

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность  $2^\circ$  и начинающуюся с угла  $143^\circ$ . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ .
3. [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 792$ .
4. [5 баллов] Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а отношение оснований  $AD : BC = 1 : 2$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанных в треугольники  $BMC$  и  $AMD$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$ , а  $\omega_2$  – в точках  $Z$  и  $W$  ( $X$  и  $Z$  находятся ближе к  $M$ ). Найдите радиус окружности  $\omega_1$ , если  $I_1I_2 = 13/2$ , а  $MZ \cdot MY = 5$ .
5. [5 баллов] Что больше:  $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$  или  $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$ ?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости  $\alpha$ , а остальные 5 расположены вне плоскости  $\alpha$ . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость –  $\alpha$ . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  ( $S$  – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка  $X$  лежит на прямой  $SF$ , точка  $Y$  – на прямой  $AD$ , причём отрезок  $XY$  параллелен плоскости  $SAB$  (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $XY$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. У выпуклого  $n$ -угольника сумма углов равна  $180(n-2)$  градусов  
т.к. углы составляют арифметическую прогрессию, то  
их сумма будет равна  $\Sigma = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n =$   
 $\Rightarrow \frac{2 \cdot 143 + 2(n-1)}{2} \cdot n = (142+n) \cdot n$

Приравняем значение суммы:

$$180(n-2) = (142+n) \cdot n = 142n + n^2 \Rightarrow 180n - 360 = 142n + n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - 38n + 360 = 0 \Rightarrow n = \frac{38 \pm 2}{2}$$

$$\text{Нам требуется найти максимальное } n \Rightarrow n = \frac{38+2}{2} = 20$$

Ответ: 20



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 2. \quad & x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6 \\ & \ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z = \ln 6 \\ & \ln (16^x \cdot 8^y \cdot 24^z) = \ln 6 \\ & 16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 6 \end{aligned}$$

единственный из множителей, содержащий 6, — это 24  
 $\Rightarrow z \neq 0$  и  $z = 1$ ,

$$\Rightarrow 24 \cdot 8^y \cdot 16^x = 6 \Rightarrow 4 \cdot 8^y \cdot 16^x = 1 \Rightarrow 4 = \frac{16^{-x}}{8^y}$$

для удобства обозначим  $(-x)$  и  $y$  за  $a$  и  $b$

$$\text{тогда } \frac{16^a}{8^b} = \frac{2^a \cdot 8^a}{8^b} = 2^a \cdot 8^{a-b} = 4$$

тогда минимизировать  $a$  и  $(a-b)$ , рассмотрим

$$2 \text{ случая: } 2^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 8$$

$$\frac{8}{2} = 4 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5 \Rightarrow \text{меньше}$$

рассмотрим остальные случаи, где  $a^2 + b^2 < 5$

$$\Rightarrow 1) a = 0 \Rightarrow 1 \cdot 8^{-b} = 4 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}$$

$$2) a = -1 \Rightarrow b = -2 \text{ (из пред. пункта)}$$

$$3) a = 1 \Rightarrow 2 \cdot 8^{1-b} = 4 \Rightarrow 8^{1-b} = 2 \Rightarrow b \in \mathbb{Z}$$

$$4) a = -2 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot 8^{-2-b} = 2 \Rightarrow 8^{-2-b} = 8 \Rightarrow -2-b = 1 \Rightarrow b = -3$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13 > 5$$

$$5) a = 2 \Rightarrow 4 \cdot 8^{2-b} = 4 \Rightarrow 8^{2-b} = 1 \Rightarrow 2-b = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 8 > 5$$

$\Rightarrow$  наименьшая сумма  $(a^2 + b^2)$  при  $a = -1$ ;  $b = -2$

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 6$$

$$z^2 = 1$$

Ответ: 6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.  $p, q$  - простые числа  $\Rightarrow (p-q)$  и  $(p+q)$  - четные числа

$$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 792 = 11 \cdot 3^2 \cdot 2^3$$

предположим, что  $M = \{a; b; c; d; e; f; g\}$

допустим  $p$  - сумма без  $a$ ,  $q$  - сумма без  $b$  (пусть  $\Sigma = c+d+e+f+g$ )

$$p = \Sigma + b \Rightarrow p - q = b - a$$

$$q = \Sigma + a$$

т.к. числа последовательные, то  $\max(b-a) = 6 = \max(p-q)$

рассмотрим все возможные варианты  $(p-q)$  при условии,

$\#$  это  $p-q \leq 6$ , и  $(p-q) : 2$ , и  $(p+q) : 2$

1)  $p-q=2 \Rightarrow p+q=396$

$$\begin{cases} p-q=2 \\ p+q=396 \end{cases} \Rightarrow 2p=398 \Rightarrow p=199, q=197 \text{ (возможно)}$$

2)  $p-q=4 \Rightarrow p+q=198$

$$\begin{cases} p-q=4 \\ p+q=198 \end{cases} \Rightarrow 2p=202 \Rightarrow p=101, q=97 \text{ (возможно)}$$

3)  $p-q=6 \Rightarrow p+q=132$

$$\begin{cases} p-q=6 \\ p+q=132 \end{cases} \Rightarrow 2p=138 \Rightarrow p=69, q=73 \text{ (невозм.)}$$

2.1)  $b-a=4$

рассмотрим

$$\begin{array}{cc} a & b \\ | & | \\ a & b \end{array} \Rightarrow 6a+16=97 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ | & | \\ a & b \end{array} \Rightarrow 6a+15=97 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ | & | \\ a & b \end{array} \Rightarrow 6a+15=97 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$  не возможно

2.2)  $b-a=2$

рассмотрим

$$\begin{array}{cc} a & b \\ | & | \\ a & b \end{array} \Rightarrow 6a+12=197 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ | & | \\ a & b \end{array} \Rightarrow 6a+11=197 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ | & | \\ a & b \end{array} \Rightarrow 6a+10=197 \Rightarrow a=32 \text{ (возм.)}$$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ | & | \\ a & b \end{array} \Rightarrow 6a+9=197 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$$

$\Rightarrow M = \{29; 30; 31; 32; 33; 34; 35\}$

$\Rightarrow M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\} \Rightarrow M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$

