



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



- × (1) [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
- × (2) [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
- × (3) [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
- × (4) [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
- (5) [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
- × (6) [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$$a_0 = 143^\circ$$

$$d = 2 \text{ мм } (-2)$$

$$0^\circ < a_n < 180^\circ$$

н.ч. : a_{max} ?

Решение:

$$180 \cdot (n-2) = \frac{a_0 + a_n}{2} \cdot n$$

$$180n - 360 = \frac{143n + a_n}{2}$$

$$180n - 360 = 143n + \frac{a_n}{2}$$

$$180n - 360 = 143n - n^2 + n$$

$$n^2 + 36n - 360 = 0$$

$$D = 1296 + 1440 = 2736$$

$$\sqrt{2736} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow d \neq (-2)$$

$$a_n = 143 + 2 \cdot (n-1)$$

$$a_{18} = 143 + 2 \cdot 17 = 177^\circ$$

подходит

$$180n - 360 = 143n + n^2 - n$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$D = 1444 - 1440 = 4$$

$$n_1 = \frac{38-2}{2} = 18 \quad n_2 = \frac{38+2}{2} = 20$$

$$a_{20} = 143 + 2 \cdot 19 = 181 > 180 \Rightarrow \text{не подходит}$$

Ответ: 18



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$\ln(16^x \cdot 8^y \cdot 24^z) = \ln 6$$

$$16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 6$$

$$\frac{4x+3y+3z}{2} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{НОД}(3; 2) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{z}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow z = \frac{1}{3} \Rightarrow 2 \frac{4x+3y+3}{2} = 1$$

$$4x+3y+3 = 1$$

$$4x+3y = -2$$

$$x = \frac{-2+3y}{4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4+12y+9y^2}{16} + y^2 + 1 = \frac{4+12y+25y^2}{16} + 1$$

Выражение будет принимать наименьшее значение при наименьшем $4+12y+25y^2$, когда

значение которой находится в каждой вершине параболы. $y_0 = -\frac{12}{2 \cdot 25} = -0,24$

$$x = \frac{-2 - 0,24 \cdot 3}{4} = -0,32$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,1024 + 0,0576 + \frac{1}{9} = 1,16 \quad \text{Ответ: } 1,16$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим элемент множества S и возводим к квадратной сумме:

$a_0 = a_0$	$S_0 = 6a_0 + 15$
$a_1 = a_0 + 1$	$S_1 = 6a_0 + 16$
	$S_2 = 6a_0 + 17$
$a_2 = a_0 + 2$	$S_3 = 6a_0 + 18$
$a_3 = a_0 + 3$	$S_4 = 6a_0 + 19$
$a_4 = a_0 + 4$	$S_5 = 6a_0 + 20$
$a_5 = a_0 + 5$	$S_6 = 6a_0 + 21$
$a_6 = a_0 + 6$	$S_7 = 28$

Заметим, что от четности a зависит четность чисел, а потому мы можем выбрать пары

возможные p и q :

1) $6a_0 + 17$ и $6a_0 + 15$	2) $6a_0 + 20$ и $6a_0 + 18$	Обозначим второе число в каждой паре x , а в q за y , тогда: $(6a+x)^2 - (6a+y)^2 = 492$ $x^2 + 12a(x-y) - y^2 = 492$
3) $6a_0 + 19$ и $6a_0 + 17$	4) $6a_0 + 20$ и $6a_0 + 16$	
5) $6a_0 + 19$ и $6a_0 + 15$	6) $6a_0 + 18$ и $6a_0 + 16$	

4) $6a_0 + 21$ и $6a_0 + 15$ Подставив в уравнение каждый из 3 вариантов и подставив их, мы

5) $6a_0 + 21$ и $6a_0 + 17$ обнаружим, что четный a . Будем считать при $p = 6a_0 + 19$ и $q = 6a_0 + 17$,

6) $6a_0 + 21$ и $6a_0 + 19$ тогда мы можем найти a_0 :

$$17^2 + 12a_0 \cdot 2 - 15^2 = 492$$

$$24a_0 = 420$$

$$a_0 = 17 \Rightarrow a_1 = 18, a_2 = 19, a_3 = 20, a_4 = 21, a_5 = 22, a_6 = 23$$

Ответ: 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18.

