МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 1080$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{9\pi}{14}$ или $3\sin\dfrac{3\pi}{14} - 4\cos\dfrac{3\pi}{7}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 4 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть кол-во вершин равно n, $\Rightarrow \boxed{n \in \mathbb{N}}$ тогда, сумма $\angle$-ов равна $180°(n-2)$ (легко доказывается, т.к. у Δ-ка $180°$, добавляя вершину добавляем „треугольник" $\Rightarrow$ сумма плюс $180°$). С другой стороны $\angle$-ы образуют арифм. прогрессию с разницей 2, тогда сумма $\angle$-ов записывается как $132°n \pm \frac{2°(n-1)n}{2}$. Приравняем:

$$180°(n-2) = 132n \pm (n-1)n$$

1) $180n - 360 = 132n + n^2 - n$;

$n^2 - 49n + 360 = 0$;

т. Виета: $n_1 + n_2 = 49$, $n_1 n_2 = 360$ $\Rightarrow \boxed{n_1 = 40}$, $n_2 = 9$

2) $180n - 360 = 132n - n^2 + n$; $n_{1,2} = \frac{-47 \pm \sqrt{47^2 + 4\cdot 360}}{2} = \frac{-47 \pm \sqrt{3649}}{2}$

$n^2 + 47n - 360 = 0$;

$(62^2 = 3844 \quad 63^2 = 3969)$ $\quad 60^2 = 3600 \quad 61^2 = 3721$

$60^2 < 3649 < 3721\ (61^2)$.

$\Rightarrow n_{1,2} \notin \mathbb{N}$

Тогда больше из чисел 9 — 40.

Ответ: 40 вершин.

$360 \cdot 4 = 1440$; $47 \cdot 47 = 2209$; $2209 + 1440 = 3649$

$62 \cdot 62 = 3844$; $63 \cdot 63 = 3969$; $61 \cdot 61 = 3721$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3 $a \in \mathbb{N}$ $\Sigma a = 7a + 21$

a_1 – 1-ое число семёрки; a_7 – 7-ое число семёрки

$p^2 - q^2 = 1080$ $(p-q)(p+q) = 1080$

$(7a+21-a-i)^2 - (7a+21-a-j)^2 = 1080$

$(6a+21-i)^2 - (6a+21-j)^2 = 1080$

$(6a+21-i-6a-21+j)(12a+42-i-j) = 1080$;

$(j-i)(12a+42-i-j) = 1080$;

$0 < j-i < 7$

1, 2, 3, 5, 6

$b \cdot d = 1080$

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 15, 27, 30, $2 \cdot 5 \cdot 3$ и $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

$30 \cdot 36 = 1080$

$27 \cdot 40$

$9 \cdot 120$

$10 \cdot 108$

$p - q = 30$
$p + q = 36$
$2p = 66$
$p = 33$
$q = 3$

$a + b = x$
$a - b = y$
$2a = x + y$
$a = \frac{x+y}{2}$
$b = \frac{x-y}{2}$

$1 \le a - b \le 6$

$1 \le y \le 6$

$i = 2$ $j = 4$

$p - q = 2$
$p + q = 540$
$2p = 542$
$\boxed{p = 271, q = 269}$

$p - q = 3 \Rightarrow p \ne$
$p + q = 360$

$p - q = 4$
$p + q = 270$
$2p = 274$

$p - q = 6$
$p + q = 180$
$2p = 93$
$q = 87$

$271 + i = 6a + 21$
$269 + i = 6a + 19$

$271 + a + i = 7a + 21$
$269 + a + j = 7a + 21$

$2 + i - j = 0$;
$2 = j - i$

$271 + i = k$
$269 + j = k$

$6a + 15 = 271$;
$6a = 256$

$6a + 21 = 271$;
$6a = 250$

$6a + k = 271$

$41 < a < 42$, ...

$\Rightarrow a = 41$

(15; 21)

42, 43, 44, 45, 46, 47, 48

271

№2

$x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45;$

Воспользуемся свойством логарифма:

$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45;$

При этом, мы ничего не портим, т.к. 25^x – показательная функция => больше „0" для любых значений; $75^y, 125^z$ – аналогично больше нуля.