Ответ:  $M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$   $M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$R = \frac{13 \left( \frac{10}{8} - b \right)}{\frac{10}{8}} = 13 \left( \frac{10 - 8b}{8} \right) \cdot \frac{8}{10} = \frac{13}{40} (10 - 8b^2)$$

$$4R \cdot \frac{2}{13} = \frac{40}{13} R$$

$$8^2 + 4R^2 - 4bR \cdot \frac{2a}{13} = \frac{169}{9} \Rightarrow 8^2 + 4R^2 - \frac{40}{13} R = \frac{169}{9}$$

$$\frac{40}{13} R = 10 - 8b^2 \Rightarrow b^2 = 10 - \frac{40}{13} R$$

$$10 - \frac{40}{13} R + 4R^2 - \frac{40}{13} R = \frac{169}{9}$$

$$\frac{169 - 90}{9} = \frac{79}{9}$$

$$4R^2 - \frac{80}{13} R + \frac{79}{9} = 0$$

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \quad \vee \quad 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$\frac{\pi}{14} = \alpha$$

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) = -2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha = 2 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$5 - 4 \sin 3\alpha \vee 4 \cos 2\alpha - 5 \sin \alpha$$

$$5 - 12 \sin^3 \alpha + 16 \sin^2 \alpha \vee 4 - 8 \sin^2 \alpha - 5 \sin \alpha$$

$$16 \sin^3 \alpha + 8 \sin^2 \alpha - 7 \sin \alpha + 1 = 0$$

$$16t^3 + 8t^2 - 7t + 1 = 0$$

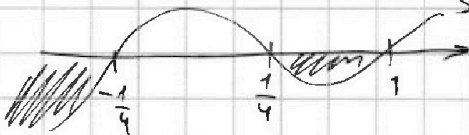
$$16t^3 - 4t^2 + 12t^2 - 3t - 4t + 1 = 0$$

$$4t^2(4t - 1) - 3t(4t - 1) - (4t - 1) = 0$$

$$(4t^2 - 3t - 1)(4t - 1) = 0$$

$$\left(t - \frac{1}{4}\right)(t - 1)\left(t + \frac{1}{4}\right) = 0$$

1)  $t = \frac{1}{4}$



$$C_7^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$$

$$2R \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{5}{13}$$

$$\frac{30R}{13}$$

$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 5 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\frac{36 \cdot 5 - 136}{60} = \frac{180 - 136}{60}$$

$$\frac{13 \left( \frac{10}{8} - b \right)}{\frac{12.5}{R}} =$$

$$\frac{60}{11} R = 10 - 8b^2$$

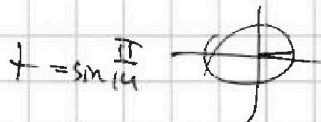
$$C_7^4 = \frac{7!}{6! \cdot 1!} = 7$$

$$C_5^1 = \frac{5!}{1! \cdot 4!}$$

$$468 - 220R - 1024 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$\frac{3 \pm 5}{8} = -\frac{1}{4}, 1$$



$$t = \sin \frac{\pi}{14} \vee \frac{1}{4} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{6}}{2}$$

$$13 \cdot 9 = 90 + 2R = \frac{132}{468}$$

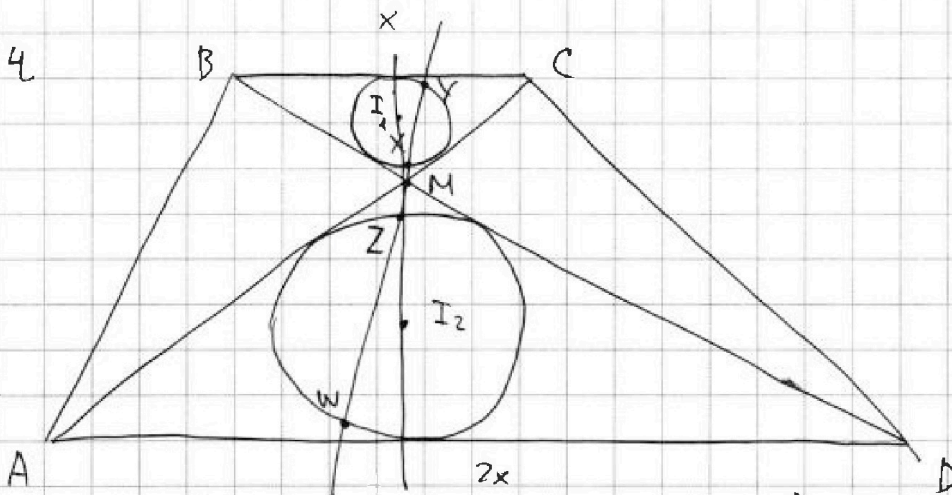


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

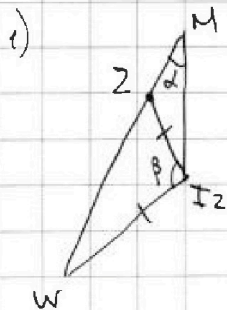


пусть  $R_2$  - радиусе  $WZ$ ,  $R_1$  - радиусе  $WY$ , тогда  $\frac{R_2}{R_1} = \frac{2}{7} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2R$  - радиусе  $WZ$ ,  $R = WY$

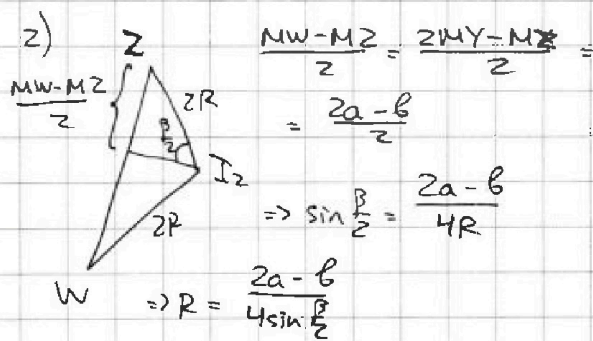
$$\frac{MI_1}{MI_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow MI_1 = \frac{13}{6}; MI_2 = \frac{13}{3}$$

пусть  $\angle MYI_1 = \angle I_2MW = \alpha$ ,  $\angle WI_2M = \beta$ ,  $MY = a$ ,  $MZ = b$