$a_6 = 18$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

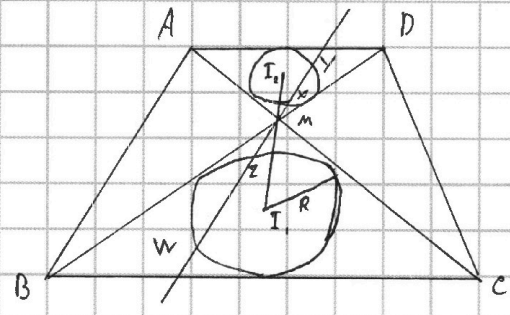
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:
 $AD:BC = 1:2$
 $I_1 I_2 = 13/2$
 $MZ \cdot MY = 5$
 k -мн:
 $R = ?$

Решение:



$\angle DAM = \angle MCB$ (накрест.)
 $\angle CBM = \angle MDA$ (накрест.)
 $\Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle BMC$
 $AD:BC = 1:2$ $\Rightarrow k$ -коэф. подобия: 2

MI_1 - секс. $\angle AMD$
 MI_2 - секс. $\angle BMC$
 $\angle AMD$ и $\angle BMC$ - вертикальные
 $\Rightarrow M \in I_2 I_1$
 $\triangle ADM \sim \triangle BMC, k=2 \Rightarrow MI_1 = 2 MI_2 = \frac{13}{2} \cdot 2 = 13$

$\triangle ADM \sim \triangle BMC, k=2$
 $\angle AMD$ и $\angle BMC$ - верт.
 $\Rightarrow MY \cdot 2 = MW$
 $MZ \cdot MW = (MI_1 - R)(MI_1 + R)$
 $2 MZ \cdot MY = (MI_1 - R)(MI_1 + R)$
 $2 \cdot 5 = \left(\frac{13}{2} - R\right) \cdot \left(\frac{13}{2} + R\right)$
 $R^2 = \frac{169 - 90}{9}$
 $R = \frac{\sqrt{79}}{3}$ Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \stackrel{?}{=} 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14} \quad 5 - 4 \sin \left(\frac{3\pi}{14} + \frac{\pi}{14} \right) \stackrel{?}{=} 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \left(\frac{3\pi}{14} - \frac{\pi}{14} \right)$$

$$5 - 4 \left(\sin \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{2\pi}{14} \cdot \sin \frac{\pi}{14} \right) \stackrel{?}{=} 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \left(\sin \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{\pi}{14} - \cos \frac{2\pi}{14} \cdot \sin \frac{\pi}{14} \right)$$

$$5 \stackrel{?}{=} 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{7}, \cos \frac{\pi}{14} + 5 \cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14} + 4 \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{14} + 4 \cdot \cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14}$$

$$5 \stackrel{?}{=} 4 \cos \frac{\pi}{7} + 9 \cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{14}$$

$$5 \stackrel{?}{=} \cos \frac{\pi}{7} \left(4 + 9 \cos \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14} \right) - \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{14}$$

Ответ: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Поскольку никакие 4 из 5 точек вне плоскости L не лежат на одной плоскости, мы можем построить треугольные пирамиды, содержащие 2, 3 или 4 из этих точек, 7 пирамид с большим количеством точек в основании будут иметь равно одну из этих точек.

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6!} + \frac{7!}{7!} \cdot 5 = 165 + 120 + 84 + 56 + 35 + (35 + 21 + 7 + 1) \cdot 5 = 460 + 320 = 780$$

