} - 15 = 27 - 12 - 15 = 0$$

$$\vec{R} = (x_0, y_0, z_0)$$

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \quad \text{VS} \quad 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$5 - 4 \sin 3\alpha \quad \text{VS} \quad 3 \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha$$

$$5 - 4(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) \quad \text{VS} \quad 3 \sin \alpha - 4(1 - 2\sin^2 \alpha)$$

$$-4 \cos \frac{3\pi}{7} = -4 \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{3\pi}{14} \right) = -4 + 8 \sin^2 \left( \frac{3\pi}{14} \right)$$

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \quad \text{VS} \quad 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 + 8 \sin^2 \left( \frac{3\pi}{14} \right) \quad \text{g(VS)}$$

$$16 \sin^3 \alpha - 8 \sin^2 \alpha - 15 \sin \alpha + 9 = 0$$

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha \cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha =$$

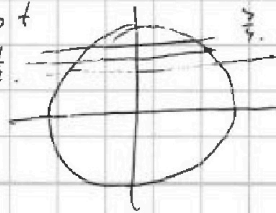
$$= \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + \cos\alpha \cdot 2\sin\alpha \cos\alpha =$$

$$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha \cos^2\alpha =$$

$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\frac{3}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) > \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)$$

$$16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 = 0$$



$$\frac{3}{4} \text{ VS } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} \text{ VS } 4$$

$$18 > 16$$