Рассмотрим треугольники:  $\triangle MI_1Y$ ,  $\triangle MI_2Z$ ,  $\triangle I_2ZW$



$$\angle MZI_2 = 90 + \frac{\beta}{2}$$

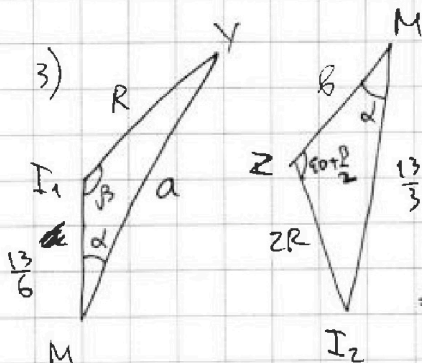


$$\frac{MW - MZ}{2} = \frac{2MY - MZ}{2} =$$

$$= \frac{2a - b}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\beta}{2} = \frac{2a - b}{4R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2a - b}{4 \sin \frac{\beta}{2}}$$



$$\Rightarrow \text{по т. синусов: } \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \frac{\beta}{2} = \frac{3a}{13}$$

$$\frac{2R}{\sin \alpha} = \frac{13}{\sin(90 + \frac{\beta}{2})}$$

$$\Rightarrow R = \frac{(2a - b)13}{12a} = \frac{36a - 13b}{12a} = \frac{13}{60} (10 - b^2)$$

$$\text{по т. косинусов: } b^2 + 4R^2 - 2b \cdot 2R \cdot \sin \frac{\beta}{2} = \frac{169}{9}$$

$$\Rightarrow b^2 + 4R^2 - \frac{30R}{13} = \frac{169}{9} \Rightarrow -\frac{60}{13}R + 10 + 4R^2 + \frac{30}{13}R = \frac{169}{9}$$

$$\Rightarrow 4R^2 - \frac{30}{13}R + \frac{79}{9} = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow b^2 = \frac{60}{13}R + 10$$

$$\text{по т. косинусов в } \triangle MZI_2: b^2 + 4R^2 + 2b \cdot 2R \cdot \sin \frac{P}{2} = \frac{169}{9}$$

$$\frac{60}{13}R + 10 + 4R^2 \Rightarrow \frac{60}{13}R = \frac{169}{9} \Rightarrow R^2 = \frac{79}{36} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{79}}{6}$$

$$\text{Ответ: } R = \frac{\sqrt{79}}{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5. 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{4} \vee 4 \cos \frac{\pi}{4} - 5 \sin \frac{\pi}{4}$$

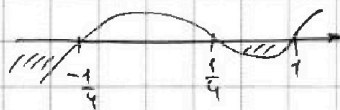
$$\sin \frac{\pi}{4} = t$$

$$5 - 12t + 16t^3 \vee 4 - 8t^2 - 5t$$

$$16t^3 + 8t^2 - 7t + 1 \vee 0$$

$$(t-1)\left(t-\frac{1}{4}\right)\left(t+\frac{1}{4}\right) \vee 0$$

предположим, что  $t = <$



сравним  $\sin \frac{\pi}{4}$  и  $\frac{1}{4}$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} < \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} < \frac{1}{4} \Rightarrow \text{знак } < \text{ не подходит}$$

При знаке  $>$ :  $t \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$ , это подходит

$$\Rightarrow 16t^3 + 8t^2 - 7t + 1 > 0 \Rightarrow 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{4} > 4 \cos \frac{\pi}{4} - 5 \sin \frac{\pi}{4}$$

Ответ: первое больше





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. ~~для n-угольной пирамиды~~

Рассчитаем варианты треугольной пирамиды:

- 1) 3 вершины в  $\alpha$ :  ~~$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 8 \cdot C_7^3 \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60$~~
- 2) 2 вершины в  $\alpha$ :  ~~$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot C_7^2 \cdot C_5^2 = 21 \cdot 10 = 210$~~
- 3) 1 вершина в  $\alpha$ :  ~~$7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot C_7^1 \cdot C_5^3 = 7 \cdot 10 = 70$~~

Для n-угольной пирамиды (нум. в основании) возможны лишь случаи, когда основание лежит в  $\alpha$

$\Rightarrow$  выбираем n точек из  $\alpha$  и одну из остальных

~~$n=4: 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot C_7^4 \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60$~~

~~$n=5: 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot C_7^5 \cdot 5 = 21 \cdot 5 = 105$~~

~~$n=6: 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot C_7^6 \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35$~~

