



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность  $2^\circ$  и начинающуюся с угла  $143^\circ$ . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ .
3. [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 792$ .
4. [5 баллов] Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а отношение оснований  $AD : BC = 1 : 2$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанных в треугольники  $BMC$  и  $AMD$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$ , а  $\omega_2$  – в точках  $Z$  и  $W$  ( $X$  и  $Z$  находятся ближе к  $M$ ). Найдите радиус окружности  $\omega_1$ , если  $I_1I_2 = 13/2$ , а  $MZ \cdot MY = 5$ .
5. [5 баллов] Что больше:  $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$  или  $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$ ?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости  $\alpha$ , а остальные 5 расположены вне плоскости  $\alpha$ . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость –  $\alpha$ . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  ( $S$  – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка  $X$  лежит на прямой  $SF$ , точка  $Y$  – на прямой  $AD$ , причём отрезок  $XY$  параллелен плоскости  $SAB$  (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $XY$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

Известно, что сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $(n-2) \cdot 180^\circ$ .  
С другой стороны, сумма углов нашего многоугольника равна сумме  $n$  первых  $n$  членов арифметической прогрессии.

$$143^\circ + 145^\circ + \dots + (143^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ) = \frac{143^\circ + (143^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ)}{2} \cdot n = 143^\circ \cdot n + n(n-1) \cdot 1^\circ$$

Очевидно, эти суммы должны быть равны

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 143^\circ \cdot n + n(n-1) \cdot 1^\circ$$

$$180n - 360 = 143n + n^2 - n$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$n = 19 \pm \sqrt{19^2 - 360} = \begin{cases} 20 \\ 18 \end{cases}$$

Таким образом, описанный многоугольник может иметь 20 или 18 вершин, то есть наибольшее число вершин — 20.

Ответ: 20

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{при } y = 1, x = \frac{-2 - 3 \cdot 1}{4} = -\frac{5}{4} \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{при } y = -2, x = \frac{-2 - 3(-2)}{4} = 1$$

Таким образом  $y = -2$  — наиболее близкий целый  $y$  к вершине  $y$ , при котором  $x \in \mathbb{Z}$ .

Тогда оптимальная комбинация  $y = -2, x = 1, z = 1$ .

$$x^2 + y^2 + z^2 = (1)^2 + (-2)^2 + (1)^2 = 6$$

Ответ: 6.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3

Обозначим четвертое число множества  $M$  за  $n$ , тогда последовательность элементов этого множества имеет вид

$$\{n-3; n-2; n-1; n; n+1; n+2; n+3\}$$

Максимальная разница между элементами множества равна

$$(n+3) - (n-3) = 6, \text{ поэтому } p - q \leq 6$$

$$p^2 - q^2 = 792$$

Тогда  $(p-q)$  - делитель 792, не превосходящий

$$(p-q)(p+q) = 792$$

6

При этом  $(p-q) \div 2$ , т.к.  $p$  и  $q$  - нечетные числа

Рассмотрим три возможных случая:

(т.к.  $p$  и  $q$  - простые, следовательно чет?)

$$\begin{cases} p - q = 2 \\ p + q = \frac{792}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 199 \\ q = 197 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p - q = 4 \\ p + q = \frac{792}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 101 \\ q = 97 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p - q = 6 \\ p + q = \frac{792}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 69 \\ q = 63 \end{cases} \text{ - не подходит, т.к. } 69 \text{ и } 63 \text{ составные числа}$$

Сумму шестерки чисел можно представить как разность суммы семи чисел и одного числа, которое не вошло в шестерку





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Может в шестёрку не вошло число  $n+x$  ( $x \in [-3; 3]$ )  
или число  $n+y$  ( $y \in [-3; 3]$ )

