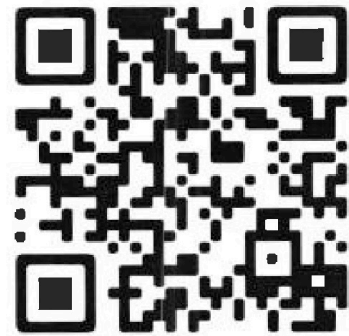




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть это n -угольник. Тогда сумма его углов: $S = 180(n-2)$. С другой стороны, т.к. углы образуют ариф. прогрессию, то $S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n =$

$$= \frac{a_1 + (n-1)d + a_1}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 132 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = (131+n)n$$

$$\text{I. } d=2 \Rightarrow 132^\circ - \text{MIN } \angle.$$

$$d=-2 \Rightarrow 132^\circ - \text{MAX } \angle.$$

$$S = 180n - 360 = 131n + n^2$$

$$\text{II. } \frac{2 \cdot 132 - 2(n-1)}{2} \cdot n =$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

$$= (132+1-n)n = 180(n-2)$$

$$D = 49^2 - 360 \cdot 4 = 31^2$$

$$133n - n^2 = 180n - 360$$

$$n_{1,2} = \frac{49 \pm 31}{2} = \begin{bmatrix} 40 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$n^2 + 47n - 360 = 0$$

$$D = 47^2 + 360 \cdot 4 = 3649$$

$$\sqrt{D} \notin \mathbb{N} \Rightarrow n \notin \mathbb{N}. \text{ Против.}$$

Тогда наиб. $n=40$.

Ответ: ~~41~~ 40 вершин.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45 \quad x, y, z \in \mathbb{Z}$$

$$\ln 25^x + y \ln 75^z + \ln 125^z = \ln 45 \quad a^b > 0, a > 0$$

$$\ln(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z) = \ln 45 \quad \text{огр. на ОДЗ нет.}$$

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45, \text{ т.к. } \ln x \text{ монотонна.}$$

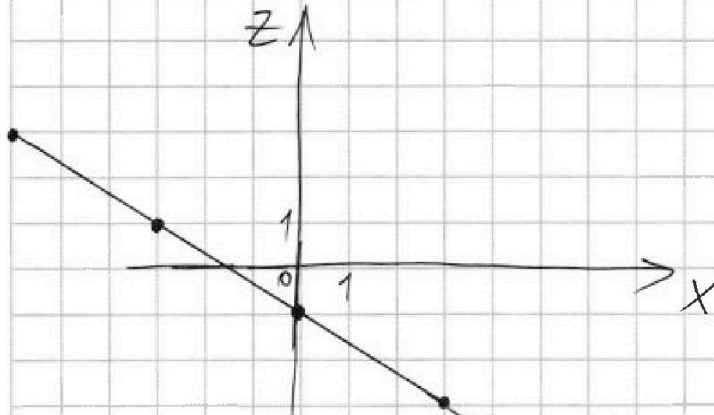
$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5 \cdot 3^2 \quad | : (5 \cdot 3^2)$$

$$5^{2x+2y+3z-1} = 3^{2-y}$$

$5^a = 3^b$ пересекаются в $a=b=0$ (т.к. это очевидно при $a, b \in \mathbb{Z}$) *

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+3z-1=0 \\ 2-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=2 \Leftrightarrow$$

$$2x+4+3z=1 \Leftrightarrow 2x+3z=-3.$$



$$z = \frac{-3-2x}{3} = -1 - \frac{2x}{3}$$

$$x, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$x^2 + z^2 + y^2 =$$

$$= x^2 + z^2 + 2^2 \geq 4.$$

x и z одновременно не нули \Rightarrow ~~кто-то~~ кто-то

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 5.$$

Пример на 5: $x=0, z=-1, y=2.$

$$\text{Проверка: } 2 \ln 75 + (-1) \ln 125 = \ln \left(75^2 \cdot \frac{1}{125} \right) =$$

$$= \ln \frac{25^2 \cdot 3^2}{5^3} = \ln \frac{5^4 \cdot 3^2}{5^3} = \ln 45$$

Ответ: ~~5~~ 5 при $x=0, z=-1, y=2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

* Пусть $5^a = 3^b$ имеет другое решение,
 $a \neq 0$ и $b \neq 0$; $a, b \in \mathbb{Z}$:

если $a > 0 \Rightarrow 5^a > 1 \Rightarrow b > 0$, т.к. $3^b > 1$

$\Rightarrow 5^a : 5$, но $3^b : 5$. Проблема

если $a < 0 \Rightarrow 5^a < 1 \Rightarrow b < 0$, т.к. $3^b < 1$

$\Rightarrow 5^a = 3^b \Rightarrow 3^{-b} = 5^{-a}$, $5^{-a} : 5$, но $3^{-b} : 5$

при $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ проблема \Rightarrow единственное
решение при $a = 0 = b$ в \mathbb{Z} числах.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть нам даны числа $a, a+1, \dots, a+6$.