По свойству логарифма о „сумме/разности" получим:

$$\ln \frac{25^x\cdot 75^y\cdot 125^z}{45} = 0;$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{25^x\cdot 75^y\cdot 125^z}{45} = 1;$$

$$5^{2x+2y+3z}\cdot 3^y = 5\cdot 3^2$$

Т.к. x, y, z – целые ($\mathbb{Z}$), $\Rightarrow$ $\begin{cases} 2x+2y+3z=1 & (1) \\ y=2 & (2) \end{cases}$

($5^{(2x+2y+3z-1)} = 3^{(2-y)}$ – очевидно, что для $\mathbb{Z}$ чисел только если степени равны нулю)

Подставим (2) в (1),

$2x+4+3z=1;$

$2x+3z=-3;$

$x = \frac{-3-3z}{2} = -\frac{3}{2}(z+1)$

Тогда $x^2+y^2+z^2$ примет вид: $\left(-\frac{3}{2}(z+1)\right)^2+2^2+z^2$

Производную данного выражения: $\left(\frac{9}{4}z^2+\frac{9}{2}z+\frac{9}{4}+4+z^2\right)' = \left(\frac{13}{4}z^2+\frac{9}{2}z+\frac{25}{4}\right)' = \frac{13}{2}z+\frac{9}{2} = 0 \Rightarrow z = -\frac{9}{2} : \frac{13}{2} = -\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{13} = -\frac{9}{13}$

Мы нашли вершину параболы, т.к. значения симметричны относительно вершины => минимум в ближайшем к $-\frac{9}{13}$ целом значении, а именно в $z=-1$.

$x = -\frac{3}{2}(z+1) = -\frac{3}{2}(-1+1) = 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 0^2+2^2+(-1)^2 = 5.$

Ответ: 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3 $p^2 - q^2 = 1080 \Rightarrow (p-q)(p+q) =$

Поймём, что p и q могут отличаться не более, чем на 6 (пример a_1 и a_1+6), тогда пусть $p+q = x$, $p-q = y$,

тогда $\begin{cases} p+q = x \\ p-q = y \end{cases} \Rightarrow p = \frac{x+y}{2};\ q = \frac{x-y}{2} \Rightarrow \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \leq 6;$

$1 \leq y \leq 6$. Делители 1080 от 1 до 6: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

(Т.к числа $\in \mathbb{N} \Rightarrow p-q$, и $p+q$ и p, и q тоже натуральные)

Нет смысла $\forall$ нечётные делители т.к если x-неч., то y-чёт. и наоборот $\Rightarrow x+y$-нечёт, но $p = \frac{x+y}{2}$ (p-натуральное $\Rightarrow \vdots 2$)

1. $\begin{cases} p+q = 180 \\ p-q = 6 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{186}{2} = 93 \vdots 3 \Rightarrow$ не подходит

~~2. $\begin{cases} p+q = 360 \\ p-q = 3 \end{cases}$~~

2. $\begin{cases} p+q = 270 \\ p-q = 4 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{274}{2} \vdots 2 \Rightarrow$ не подходит

3. $\begin{cases} p+q = 540 \\ p-q = 2 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p = \frac{542}{2} = 271 \\ q = 269 \end{array}\right)$ оба простые

Пусть первое число a, тогда сумма 7 чисел равна $7a+21$, но тогда минимальная сумма 6 чисел равна $6a+15$, максимальная равна $6a+21$, тогда $6a+15 < 271$ и $6a+21 > 269$

1. $6a+15 < 271 \Rightarrow \boxed{a < \frac{256}{6}}$ 2. $6a+21 > 269 \Rightarrow \boxed{a > \frac{248}{6}}$

$\Rightarrow a > \frac{248}{6}$

$256 : 6 = 42$ (ост. 4); $248 : 6 = 41$ (ост. 2)

Значит т.к $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 42$, тогда

Ответ: $M = \{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

$5-4\sin\frac{9\pi}{14}$ или $3\sin\frac{3\pi}{14}-4\cos\frac{3\pi}{7}$

Пусть $\frac{3\pi}{14}=x$ => перепишем в виде:

$5-4\sin 3x$ или $3\sin x-4\cos 2x$

$\sin 3x=\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos x=\sin x(1-2\sin^2 x)+2\sin x(1-\sin^2 x)=$
$=\sin x-2\sin^3 x+2\sin x-2\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x$

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$

Пусть $\sin x=y$, тогда перепишем в виде:

$5-4(3y-4y^3)$ или $3y-4(1-2y^2)$

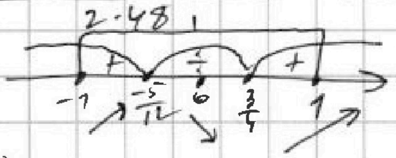
Отнимем от 1-ого 2-ое, тогда:

$f=5-12y+16y^3-3y+4-8y^2=16y^3-15y-8y^2+9$

$f'=48y^2-16y-15=0$

$y_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{16^2+4\cdot15\cdot48}}{2\cdot48}=\frac{16\pm56}{96}$ $\quad y_1=\frac{-40}{96}=\frac{-5}{12}$ $\quad y_2=\frac{72}{96}=\frac{3}{4}$

Тогда



$(\sin x\in[-1;1])$

$f\left(\frac{3}{4}\right)=16\cdot\frac{27}{64}-8\cdot\frac{9}{16}-15\cdot\frac{3}{4}+9=\frac{27}{4}-\frac{18}{4}-\frac{45}{4}+\frac{36}{4}=0$

Значит, что для $\sin x\in[0;1]$ ф-ия в минимальной (.) на отрезке принимает значение „0", но тогда т.к. $\sin\frac{3\pi}{14}\neq\frac{3}{4}$ ($\sin\frac{3\pi}{14}<\sin\frac{\pi}{4}$ - монотонна на $[0;\frac{\pi}{2}]$, а $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}<\frac{3}{4}$, т.к. $\sqrt2\cdot2<3$, $\sqrt2<1{,}5$) и $\sin\frac{3\pi}{14}\in[0;1]$
=> $f>0$ и значит, что левая часть больше, чем правая.

Ответ: $5-4\sin\frac{9\pi}{14}>3\sin\frac{3\pi}{14}-4\cos\frac{3\pi}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Т.к ~~8~~ 6 (·) уже гарантированно лежат в 1 плоскости, то ∀ основание пирамиды содержащее [3; 8] точек этой плоскости, кол-во пирамид:

$$\left(\frac{8!}{5!\,3!}+\frac{8!}{4!\,4!}+\frac{8!}{3!\,5!}+\frac{8!}{2!\,6!}+\frac{8!}{1!\,7!}+\frac{8!}{8!\cdot 1}\right)\cdot 4$$

Т.к про оставшиеся 4 вершины известно, что они не могут лежать в 1 плоскости => из этих 4х вершин есть 4 способа выбрать 3(·) — они точно образуют плоскость. Для каждой тройки точек из 4х точек есть ~~9~~ 8 вершин пирамиды, тогда кол-во пирамид ~~4·9=36~~ $4\cdot 8+1=33$ ← с 4 точками вне плоскости с окружностью

Общее кол-во пирамид:

$$\left(\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2}+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}+1\right)\cdot4+33=\left(56\cdot2+70+28+8+1\right)\cdot4+33=$$

$$=\cancel{242}\ 836+33=869$$

~~Ответ: 242~~

Ответ: 869.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5-4\sin\frac{3\pi}{14}$ или $3\sin\frac{3\pi}{14}-4\cos\frac{3\pi}{7}$

$3\sin\frac{3\pi}{14}+4\sin\frac{3\pi}{14}-4\cos\frac{3\pi}{7}=5$;

$\frac{3}{5}\sin\frac{3\pi}{14}+\frac{4}{5}\sin\frac{3\pi}{14}-\frac{4}{5}\cos\frac{3\pi}{7}=1$;

$\frac{3}{5}\sin\frac{3\pi}{14}+\frac{4}{5}$

$\sin(\alpha+2\alpha)=$

$=\sin\alpha\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos\alpha=$

$=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin^2\alpha(1-2\sin^2\alpha)$

$\sin3\alpha=(1-2\sin^2\alpha)(\sin\alpha+\sin2\alpha)=4\sin^3\alpha-3$

$=(1-2\sin^2\alpha)(3\sin\alpha)=3\sin\alpha-6\sin^2\alpha$

$5-4\sin3\alpha$ или $3\sin\alpha-4\cos2\alpha$

$5-4\sin3\alpha$ или $3\sin\alpha-4(1-2\sin^2\alpha)$

$2\sqrt{2}$ или 3; $1{,}4$; $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3}{4}$; $\frac{2\sqrt{2}}{4}$