Ответ: 780

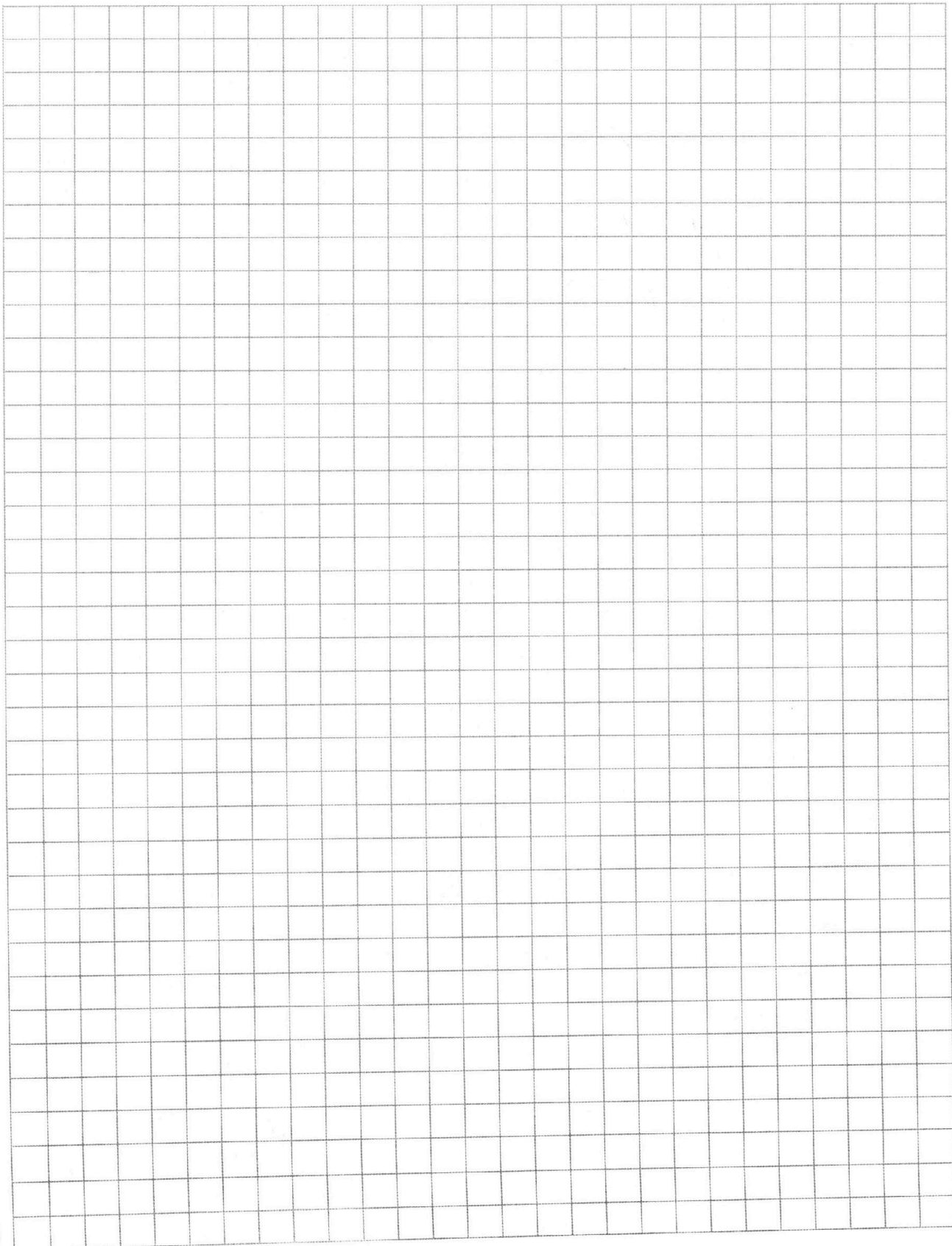


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



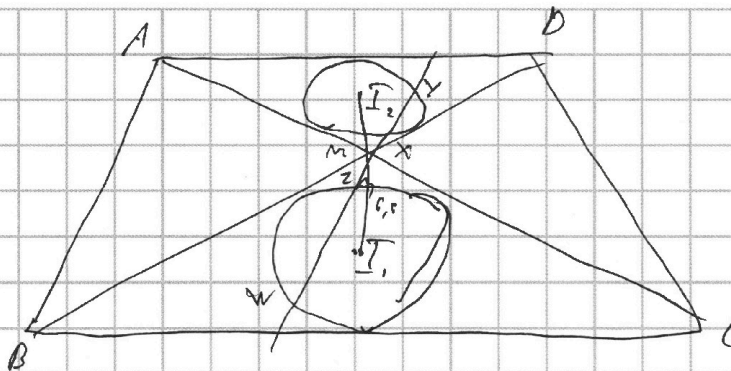


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{26 + 39}{18}$$

$$\frac{13}{2} = x + \frac{x}{2}$$

$$\frac{13}{2} \times \frac{2}{2}$$

$$x = \frac{13}{3}$$

$$\frac{13}{3} + \frac{13}{6} = \frac{39}{6}$$

$$\frac{13}{2}$$

$$I_1, I_2 = 13, 6, 5$$

$$MZ \cdot MY = 5$$

$$\frac{13}{2}$$

$$3, 5$$

$$MZ = \frac{13}{3}$$

$$2R_1 = 2R_2 \cdot 2$$

$$MZ \cdot MW = 10$$

$$\left(\frac{13}{3} - R\right)\left(\frac{13}{3} + R\right) = 10$$

$$\begin{array}{r} 285 \\ + 24 \\ \hline 309 \\ + 30 \\ \hline 339 \\ + 25 \\ \hline 364 \end{array}$$

$$54 \cdot 6 \cdot 5 = 320$$

$$280$$

$$4$$

$$\frac{169 - R^2}{9} = 10$$

$$2R^2 = 49$$

$$A_{11}^3$$

$$P_{11}^3$$

$$70 + 29 = 99$$

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} = 11 \cdot 3 \cdot 5 = 165 - 35 = 130$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120 - 35 = 85$$