$p \neq q$
 p и q — простые $\Rightarrow p, q$ нечет., т.к. $(p^2 - q^2) : 2 \Rightarrow$
 $(p-q)(p+q) = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^3$. $(p+q)$ и $(p-q) : 2$,

$p+q$ и $p-q$ не могут одновременно $: 3$,

т.к. иначе $p \equiv -q \equiv q \pmod{3} \Rightarrow q : 3 \Rightarrow$

$q = 3 \Rightarrow p^2 = 1089$, ~~но 1089 не квадрат~~ \Rightarrow

$p = \pm 33$, но 33 не простое. \Rightarrow \textcircled{I} $p - q : 3^3$ или

\textcircled{II} $p + q : 3^3$, т.к. $\text{НОД}(p-q, p+q) : 3$.

\textcircled{I} $\left. \begin{array}{l} p - q : 3^3 \\ p - q : 2 \end{array} \right\} \Rightarrow p - q : 54 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p + q \geq 54 = 3^3 \cdot 2 \\ p + q \leq 2 \cdot 5 = 20 = 2^3 \cdot 5 \end{array} \right\}$ (т.к. $p^2 - q^2 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^3$)

Противоречие, т.к. $q > 0$.

\textcircled{II} $\left. \begin{array}{l} p + q : 3^3 \\ p + q : 2 \end{array} \right\} \Rightarrow p + q : 54$. $(p+q)(p-q) = 5 \cdot 3^3 \cdot 2^3$

| | | | |
|--|---|---|----------------------------------|
| $\textcircled{1}$ $\left\{ \begin{array}{l} p+q=54 \\ p-q=20 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{54+20}{2} = 37 \\ q = \frac{54-20}{2} = 17 \end{array} \right.$ | $\textcircled{1}$ $3^3 \cdot 2$ $2^2 \cdot 5$ | |
| $\textcircled{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} p+q=108 \\ p-q=10 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{108+10}{2} = 59 \\ q = \frac{108-10}{2} = 49 \end{array} \right.$, q не простое, $q = 7^2$ | $\textcircled{2}$ $3^3 \cdot 2^2$ $2 \cdot 5$ | 5 — невозможно, т.к. $p-q : 2$ |
| $\textcircled{3}$ $\left\{ \begin{array}{l} p+q=54 \cdot 5 = 270 \\ p-q=4 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{270+4}{2} = 137 \\ q = \frac{270-4}{2} = 133 \end{array} \right.$, $q : 7, q \neq 7, q$ не простое | $\textcircled{3}$ $3^3 \cdot 2 \cdot 5$ 2^2 | |
| | | $\textcircled{4}$ $3^3 \cdot 2^2 \cdot 5$ 2 | 1 — невозможно, т.к. $p-q : 2$ |
| | | $3^3 \cdot 2^3 \cdot 5$ 1 | |



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{4} \begin{cases} p+q=540 \\ p-q=2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p &= \frac{540+2}{2} = 271 \\ q &= \frac{540-2}{2} = 269 \end{aligned}}$$

Они оба
простые,
как можно
проверить

а) Если $p=37, q=17 \Rightarrow p-q=a_i - a_j$

Т.к. p и q пересекаются по одному числу.

$q \geq 1+2+3+4+5+6 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$, но $q=17 \Rightarrow$
противоречие.

б) Если $p=271, q=269 \Rightarrow p-q=a_i - a_j$

$$q \geq a+a+1+\dots+a+5 = 6a+15 \Rightarrow \begin{cases} q \leq a+7+a+6+\dots+a+2 = \\ = 6a+28-1 \\ 269-28 \leq 6a \\ 242 \leq 6a \\ 40 + \frac{1}{3} \leq a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 6a &\leq 269-15 = 254 \\ a &\leq 42 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow a=41$ или $a=42$

$a=41: a+6+\dots+a+1 =$
 $= 41 \cdot 6 + 21 = 246 + 21 = 267$

$a=42: a+a+1+\dots+a+5 =$
 $= 42 \cdot 6 + 1+\dots+5 = 252 + 15$
 $= 267$

~~$p = (a+7) + (a+6) + (a+5) + (a+4) + (a+3) + (a+2) + (a+1) + a$
 $q = (a+7) + (a+6) + (a+5) + (a+4) + (a+3) + (a+2) + (a+1)$~~

Проблема т.к. сумма
шести чисел $< q < p$

$p = a + (a+1) + (a+3) + (a+4) + (a+6) + (a+5)$
 $q = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+5) + (a+6)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

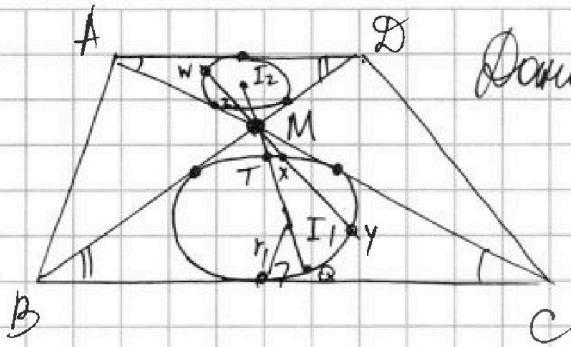
Ответ: числа $\{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\} = M$



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Доано: $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$ $MZ \cdot M\cancel{Y} = 9$
 $I_1 I_2 = 8$

Найти: r_1 - ?