Сумма семи чисел равна  $(n-3)+(n-2)+\dots+(n+2)+(n+3) = 7n$

Продолжим рассуждать два оставшихся варианта

$$p = 7n - (n+x) \quad q = 7n - (n+y)$$

~~$$\begin{cases} 199 = 7n - (n+x) \\ 201 = 7n - (n+x) \end{cases}$$~~

$$6n = 199 + x, \quad x \in [-3; 3]$$

↓

$$n = 33, \quad x = -1$$

$$\begin{cases} 199 = 7n - (n+x) \\ 197 = 7n - (n+y) \end{cases}$$

~~$$6n = 197 + y, \quad y \in [-3; 3]$$~~

↓

$$n = 33, \quad y = 1$$

$$\begin{cases} 201 = 7n - (n+x) \\ 97 = 7n - (n+y) \end{cases}$$

$$6n = 201 + x, \quad x \in [-3; 3]$$

$$n = 17, \quad x = +1$$

$$6n = 97 + y, \quad y \in [-3; 3]$$

↓

$$n = 16, \quad y = -1$$

Во втором варианте нет однозначного

значения для  $n$ , значит верен первый вариант, где  $n = 33$ .

$$\text{Тогда } M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$$

Ответ: 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36.

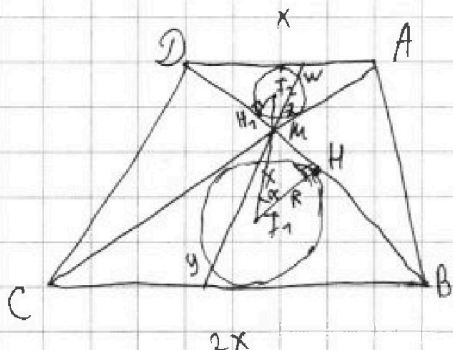


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



✓ 4

$$\angle CAD = 2\angle ACB \text{ (накрест-леги.)}$$

$$\angle ADB = \angle CBD \text{ (накрест-леги.)}$$

$$\angle DMA = \angle CMB \text{ (верт.)}$$

⇓

$$\triangle AMD \sim \triangle CMB$$

$$K = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{1} = 2$$

$I_1, M, I_2$  лежат на одной

прямой, т.к. биссектрисы вершинных

углов  $\angle DMA$  и  $\angle BMC$  лежат на одной прямой

В подобных треугольниках все соответствующие элементы подобны,

поэтому если  $R$ -радиус  $w_1$ , то  $\frac{R}{2}$ -радиус  $w_2$  и  $MZ = \frac{MX}{2}$

$H$ - точка пересечения  $w_1$  и  $BD$ ;  $I_1H = R$

$H_1$ - точка пересечения  $w_2$  и  $BD$ ;  $I_2H_1 = \frac{R}{2}$

Пусть  $\angle HI_1M = \alpha$ , тогда из подобия  $\angle H_1I_2M = \angle HI_1M = \alpha$

$$\text{Тогда } I_1M = \frac{R}{\cos \alpha} + \frac{R}{2 \cos \alpha} \quad I_2M = \frac{R}{2 \cos \alpha}$$

$$I_1I_2 = I_1M + I_2M = \frac{R}{\cos \alpha} + \frac{R}{2 \cos \alpha} = \frac{3R}{2 \cos \alpha}$$

$$MH = R \tan \alpha$$

Т.к. о квадрате касательной и отрезках секущей:

$$MH^2 = MX \cdot MY \quad \text{т.к. } MX = 2MZ, \text{ то } MH^2 = 2MZ \cdot MY$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f_1 + f_2 = \frac{3R}{2\cos\alpha} = \frac{13}{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{3R}{2\cos\alpha} &= \frac{13}{2} \\ R^2 \operatorname{tg}^2\alpha &= 100 \end{aligned} \right.$$

$$MH^2 = (R \operatorname{tg}\alpha)^2 = f_2 \cdot MZ \cdot MY$$

$$MZ \cdot MY = 5$$

$$\frac{3R}{\cos\alpha} = 13$$

$$\cos\alpha = \frac{3R}{13}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{100}{R^2} + 1 = \frac{169}{9R^2}$$

$$900 + 9R^2 = 169$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{3R}{\cos\alpha} &= 13 \\ R^2 \operatorname{tg}^2\alpha &= 10 \end{aligned} \right.$$

$$\cos\alpha = \frac{3R}{13}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{10}{R^2}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{10}{R^2} + 1 = \frac{169}{9R^2} \quad | \cdot 9R^2$$

$$90 + 9R^2 = 169$$

$$9R^2 = 79$$

$$R = \frac{\sqrt{79}}{3}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

Выберем из первого числа второе и определим знак разности.