~~$n=7: 5 \cdot C_7^7 \cdot 5 = 5$~~

$\Rightarrow \Sigma = 60 + 210 + 70 + 60 + 105 + 35 + 5 = 545$

Ответ: 545

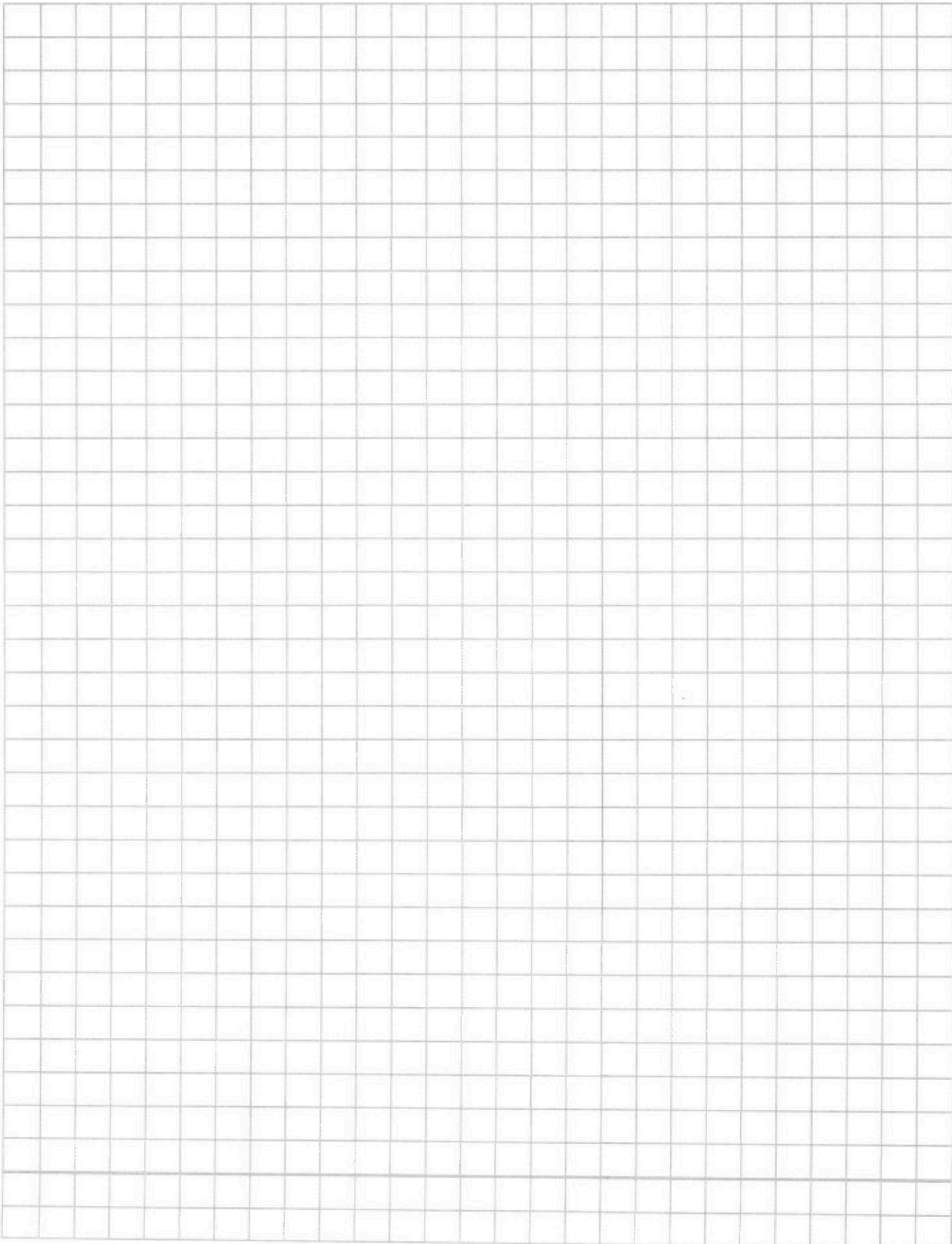


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