Решение: 1) Заметим, что при гомотетии в $(\cdot) M$ с коэф. (-2) $\triangle AMD \rightarrow \triangle CMB$ (т.к. $\triangle AMD \sim \triangle CMB$ по двум углам, которые следуют из параллельности, а также $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$)

То есть $I_1 M I_2$ - одна прямая (т.к. $M I_1$ и $M I_2$ - бис-сы $\Rightarrow \angle C M I_1 = \angle A M I_2$), причем $\frac{I_2 M}{M I_1} = \frac{1}{2}$ (соотв. элементы в подобных \triangle) \Rightarrow

$2 I_2 M = M I_1 \Rightarrow M I_1 = \frac{8 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3}$ (т.к. $M I_1 + M I_2 = 8$)
 $= r_1 + M T$, где $M I_1 \cap w_1 = \{T, Q\}$, T ближе к M .

2) При гомотетии в M с коэф. (-2) $w \rightarrow y$, $z \rightarrow x$ (т.к. $w_2 \rightarrow w_1 \Rightarrow$ пересечения $MW \rightarrow$ пересечения MY , т.к. $wz \rightarrow xy$ - одна прямая)

$\Rightarrow \frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY} = \frac{1}{2} \Rightarrow MZ \cdot MY = MX \cdot MW = 9$
 $\begin{cases} 2MZ = MX \\ 2MW = MY \end{cases}$

$\Rightarrow M\cancel{Z} \cdot MX = MX \cdot 2MW = 9 \cdot 2 = 18$ - степень точки M относительно $w_1 \Rightarrow$
 $MY \cdot MX = M T \cdot M Q = 18 = M T (M T + 2r_1)$.

~~$M T = \dots$~~ $M I_1 - r_1 = \frac{16}{3} - r_1$
 $18 = (\frac{16}{3} - r_1) (\frac{16}{3} - r_1 + 2r_1) = \frac{16^2}{9} - r_1^2 \Rightarrow$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$r_1^2 = \frac{16^2 - 18 \cdot 9}{9} = \frac{256 - 162}{9} = \frac{94}{9} \Rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}, \text{ т.к.}$$

$r_1 > 0$.

Ответ: $r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}$.

Также стоит заметить, что при гомотетии $\triangle AMD \rightarrow \triangle CMB$. $\omega_2 \rightarrow \omega_1$, т.к. это вписанные окр-ти.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} - 3 \sin \frac{3\pi}{14} + 4 \cos \frac{3\pi}{7} = \boxed{\alpha = \frac{3\pi}{14}} \\
 & = 5 - 4 \sin 3\alpha - 3 \sin \alpha + 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) = \\
 & = 5 - 4(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) - 3 \sin \alpha + 4 - 8 \sin^2 \alpha = \\
 & = 16 \sin^3 \alpha - 8 \sin^2 \alpha - 15 \sin \alpha + 9 = \boxed{\sin \alpha = t} \\
 & = 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9 = (t+1)(16t^2 - 24t + 9) =
 \end{aligned}$$

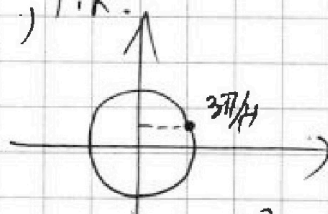
| | | | | |
|----|----|-----|---|-------------------|
| 16 | -8 | -15 | 9 | ← Схема Корней |
| -1 | 16 | -24 | 9 | |

$$= (t+1)(4t-3)^2 > 0, \text{ т.к.}$$

$$t = \sin \frac{3\pi}{14} > 0$$

$$\Rightarrow t+1 > 0$$

$$(4t-3)^2 > 0, \text{ причем } \sin \frac{3\pi}{14} \neq \frac{3}{4}, \text{ т.к.}$$



$$\frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{т.к. } \sin x \nearrow \text{ при } x \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow \sin \frac{3\pi}{14} < \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4} \Rightarrow (4t-3)^2 > 0$$

$$\Rightarrow 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} - 3 \sin \frac{3\pi}{14} + 4 \cos \frac{3\pi}{7} > 0 \Rightarrow$$

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

Ответ: левое больше, чем правое.

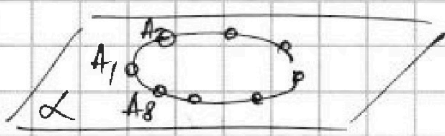


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Назовем точки в α A_1, A_2, \dots, A_8 , а точки вне α B, C, D, E

B, C, D, E не лежат в одной плоскости (иначе, по условию, эта плоскость α , но $B \notin \alpha$)

\Rightarrow из этих точек можно сделать выпуклую пирамиду, т.к. для выпуклой пирамиды достаточно, чтобы основание было выпуклым мн-ком, а также вершина \notin основанию.