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 9 \cdot 4 = 36 - 35 = 1$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56 - 35 = 21$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 70 - 35 = 35$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = 35$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5!} = 21$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6!} = 1$$

$$7 = 1$$

$$99 \cdot 5 = 495$$

$$495 + 285 = 780$$

$$130 + 85 + 49 + 21 = 285$$

1



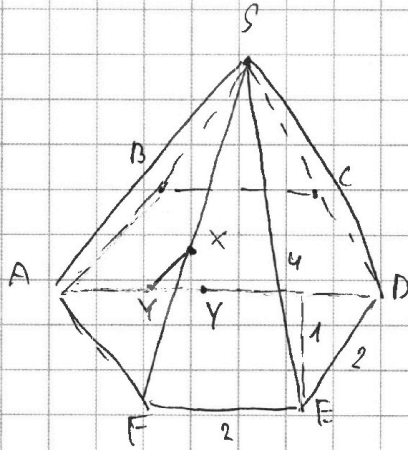
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sinh \frac{R}{4} < \frac{1}{2}$$



$$\sinh \frac{2R}{11} \cdot \cos \frac{R}{11} - \cos \frac{2R}{11} \cdot \sinh \frac{R}{11}$$

$$\sinh \frac{3R}{14} = \sinh \frac{R}{14} \cdot \cos \frac{R}{14} + \sinh \frac{R}{14} \cdot \cos \frac{R}{14}$$

$$\cos \frac{2R}{14} = \frac{\cos \frac{R}{14}}{\sinh \frac{R}{14}} - \frac{\cos \frac{R}{14}}{\sinh \frac{R}{14}} = 1 - 2 \sinh \frac{R}{14}^2$$

$$5 - 4 \sinh \frac{2R}{14}$$

$$4 - 8 \sinh \frac{2R}{14} = 5 \sinh \frac{2R}{14}$$

$$4 = \sinh \frac{2R}{14}$$

5

$$4 \cos \frac{R}{4} - 10 \cos \frac{2R}{4} \cdot \sinh \frac{R}{14}$$

$$4 \sinh \frac{2R}{14} < \sinh \frac{R}{4} \Rightarrow < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \cos \frac{R}{4} (2 - 5 \sinh \frac{R}{14})$$

$$4 \cos \frac{R}{4} - \sinh \frac{R}{4} \cdot \cos \frac{R}{4} + 9 \cos \frac{2R}{4} \cdot \sinh \frac{R}{14} = 5 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\cos \frac{R}{4} (4 - 9 \cos \frac{R}{4} \cdot \sinh \frac{R}{14})$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$2x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$16 \cdot \frac{x}{8} \cdot \frac{y}{24} = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$4x + 3y + 3z = 2$$

$$4x + 3y + 3 = 1$$

$$4x + 3y = -2$$

$$x = \frac{-2 - 3y}{4}$$

$$\frac{4 + 12y + 9y^2}{16} + y + 1$$

$$\frac{4 + 12y + 25y^2}{16} + 1$$

$$25y^2 + 12y + 4$$

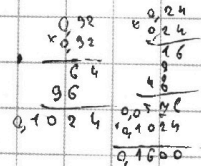
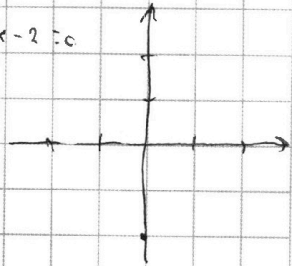
$$y = \frac{-12}{50} = -0,24$$

$$4x - 0,72 = -2$$

$$4x = -1,28$$

$$x = -0,32$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (0,32)^2 + (-0,24)^2 + 2 \cdot 0,1024 + 0,0528 \cdot 6 = 1,16$$



$$0,24 \cdot 3 = 0,72$$

$$\frac{1,28}{4} = 0,32$$