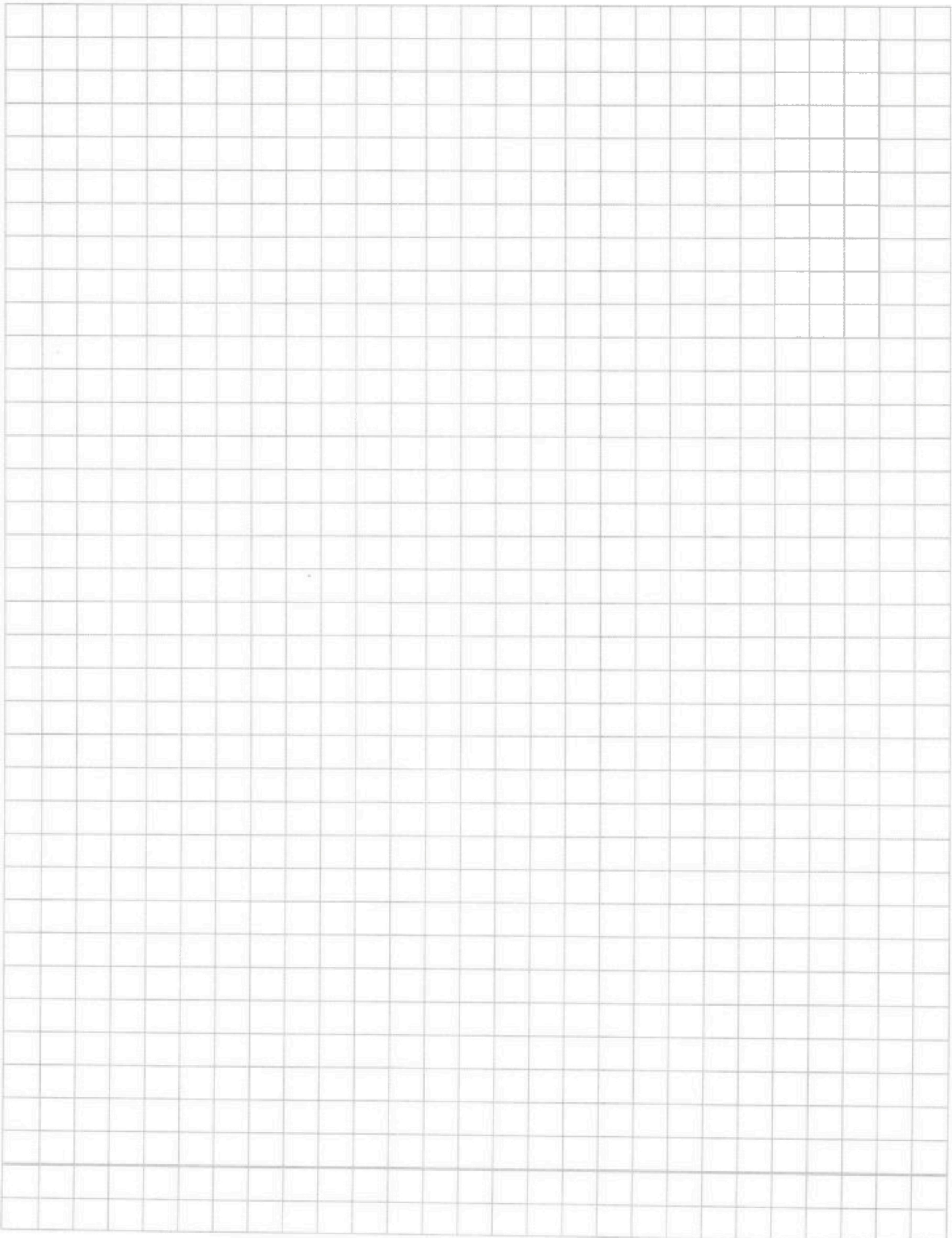


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

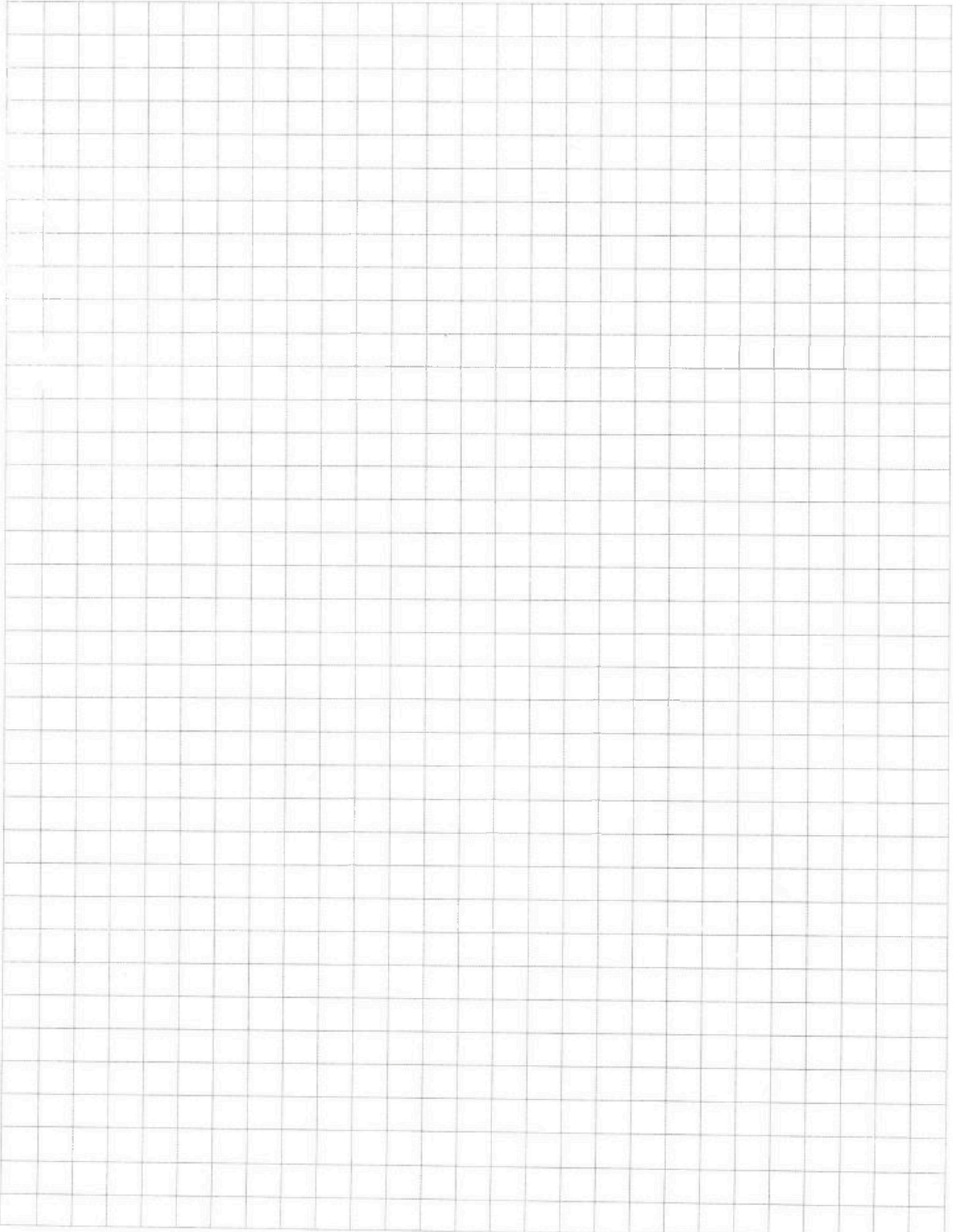
5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