Возьмем точку B и три точки на α . Если они все лежат в одной плоскости, то это α (т.к. по трем точкам $A_i, A_j, A_k, i \neq j, j \neq k, i \neq k$ задается однозначно α). $\Rightarrow B$ и любые \geq три точки из α не лежат в одной плоскости. Аналогично для C, D, E . Заметим, что по \geq трем точкам на окр-ти однозначно строится выпуклый мн-ком. \Rightarrow для любого набора точек на окр-ти (≥ 3) можно построить выпуклую пирамиду четвертого порядка (с вершиной B, C, D, E). \Rightarrow способов, где основание пирамиды $= \alpha$,

4. $(C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8)$ (т.к. всего

$C_8^3 + C_8^4 + \dots + C_8^8$ способов выбрать выпуклый мн-к на плоскости α). Если основание пирамиды $\neq \alpha \Rightarrow$ оно (BCD) или (BCE) или (BED) или (CDE) (в таких плоскостях не может лежать точка A_i , доказано ранее, \Rightarrow будут получаться треугольные пирамиды).

Их вершиной может быть одна из восьми



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

точек A_i (Т.К. случай пирамиды $ВСDE$ уже посчитан отдельно) \Rightarrow всего таких пирамид 4.8 (4 возможные плоскости основания и 8 вариантов вершин.) Они все будут выпуклые, т.к. они треугольные.

$$\begin{aligned} \text{Всего кол-во пирамид: } & 1 + 32 + 4 \left(1 + 8 + \frac{8 \cdot 7}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{24} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \right) = \\ & = 33 + 4(9 + 28 + 56 + 56 + 20) = 33 + 4 \cdot 219 = 33 + 876 \\ & = 899 \end{aligned}$$

~~Оформление пирамид~~
Также вспомним про пирамиды, у которых две вершины $\in \{B, C, D, E\}$, а две вершины $\in \alpha$.

Таких будет $C_4^2 \cdot C_8^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2} = 6 \cdot 28 = 168$
(двумя способами выбираем вершину из α , двумя из $\{B, C, D, E\}$). Помытно, что таким образом основание не может быть ≥ 4 -х угольником, т.к. любые 4 точки, лежащие в $1^{ой}$ пл-ти, лежат в α , но пирамиды, у которых основание $= \alpha$ мы рассмотрим отдельно. Всего все случаи классифицируются на 4 группы:

1. Возьмем 4 точки из $\{B, C, D, E\}$: 1 способ
2. Возьмем 3 точки из $\{B, C, D, E\}$: 32 способа
3. Возьмем 2 точки из $\{B, C, D, E\}$: 168 способов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Возьмем 1 точку из $\{B, C, D, E\}$: 876 способов.
0 точек мы взять не можем, т.к. иначе пирамида не будет выпуклой.

Ответ: 1077 пирамид.

Помните, что при таком делении пирамиды не будут пересекаться.

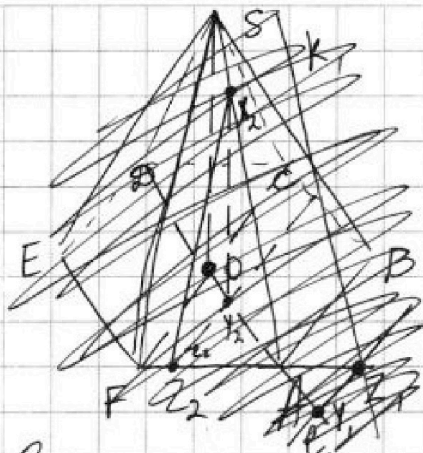


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $AB = 1, SA = \sqrt{2}$
 $X \in SF, Y \in AD,$
 $XY \parallel (SAB)$

Найти: $\min(XY) - ?$

Заметим, что при выборе Y на AD мы однозначно задаем XY (т.к. ~~все~~ ~~прямые~~ $\parallel (SAB)$ принадлежат $\beta, Y \in \beta, \beta \parallel (SAB), SF \cap \beta = X, SF \not\subset \beta$, т.к. $SF \cap (SAB) = S \Rightarrow SF \cap \beta \leq 1$ точке). Пусть $AD \cap CF = O, SO \perp (ABCD)$, т.к. $SAB C D E F$ - правильная пирамида, O - центр $AB C D E F$. Если Y лежит на луче $OA, Y \neq O$, то будем строить через Y ~~прямую~~ $l \parallel AB, Y \in l, l \in \beta$, т.к. $l \parallel AB \Rightarrow l \parallel (SAB)$. $l \cap AF = Z, Z \in \beta$. Через Z будем строить $k, k \parallel SA, Z \in k, k \parallel SA \Rightarrow k \parallel (SAB) \Rightarrow k \subset \beta$, т.к. β - ПМТ всех прямых $\parallel (SAB)$, проходящих через Y , т.к. $\beta \parallel (SAB)$, то $k \subset \beta$, т.к. $k \parallel SA$. $k \cap SF = X$, ~~прямая~~ ~~$XY = \sqrt{OX^2 + OY^2}$~~ , т.к. ~~$OY \perp OX$~~ ~~прямые~~. $\frac{OY}{YA} = \frac{OZ}{ZA} = \frac{OX}{XA} \Rightarrow XY \parallel SO$