$$\left(5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}\right) - \left(4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}\right) = \left| t = \frac{\pi}{14} \right| =$$

$$= \left(5 - 4 \sin(3t)\right) - \left(4 \cos(2t) - 5 \sin(t)\right) = 5 - 4 \sin(3t) - 4 \cos(2t) + 5 \sin(t) =$$

$$= 5 - 4 \left(3 \sin(t) - 4 \sin^3(t)\right) - 4 \left(1 - 2 \sin^2(t)\right) + 5 \sin(t) = \left| \sin(t) = x \right| =$$

$$= 5 - 4 \left(3x - 4x^3\right) - 4 \left(1 - 2x^2\right) + 5x = 5 - 12x + 16x^3 - 4 + 8x^2 + 5x =$$

$$= 16x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = (x+1)(16x^2 - 8x + 1) = \underbrace{(x+1)}_{>0} \underbrace{(4x-1)^2}_{>0}$$

$$x = \sin(t), t = \frac{\pi}{14} \Rightarrow x = \sin \frac{\pi}{14} > 0 > -1$$

$$\sin \frac{\pi}{14} \neq \frac{1}{4} \Rightarrow (4x-1)^2 > 0$$

$$\sin \frac{\pi}{14} \neq \frac{1}{4}, \text{ т.к. } \frac{\pi}{14} < \frac{3,15}{14} < \frac{1}{4}, \text{ а при } N > 0 \quad N > \sin(N)$$

Разность получилась положительной, поэтому первое число больше.

$$\text{Ответ: } 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6

Из условия следует, что никакие 4 точки уже из плоскости не принадлежат одной плоскости. Пирамида образуется из  $N$  ( $N \geq 3$ ) вершин в одной плоскости и одной вершиной в другой плоскости. В  $N$  пирамиде с более, чем 4 вершинами, основанием лежит в плоскости  $\alpha$ . Посчитаем кол-во таких пирамид

$$N_1 = 5 \cdot (C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7)$$

кол-во способов выбрать  $i$  вершин в плоскости  $\alpha$

Далее посчитаем треугольные пирамиды.

С основанием в плоскости  $\alpha$   $N_2 = 5 \cdot C_7^3$

С основанием не в плоскости  $\alpha$   $N_3 = 9 \cdot C_5^3$

$$N = N_1 + N_2 + N_3$$

$$N = 5(C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7) + 9 \cdot C_5^3 =$$

$$= 5 \cdot \left( \frac{7!}{3!4!} + \frac{7!}{4!3!} + \frac{7!}{5!2!} + \frac{7!}{6!1!} + \frac{7!}{7!0!} \right) + 9 \cdot \frac{5!}{3!2!} =$$

$$= 5 \cdot (35 + 35 + 21 + 7 + 1) + 9 \cdot 10 = 495 + 90 = 585$$

Ответ: 585





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$36x + 18 - 18y - 18x - 18y - 8x - 64 + 64y - 8x - 8y - 18x - 18y -$$

$$- 8x - 8y + 28x + 28y = 0$$

$$4x + 22y - 46 = 0 \quad x = \frac{23 - 11y}{2}$$

$$xy = |\vec{x}\vec{y}| = \sqrt{\vec{x}\vec{y} \cdot \vec{x}\vec{y}} = \sqrt{4x^2 + x(1-y) \cdot 2 - 2x(x+y) + 2x(1-y) + 16(1-y)^2 +$$

$$+ (1-y)(x+y) \cdot 2 - 2x(x+y) + (1-y)(x+y) \cdot 2 + 2(x-y)^2}$$

Поиск корней с учетом  $x = \frac{23 - 11y}{2}$ , так как квадратичная функция, минимум в вершине параболы

$$xy = \sqrt{4x^2 + 2x - 2xy - 2x^2 - 2xy + 2x - 2xy + 16 + 16y^2 - 32y + 2x - 2xy - 2y^2 - 2y -$$

$$- 2x^2 - 2xy + 2 - 2xy - 2y^2 + 2y + 2x^2 + 2y^2 = 4xy}$$

≈ ...