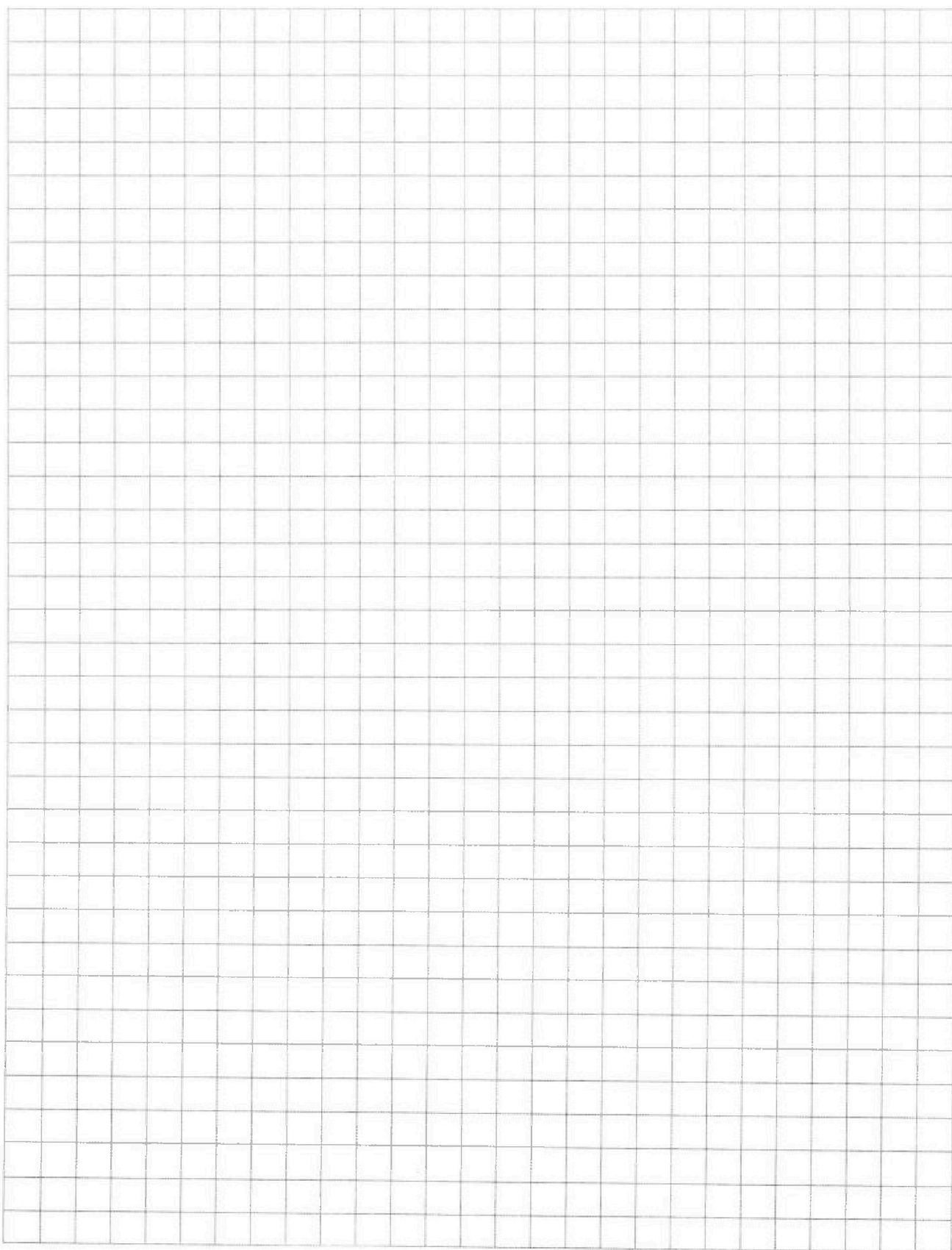


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



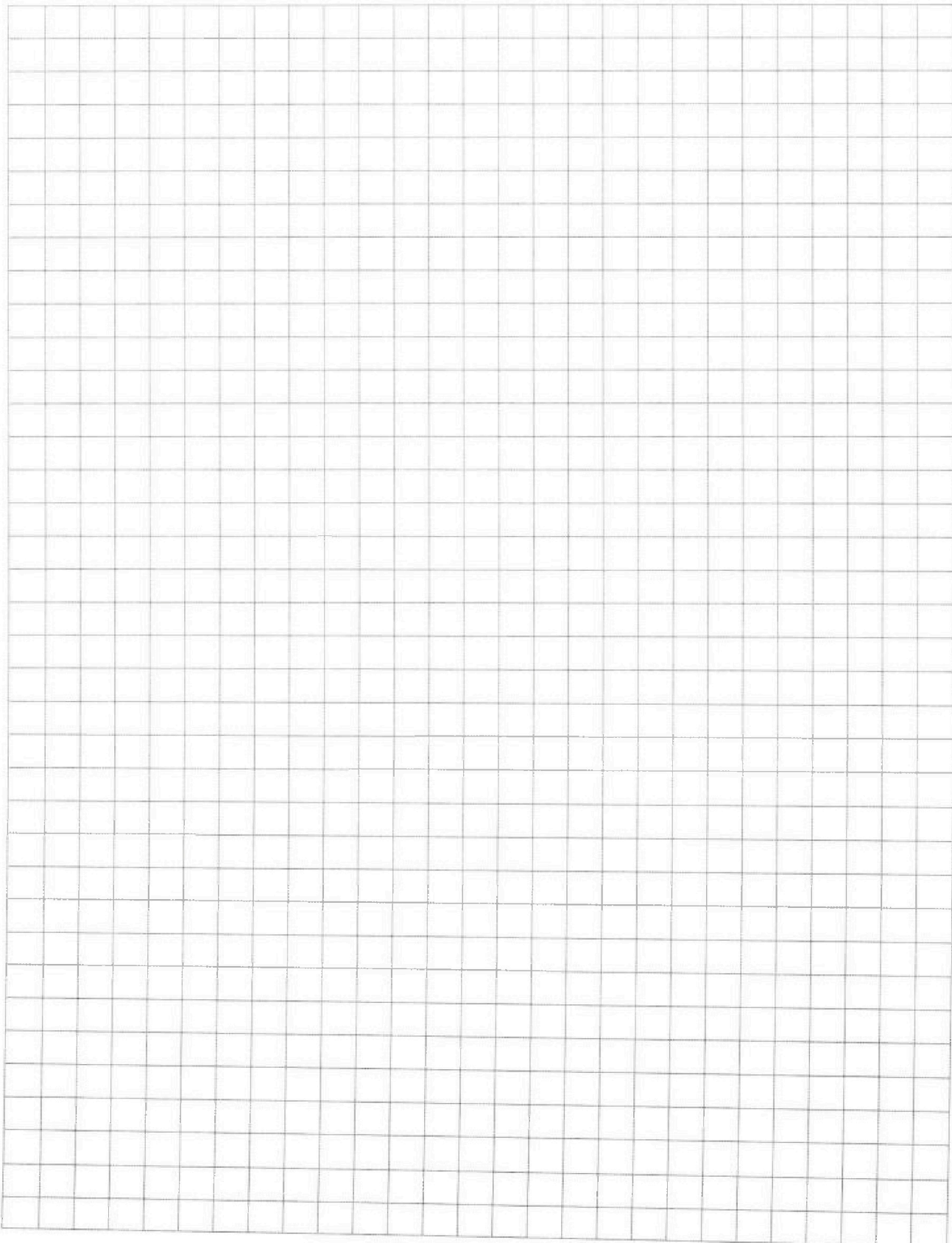


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



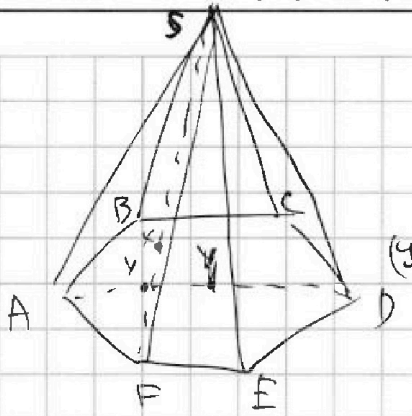
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 6$$

$$24 \cdot 8^y \cdot 16^x = 6$$

$$4 \cdot 8^y \cdot 16^x = 1$$

$$4 \cdot 8^y \cdot 16^x = 1 \Rightarrow 4 \cdot 8^y = 16^{-x}$$

$(y; -x)$

$$(0; 0) \Rightarrow 4 = 1$$

$$(0; 1) \Rightarrow 4 = 16$$

$$(1; 0) \Rightarrow 4 \cdot 8 = 6$$

$$(0; 2) \Rightarrow 4 = 256$$

$$(2; 0) \Rightarrow 4 \cdot 64 = 1$$

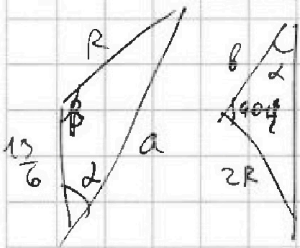
$$(1; 2) \Rightarrow$$

$$4 = \frac{16^a}{8^b} = \frac{2^4 \cdot 8^a}{8^b} =$$

$$= 2^a \cdot 8^{a-b} = 2^a \cdot 2^{3(a-b)} = 2^{a+3a-3b} = 2^{4a-3b}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ a - b = 1 \Rightarrow -1 - b = 1 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

$$\frac{2^{-x} \cdot 8^{-x}}{8^y}$$

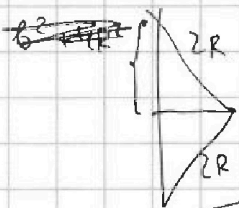


$$\frac{R}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta}$$

$$2 \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{13}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{13}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{a}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{13}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sin \frac{\beta}{2} = \frac{15}{13}$$



$$\frac{7 \cdot 6}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2}$$

$$\frac{7 \cdot 6}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2}$$

7.

7

$$130 + 210 + 60 + 105 + 40$$

$$340 + 100 + 105$$

$$440 + 105$$

$$545$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2x\sqrt{1-x^2} = \frac{p}{2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2(1-x^2) = \frac{1}{16} \Rightarrow x^2 - x^4 - \frac{1}{16} = 0$$

$$x^4 - x^2 + \frac{1}{16} = 0$$

$$t^2 - t + \frac{1}{16} = 0$$

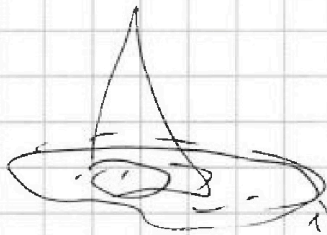
$$D = 1 - 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = \frac{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$$

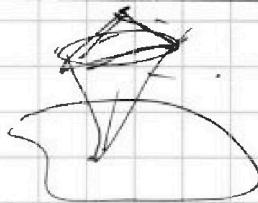
$$t = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} < \frac{1}{4}$$

$$5m \frac{\pi}{12} < \frac{p}{4} \Rightarrow 5m \frac{\pi}{12} < \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow 7$



перес. шаринга.