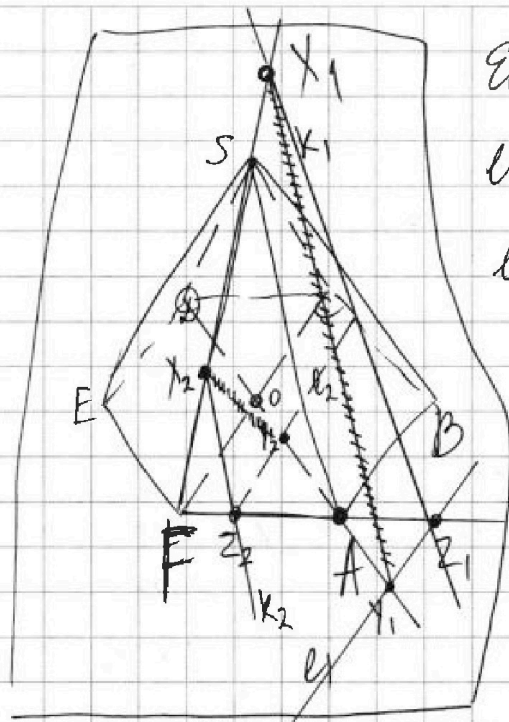


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

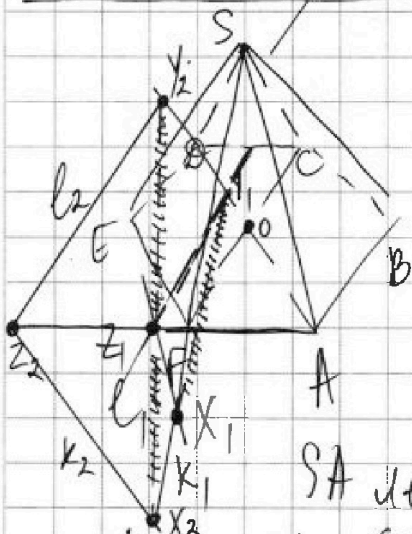
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если $Y=A \Rightarrow XY = \sqrt{2}$,
 если $YO > OA$, то $XY > \sqrt{2}$
 если $YO < OA$, то $XY < \sqrt{2}$
 если $O=Y$, то $XY = FO = 1$.
 Если Y лежит на луче OA , то пересечем l с FA , где $l \parallel AB$,
 $Y \in l$. $l \cap FA = Z$



По аналогичным рассужде-
 ниям $l \subset \beta$. Проведем через Z $k \parallel SA$, $Z \in k$. $k \in \beta$.

Но заметим, что $k \parallel SA \Rightarrow$

~~$k \cap SF = X$~~ (k, SF и

SA лежат в 1 плоскости, т.к. $Z \in k, Z \in (SFA)$)

$k \parallel SA, SA \subset (SFA)$. Опять-таки ~~для~~ очевидно

~~$YO < OA$ и $YO > OA$~~

но, что $XY > 1$, если $Y \neq O$ } для случая $Y \in (OA)$

~~XZ~~ Пусть $\frac{FZ}{ZA} = \frac{a}{b}$. Тогда $\frac{XZ}{SA} = \frac{a}{a+b}$

Аналогично можно написать уравнение для других



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

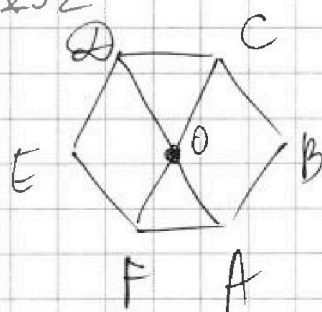
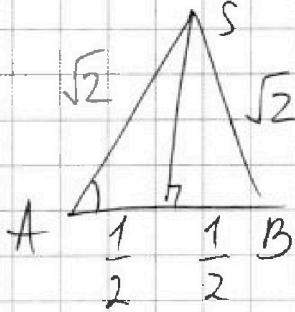
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow XZ = \frac{a\sqrt{2}}{a+b} \quad \text{случаев расположения } Y.$$

$$\frac{OY}{YA} = \frac{ZY}{OF} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow ZY = \frac{b}{a+b}$$

Угол между прямыми XZ и $ZY = \angle SAB$, т.к. $SA \parallel XZ, AB \parallel YZ \Rightarrow$

$$\angle SAB = \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}}$$



$FO = OC = AB$,
т.к. $ABCDEF$ —
правильный
6-ти угольник

$$\Rightarrow XY^2 = XZ^2 + ZY^2 - 2 \cos \angle XZY \cdot XZ \cdot ZY$$

$$= \frac{2a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(a+b)^2} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} =$$

$$= \frac{2a^2 + b^2 - ab}{(a+b)^2} = \frac{\frac{2a}{b} + \frac{b}{a} - 1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2} = \left| t = \frac{a}{b} \right|$$

$$= \frac{2t + \frac{1}{t} - 1}{t + 2 + \frac{1}{t}} = \frac{2t^2 - t + 1}{t^2 + 2t + 1} = \frac{2t^2 + 4t + 2 - 5t - 1}{t^2 + 2t + 1} =$$

$$= 2 - \frac{5t + 1}{t^2 + 2t + 1} = f(t)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдем $\min f(t)$