$\frac{72}{96}=\frac{2^3\cdot3^2}{2^5\cdot3}$

$\sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cos2\alpha+\sin2\alpha\cos\alpha=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)=$
$\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha-2\sin^3\alpha$
$=-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha$

$-\frac{40}{96}=-\frac{10}{24}=-\frac{5}{12}$

$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$5-4(3x-4x^3)$ или $3x-4(1-2x^2)$;

$\begin{cases}5-12x+16x^3 \text{ или } 3x-4+8x^2\\ x\in[-1,1]\end{cases}$

$\frac{3\pi}{14}<\frac{\pi}{4}$

$16-8-15+9=2$

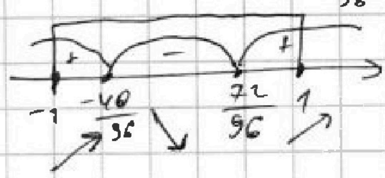
$1>\sin x>\frac{3}{4}$

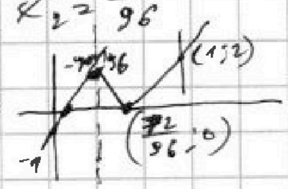
$16x^3-8x^2-15x+9=0$;

$f'=48x^2-16x-15=0$; $x_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{16^2+4\cdot48\cdot15}}{2\cdot48}=\frac{16\pm56}{96}=$

$x_1+x_2=16$; $x_1x_2=-15$

$x_1=-\frac{40}{96}$; $x_2=\frac{72}{96}$





$16\cdot\left(\frac{-40}{96}\right)^3-8\left(\frac{40}{96}\right)^2+15\cdot\frac{40}{96}+9$

$16\cdot\frac{1}{8}-8\cdot\frac{1}{4}+15\cdot\frac{1}{2}+9$; $2-2$; $7{,}5$

$16\cdot72$

$16\cdot\left(\frac{72}{96}\right)^3-8\cdot\left(\frac{72}{96}\right)^2-15\cdot\frac{72}{96}+9$

$16\cdot\frac{27}{64}-\frac{8\cdot9}{16}-\frac{15\cdot3}{4}+9$

$\frac{72}{96}\cdot\left(16\left(\frac{72}{96}\right)^2-15\right)$

$\frac{27}{4}-\frac{18-45}{4}+\frac{36}{4}=0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

$180^\circ(n-2) = 132n \pm \frac{2(n-1)n}{2}$;

$180n - 360 = 132n \pm n^2 \mp n$

1) $180n - 360 = 132n + n^2 - n$,

$n^2 - 49n + 360 = 0$;

$n_1 + n_2 = 49 \Rightarrow \boxed{n_1 = 40}$ $n_2 = 9$

$n_1 n_2 = 360$

2) $180n - 360 = 132n - n^2 + n$;

$n^2 - 47n - 360 = 0$,

$n_1, n_2 = \frac{47 \pm \sqrt{47^2 + 4 \cdot 360}}{2}$

№2

$\bar a = \{x; y; z\}$

$\bar b = \{\ln 25; \ln 75; \ln 125\}$

$x, y, z \in \mathbb{Z}$ $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$

$x^2 + y^2 + z^2 = 12$

$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$;

$\ln \frac{25^x \cdot 75^y \cdot 125^z}{45} = 0$,

$\frac{25^x \cdot 75^y \cdot 125^z}{45} = 1$,

$\frac{5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z}}{5 \cdot 3^2} = 1$;

$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5 \cdot 3^2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

$2x + 4 + 3z = 1$;

$2x + 3z = -3$

$x = \frac{-3z - 3}{2}$

$x = 0 \Rightarrow 1 + 4 + 0 = 5$

$\left(\left(-\frac{3}{2}(z+1)\right)^2 + 4 + z^2\right)' =$

$\left(\frac{9}{4}z^2 + \frac{9}{2}z + \frac{9}{4} + 4 + z^2\right)' =$

$\left(\frac{13}{4}z^2 + \frac{9}{2}z + \frac{25}{4}\right)' = \frac{13}{2}z + \frac{9}{2} = 0$, $z = -\frac{9}{13}$

$z = -1$

$\log_a b^x = x \log_a b$

$45 \cdot 4 = 90 \cdot 2$

$47^2 = 2209$, $2209 + 1440 = 3649$

$63 \cdot 63 = 3969$

$61 \cdot 61$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!