$$1) 3 \text{ Bd} : 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$2) 2 \text{ Bd} : 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 7 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3)$$

$$3) 1 \text{ Bd} : 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$4) \text{ угол} : 1) 4 \text{ Bd} : 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5$$

$$2) 3 \text{ Bd} : 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 7 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)$$

$$3) 2 \text{ Bd} : 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$4) 1 \text{ Bd} : 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$a \quad a+1 \quad a+2 \quad a+3 \quad a+4 \quad a+5 \quad a+6$$

$$1+2+3+5+6 \Rightarrow 1+6=17$$

29 30





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$4R = \frac{13(2a-b)}{2a}$   
 $\frac{2MY - MZ}{2} = \frac{2a-b}{2}$   
 $\frac{MW - MZ}{2}$   
 $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{2a-b}{4R} = \frac{2a}{13}$   
 $\frac{R \sin a}{R \sin b} = \frac{1}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow R \sin a = \frac{1}{2} R \sin b$   
 $2a = b$   
 $I_1 M = \frac{13}{6}$   
 $I_2 M = \frac{13}{3}$   
 $180 - (90 - \frac{\beta}{2}) = 90 + \frac{\beta}{2}$   
 $R^2 = \frac{169}{56} + a^2 - \frac{13}{3} a \cos d$   
 $4R^2 = \frac{169}{9} + b^2 - \frac{26}{3} b \cos d$   
 $\frac{169}{9} + a^2 - \frac{26}{3} a \cos d = \frac{169}{9} + b^2 - \frac{26}{3} b \cos d$   
 $\frac{R}{\sin d} = \frac{a}{\sin \beta} \Rightarrow$   
 $\frac{2R}{\sin d} = \frac{13}{3} \Rightarrow \frac{R}{\sin d} = \frac{13}{6} \Rightarrow \frac{a}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{13}{3} \Rightarrow \sin \frac{\beta}{2} = \frac{2a}{13}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p = 73; q = 79$$

$$b - a = 6$$



~~$$\Sigma_5 + a = 73$$~~
~~$$\Sigma_5 + b = 79$$~~

$$\Sigma_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{2a + 4}{2} \cdot 5 = (a + 2) \cdot 5 =$$

$$a = a_1 \Rightarrow \Sigma_6(a_1; a_6) = 73$$

$$b = a_7 \Rightarrow \Sigma_6(a_2; a_7) = 79$$

$$\frac{2a + 5}{2} \cdot 6 = 73$$

~~$$a + a + 5 = \frac{2(a+1) + 5}{2} \cdot 6 = 79$$~~

$$(2a + 5) \cdot 3 = 73$$

~~$$(2a + 7) \cdot 3 = 79$$~~

$$\Rightarrow \frac{2a + 5}{2a + 7} = \frac{73}{79} \Rightarrow 73 \cdot 2a + 73 \cdot 7 = 79 \cdot 2a + 79 \cdot 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot 2a = 73 \cdot 7 - 79 \cdot 5 = 511 - 395 = 116$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 7 \\ \hline 511 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 5 \\ \hline 395 \end{array}$$

$$5 + 100 + 112$$

$$\frac{400 \cdot 2}{2} = 200 - 1$$

$$p - q = 9 \cdot 2 = 18 \Rightarrow p + q = 11 \cdot 4 = 44$$

$$\begin{cases} p - q = 18 \\ p + q = 44 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2p = 18 + 44 = 62 \Rightarrow p = 31 \Rightarrow q = 13$$

$$3 \cdot 4 \cdot 11$$

$$44 \cdot 3$$

$$p - q = 2 \Rightarrow p + q = 11 \cdot 9 \cdot 4 = 11 \cdot 36 = 396$$

~~$$p - q = 4 \Rightarrow p + q = 11 \cdot 4 \cdot 2$$~~

$$\Rightarrow 99$$

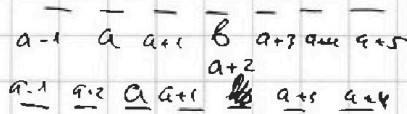
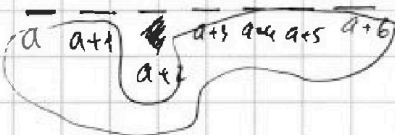
$$29 \cdot 3 =$$

$$\begin{cases} p - q = 2 \\ p + q = 396 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2p = 398 \Rightarrow p = 199 \Rightarrow q = 197$$

$$b - a = 2$$

$$\begin{array}{r} 197 - 20 + 1 = 178 \\ -12 \\ \hline 166 \end{array}$$



$$192 \mid 6$$

$$32$$

~~$$6a + 19 = 192$$~~

$$6a + 7 = 199$$

$$6a + 12 = 197$$

$$6a + 5 = 197 \Rightarrow a = 32$$

$$\{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\} = M$$

~~$$32$$~~

$$21, 21$$

$$20 - 3 = 17$$

$$199 \cdot 6 + 9 = 15$$

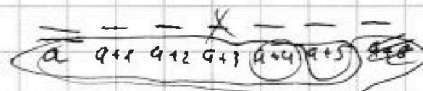
$$6 + 5 + 4$$

$$15$$

$$6a + 16 = 192$$

$$92$$

$$101, 93$$



$$6a + 17 = 92$$

$$3 + 4 + 5 + 6$$

$$6a$$

$$7 + 11 = 18$$


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1)  $y$  трыгыз: ~~180~~ 180   $a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$   $\frac{2}{6}$  90:8

$y$  4-х уа: ~~180+180=180 \cdot 2~~  $360 \cdot 4 = 1200 +$   $\frac{2 \cdot 18}{58}$   $900 + 480 + 64 =$

$y$  5-ми уа:  $180 \cdot 3$   $\frac{304}{114}$   $= 1380$

$y$   $n$ -уа:  $180 \cdot (n-2)$

$$180(n-2) = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + 2 \cdot (n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 143 + 2n - 2}{2} \cdot n = (42 + n) \cdot n$$

$$180n - 360 = 142n + n^2 \Rightarrow n^2 - 38n + 360 = 0 \Rightarrow D = 38^2 - 4 \cdot 360 = 1444 - 1440 = 4$$

$$n = \frac{38 \pm 2}{2} = \frac{38+2}{2} = 20$$

2)  $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$   $\frac{8 \cdot 16}{24} = 4 \cdot 2 \cdot 4$

130 69  $x \cdot (\ln 8 + \ln 2) + y(\ln 8 + \ln 1) + z(\ln 8 + \ln 3) = \ln 6$   $\frac{24 \cdot 8}{16} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{4 \cdot 4} = 12$