$$f'(t) = 2t - \frac{5(t^2 + 2t + 1) - (2t + 2)(5t + 1)}{(t + 1)^4} =$$
$$= 2t - \frac{5t^2 + 10t + 5 - 10t^2 - 12t - 2}{(t + 1)^4} =$$
$$= 2t + \frac{5t^2 + 2t - 3}{(t + 1)^4} = 0$$

$$\frac{2t(t + 1)^4 + 5t^2 + 2t - 3}{(t + 1)^4} = 0$$

$$2t^5 + 8t^4 + 12t^3 + 8t^2 + 2t + 2t + 5t^2 - 3 = 0$$

$$2t^5 + 8t^4 + 12t^3 + 13t^2 + 4t - 3 = 0$$

| | | | | | | |
|----|---|---|----|----|----|----|
| | 2 | 8 | 12 | 13 | 4 | -3 |
| -1 | 2 | 6 | 6 | 7 | -3 | 0 |

Схема
горнера

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



540
- 2
538

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{5-4\sin\frac{\pi}{4}} < 25\sqrt{2} - 20\sqrt{3} < \frac{9}{4} \cdot 2 = 4,5 <$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$\ln 5(2x + 2y + 3z - 1) = \ln 3(2 - y)$$

$$2 \cdot 32 + (n-2) \cdot 2 = (132 + n - 1) \cdot n$$

$$271 \overline{) 11} \cdot 2 \quad 4.5 \quad 5 \quad 269 \overline{) 13} \quad 180$$

$$n^2 + 131n = 180n - 360$$

$$2x + 3z = 21 \quad z = \frac{-1-2x+17}{3}$$

$$x, y, z \leq 1$$

$$y, z \leq 0$$

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$2x \ln 25 + 2y \ln 75 + y \ln 3 + 2z \ln 75 + z \ln 5 =$$

$$= \ln 5 + 2 \ln 3$$

$$\ln(25^x + 75^y + 125^z) = \ln 45$$

$$25^x + 75^y + 125^z = 45$$

$$= (b+d)(b-d) \cdot 25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$$



2 На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

8.7.8.5
4.8

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

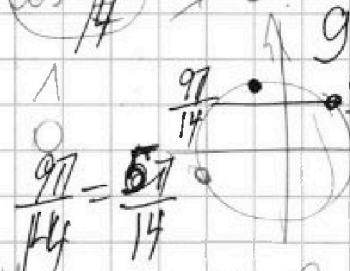
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима.

$\frac{\pi}{20}$
 $\frac{\pi}{4}$

~~$\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{1.5\sqrt{2}}{2}$~~
 ~~$5 - 4 \sin \frac{5\pi}{14}$~~
 ~~$5 \sin \frac{\pi}{2} - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$~~
 ~~$2 - 6 + 6 - 7$~~
 ~~$1 + 4 \sin \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{9\pi}{14}$~~
 ~~$2 \cdot 4 + 6 + 3 + 6 + 4 + 7 - 3 = 0$~~
 ~~$3 \left(2 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{4} - 7 \cdot \frac{1}{4} \right) \frac{1}{4} \cos^2 \frac{3\pi}{7} =$~~
 ~~$2 \cdot 81 - 6 \cdot 27 + 6 \cdot 9 - 21 - 3$~~
 ~~$= 8 \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7}$~~
 ~~$162 - 8 - \frac{3}{4} + 2.5 - 3 - 3.5$~~
 ~~$\frac{162}{162}$~~

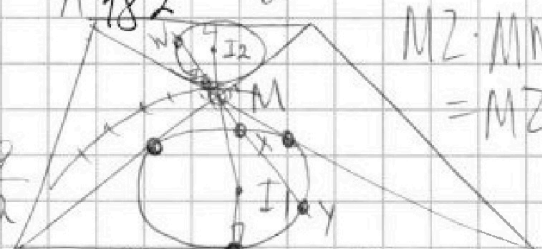
$p^2 - a^2 = 1080 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^3$
 $(p-a)(p+a) = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^3$

$\begin{matrix} 219 \\ \times 4 \\ \hline 876 \end{matrix}$



$\begin{matrix} 56 \\ + 56 \\ \hline 112 \\ + 70 \\ \hline 182 \end{matrix}$

$MY \cdot 2MX = 9$
 $MY \cdot MX = 4.5$
 $MZ \cdot MN =$
 $= MZ \cdot 2$



$MX = 2a$ $MY = \frac{9}{a}$
 $MZ = a$ $MW = \frac{9}{2a}$
 $ZW = MW - MZ = \frac{9}{2a} - a = \frac{9 - 2a^2}{2a}$

$5 - 4 \sin \frac{5\pi}{14} \leftarrow \frac{XY}{ZW} = 2$ $\sin \frac{5\pi}{14} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $5 - 2\sqrt{3} \neq B$ $\frac{5\pi}{14} > \frac{\pi}{3}$

$XY = MY - MX = \frac{9}{a} - 2a = \frac{9 - 2a^2}{a} = 2 = \frac{MY}{MW}$
 $MZ \cdot MW =$
 $= MZ \cdot \frac{MY}{2} = \frac{9 - 2a^2}{2}$
 $\sin < \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $MY \cdot MZ = MX \cdot MW = 9 \sin \frac{3\pi}{4} < 1$

$MZ \cdot MY = 9$
 $\frac{3\pi}{14} > \frac{\pi}{6}$

$\frac{3\pi}{14} > \frac{\pi}{6}$

$\frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$xy^2 = \frac{(b-a)^2}{a^2} + \frac{2a^3}{b^2}$$~~

$$\frac{2t^2 - \frac{t}{\sqrt{2}} + 1}{t^2 + 2t + 1}$$

$$xy^2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \cdot 2 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2}$$

~~$$2a^2 + b^2 - ab \geq a^2 + 2ab + b^2$$

$$= \frac{2a^2 + b^2}{(a+b)^2} \quad a^2 \geq 3ab$$~~

$$\frac{(t^2 + 2t + 1)^2 (t^2 + 2t + 1)}{a^2 + 4 + 4t^3 + \dots}$$

$$-2 + 8 - 12 + 13 - 4 - 3$$

$$= 2\sqrt{2}a^2 + \sqrt{2}b^2 - ab$$

$$\frac{(a+b)^2 \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \frac{a}{b} + \sqrt{2} \frac{b}{a} - 1}$$

$$t = \frac{a}{b} \quad t^4 + 4t^3 + 4t^2 + 4t + 1$$

~~$$2\sqrt{2}a^2 + \sqrt{2}b^2 - ab \geq a^2\sqrt{2} + b^2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}ab$$

$$t^4 + 4t^3 + 4t^2 + 4t + 1$$~~

$$\sqrt{2}a \geq ab(2\sqrt{2} + 1)$$

$$\frac{2\sqrt{2}t^2 + \sqrt{2}(1-t/\sqrt{2})}{(t^2 + 2t + 1)\sqrt{2}}$$

$$\frac{2\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{t} - 1}{(t + 2 + \frac{1}{t})\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}a \geq b(2\sqrt{2} + 1)$$

~~$$(t^2 + 2t + 1)\sqrt{2}$$~~

$$(t + 2 + \frac{1}{t})\sqrt{2}$$

$$\frac{a}{b} \geq \frac{2\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= 4 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) =$$

$$= 4 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 6 \sin \alpha - 10 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 5 \sin^3 \alpha$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 28 \\ \times 6 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$9 - 12 \sin \alpha + 16 \sin^3 \alpha - 3 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha =$$

$$= 16 \sin^3 \alpha - 8 \sin^3 \alpha - 15 \sin \alpha + 9$$

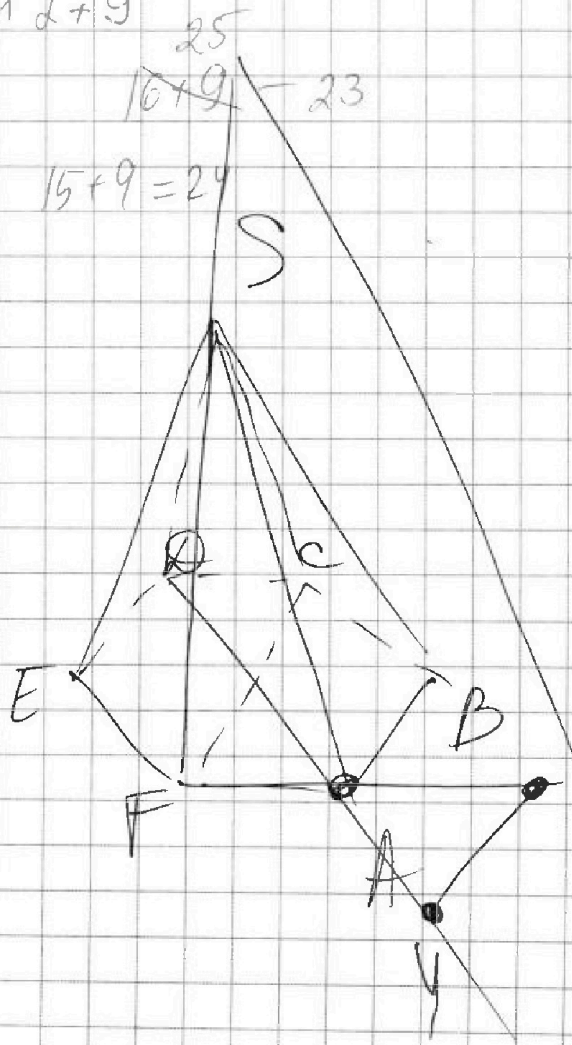
$$16t^3 - 8t^2 - 15t + 9$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 16+9 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$-16 - 8 + 15 + 9$$

$$15+9=24$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 899 \\ +168 \\ \hline 1077 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} = 5 - 4 \sin \frac{5\pi}{14} \quad \sin x \nearrow, x \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

$$\frac{5\pi}{14} > \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin \frac{5\pi}{14} > \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