130 67  $16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 6$   $\frac{8 \cdot 16}{24} = 4 \cdot 2 \cdot 4$

110 89  $x \log_6 16 + y \log_6 8 + z \log_6 24 = 1$   $\frac{8}{6} = \frac{1}{16^3} \cdot \frac{1}{8}$   $64 \cdot 8 = 512 + 32 = 512$

110 87  $\ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z = \ln 6$   $\frac{2}{360}$   $\frac{2}{440}$

180 17  $\ln 16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = \ln 6 \Rightarrow 16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 6$   $24$   $\frac{24}{1440}$

180 17  $8^x \cdot 8 = 8 \cdot 16^3 = 8 \cdot 8^{23}$   $64$   $256$   $24$

81  $8^{(x+1)} = 8^{2y} \Rightarrow x+1 = 2y \Rightarrow y = 0; x = -1$   $\frac{24}{8}$

140 59  $\frac{24 \cdot 8^x}{16^y} = 6 \Rightarrow 4 = \frac{16^y}{8^x} \Rightarrow 16^y = 4 \cdot 8^x \Rightarrow 8^{2y} = 4 \cdot 8^x$

140 57  $\frac{24 \cdot 8^x}{16^y} = 6 \Rightarrow 4 \cdot 8^x = 16^y$   $\frac{24 \cdot 64}{256} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8}{8 \cdot 8 \cdot 4} = 6$

$4 \cdot 64 = 256 \Rightarrow x = 2; y = 2$

$(x=2; y=2; z=1)$   $8 \cdot 9 \cdot 11$   $72 \cdot 11$   $720 + 72$

3)  $(p-q)(p+q) = 792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$

792	2
396	2
198	2
99	3
33	3
11	"
1	"

$a \ b \ c \ d \ e \ f \ g$

$p: 8e5 \ a \Rightarrow p = 5e + b$

$q: 8e3 \ b \Rightarrow q = 5e + a$

$p - q = (b - a)$

$p + q = (2 \cdot 5e + b + a)$

$(p-q) \mid (p+q)$   $\Rightarrow$   $\frac{p+q}{p-q}$   $\text{цел. число}$

$p - q = 11 \cdot 2 = 22 \Rightarrow p + q = 9 \cdot 4 = 36$

~~$p - q = 11 \cdot 2 = 22 \Rightarrow p + q = 9 \cdot 4 = 36$~~

$p - q = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow p + q = 11 \cdot 3 \cdot 4 = 11 \cdot 12 = 121 + 4 = 125$

$\frac{792}{2} = 396$   $\frac{396}{2} = 198$   $\frac{198}{3} = 66$   $\frac{66}{3} = 22$   $\frac{22}{2} = 11$

$2p = 138$   $p = 69$

$75 + 4$

$3 \ 1 \Rightarrow 4 \cdot 2 \cdot 2$

$2 \ 4 \Rightarrow 4 \cdot 2 \cdot 2$

$3 \ 2 \Rightarrow 4 \cdot 2 \cdot 2$

$\begin{cases} p - q = 6 \\ p + q = 132 \end{cases} \Rightarrow 2p = 138 \Rightarrow p = 69$

$q = 73$

$\begin{cases} p - q = 22 \\ p + q = 36 \end{cases} \Rightarrow 2p = 22 + 36 = 58$

$p = 29$   $q = 9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}x &= 1 \\y &= -2 \\z &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}16^1 \cdot 8^{-2} \cdot 2^4 \\&= \frac{16 \cdot 2^4}{64} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4}{8 \cdot 8} = 6\end{aligned}$$

0	1	2	3	4	5	6	
a	1	2	3	<del>4</del>	<del>5</del>	6	$6a + 16 = 97$
<del>a</del>	a						

$$\begin{aligned}&\underline{a} \quad \underline{a+1} \quad \underline{a+2} \quad \underline{a+3} \quad \underline{a+4} \quad \underline{a+5} \quad \underline{a+6} \\&6a + 16 = 97\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &= 30 \\b &= 33\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\underline{a-1} \quad \underline{a} \quad \underline{a+1} \quad \underline{a+2} \quad \underline{a+3} \quad \underline{a+4} \quad \underline{x} \\&188\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 &= 30 + (-1 + 0 + 1 + 2 + 4 + 5) \\&= 180 + 11 = 191\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}70 + 34 + 32 + 33 + 35 + 36 \\70 \cdot 6 (1 + 2 + 3 + 5 + 6)\end{aligned}$$

0	1	2	3	4	5	6	
a			b				$\Rightarrow 6a = 180$
							19

$$\begin{aligned}a \quad b \quad \Rightarrow 6a & \quad 196 \\8+5 & \quad 181\end{aligned}$$

$$\underline{a} \quad \underline{a+1} \quad \underline{a+2} \quad \underline{a+3} \quad \underline{a+4} \quad \underline{a+5} \Rightarrow 6a + 15 = 185 \ominus$$

$$\underline{a+1} \quad \underline{a} \quad \underline{a+1} \quad \underline{a+2} \quad \underline{a+3} \quad \underline{a+4} \quad 6a + 11 = 197 \Rightarrow 186$$

$$\underline{a-2} \quad \underline{a-1} \quad \underline{a} \quad \underline{a+1} \quad \underline{a+2} \quad \underline{a+3} \quad 6a + 8 = 197$$

$$\underline{a-3} \quad \underline{a-2} \quad \underline{a-1} \quad \underline{a} \quad \underline{a+1} \quad \underline{a+2} \quad \underline{b} \quad 6a - 3 = 197$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{3a}{13}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{2a-b}{4R} = \frac{3a}{13} \Rightarrow -12aR = 13(2a-b)$$

$$R = \frac{13(2a-b)}{12a} = \frac{13}{12} \cdot \left( \frac{10}{8} - \frac{b}{8} \right)$$

$$\frac{10-b^2}{8} \cdot \frac{R}{5} = \frac{10-b^2}{5} = \frac{-13}{60} (10-b^2)$$

$$2 \cdot 2R \cdot \frac{3a}{13} - 10 = -b^2 \quad -\frac{60}{13} = 10 - b^2$$

$$4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \quad b^2 = 10 - \frac{60}{13}R$$

$$b^2 + 4R^2 - \frac{60}{13}R = \frac{169}{9}$$

$$10 + \frac{60}{13}R + 4R^2 + \frac{60}{13}R = \frac{169}{9}$$

$$120 \cdot 9 = 1080 + 180 = 1260$$

$$4R^2 + \frac{120}{13}R - \frac{29}{9} = 0$$

$$468R^2 - 1080$$

$$4R^2 = \frac{29}{9}$$

$$R^2 = \frac{29}{36}$$