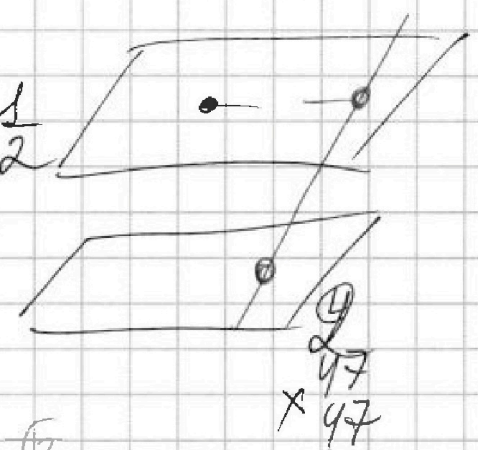
$$5 - 4 \sin \frac{5\pi}{14} < 5 - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 - 2\sqrt{3}$$

$$B = 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{6\pi}{14} = 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4(1 - 2 \sin^2 \frac{3\pi}{14}) =$$

$$= 8 \sin^2 \frac{3\pi}{14} + 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4$$

$$\frac{3\pi}{14} > \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{14} > \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$B > 8 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 = \sqrt{2}$$



$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$AB = 1$$

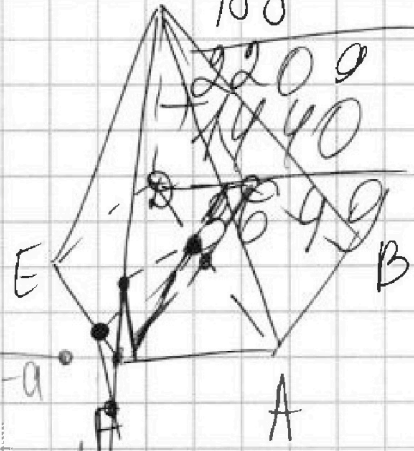
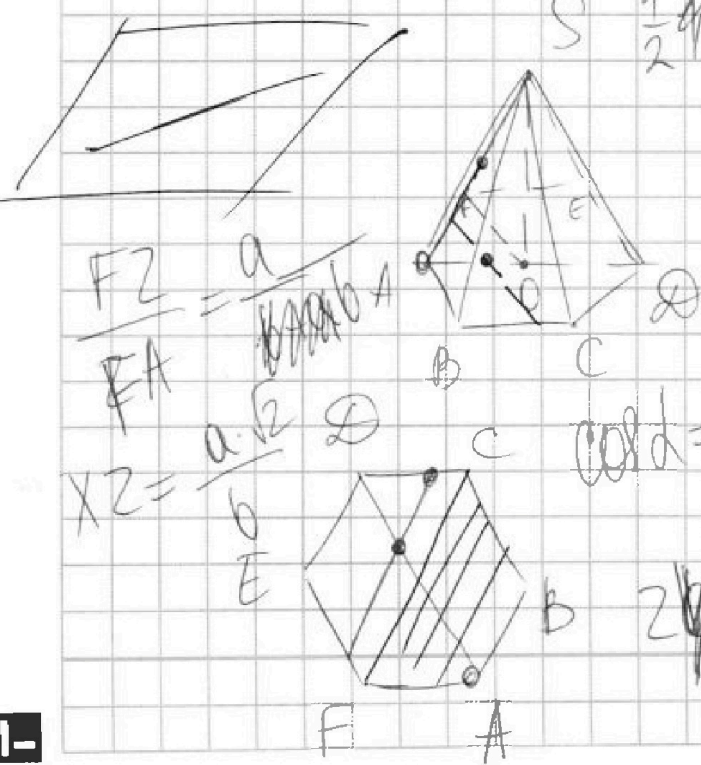
$$S = \frac{329}{188}$$

$$\frac{FZ}{FA} = \frac{a}{b}$$

$$XZ = \frac{a \cdot b}{b}$$

$$\cos d = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$Z = \frac{b-a}{a}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1, 2, 4, 6

$$5 - 4 \sin \frac{5\pi}{14} > \frac{\pi}{6}$$

$$5 - 4 \sin \frac{5\pi}{14} > \frac{\pi}{2}$$

$$5 - 4 \sin \frac{5\pi}{14} < \frac{\pi}{2}$$

$$5 - 4 \sin > 5 - 4 = 1$$

$$5 - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$32^2 = 1024$$

$$33^2 = 1089$$

$$3600 + 1 + 120$$

$$41 + \dots + 46 =$$

$$= 41 \cdot 6 + 1 + 2 + \dots + 5$$

$$= 246 + 15 = 261$$

$$42 + \dots + 47 =$$

$$= 41 \cdot 6 + 21 =$$

$$= 246 + 21 = 267$$

$$269$$

$$241 \overline{) 6}$$

$$\underline{-24} \quad 40$$

$$41 + 42 + \dots + 46 = 41 \cdot 6 + 1 + \dots + 5 =$$

$$= 246 + 15 = \boxed{261}$$

$$42 + \dots + 47 = 41 + \dots + 46 + 6$$

$$48 + 47 + 46 + 45 + 43 + 42 + 41$$

$$41, 42, \dots, 47$$

$$42 + \dots + 47 = 42 \cdot 6 + 15$$

$$252$$

$$\underline{+ 15}$$

$$267$$

$$6 \cdot 44(1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7) = 246 + 28 - 3 = 246 + 25 = 271$$