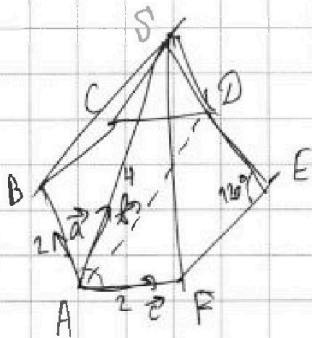


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



✓ 7

Введем вектора из точки A по ребрам пирамиды

$$\vec{AB} = \vec{a} \quad \vec{AS} = \vec{b} \quad \vec{AF} = \vec{c}$$

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	4	2	-2
$\vec{b}$	2	16	2
$\vec{c}$	-2	2	2

Т.к.  $X \in AD$ , то

$$\vec{XA} = x(\vec{a} + \vec{c})$$

Т.к.  $Y \in SF$ , то

$$\vec{SY} = y(\vec{c} - \vec{b})$$

$$\vec{XY} = \vec{XA} + \vec{AS} + \vec{SY}$$

$$\vec{XY} = x(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} + y(\vec{c} - \vec{b})$$

$$\vec{XY} = x\vec{a} + (1-y)\vec{b} + (x+y)\vec{c}$$

$\vec{n}$  - нормаль к (SAB)

$$\vec{n} = p_1\vec{a} + p_2\vec{b} + p_3\vec{c}$$

Пусть  $p_1 = 9$ , тогда  $p_2 = -4$ ,  $p_3 = 14$

$$\vec{n} \begin{cases} \vec{n} = 9\vec{a} - 4\vec{b} + 14\vec{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{XY} = 0$$

$$\begin{cases} 4p_1 + 2p_2 - 2p_3 = 0 \\ 4p_1 + 16p_2 + 2p_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 36x \\ & \underline{36x + 18} \end{aligned}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{XY} = 0$$

$$\begin{cases} 2p_1 + p_2 - p_3 = 0 \\ 2p_1 + 8p_2 + p_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 36x + 18(1-y) - 18(x+y) - 8x - 64(1-y) - 8(x+y) + \\ & + (-18(x+y)) - 8(x+y) + 28(x+y) = 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + z \ln 3 + 3z \ln 2 = \ln 2 + \ln 3 \quad | : \ln 2$$

$$4x + 3y + z \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 3z = 1 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$4x + 3y + 3z - 1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) (1 - z)$$

Т.к.  $x, y, z$  - целые числа, то в левой части стоит рациональное число, а т.к.  $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$  - иррациональное число, то  $z = 1$ , иначе в правой части будет иррациональное

Подставим найденный  $z = 1$  в уравнение

$$4x + 3y + 2 = 0 \quad x = \frac{-2 - 3y}{4} \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \min$$

$$f(x) = x^2 + \left(\frac{-2 - 3y}{4}\right)^2$$

$$f(y) = y^2 + \frac{1}{4} + \frac{9y^2}{16} + \frac{3y}{4} = \frac{25y^2}{16} + \frac{3y}{4} + \frac{1}{4}$$

$$f(y) = y^2 + \left(\frac{-2 - 3y}{4}\right)^2 \rightarrow \min$$

Найдем вершину параболы:  $y_0 = \frac{-\frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{25}{16}} = \frac{-12}{2 \cdot 25} = -\frac{6}{25}$

Т.к. слева и справа от вершины, <sup>наша</sup> квадратичная функция монотонно

уменьшается и возрастает соответственно, то для  $f(y) \rightarrow \min$  необходимо

подобрать целые  $x, y$ , чтобы  $y$  был как можно ближе к вершине

параболы  $y_0 = -\frac{6}{25}$

при  $y = 0$ ,  $x = \frac{-2 - 3 \cdot 0}{4} \notin \mathbb{Z} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

при  $y = -1$ ,  $x = \frac{-2 - 3(-1)}{4} = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$

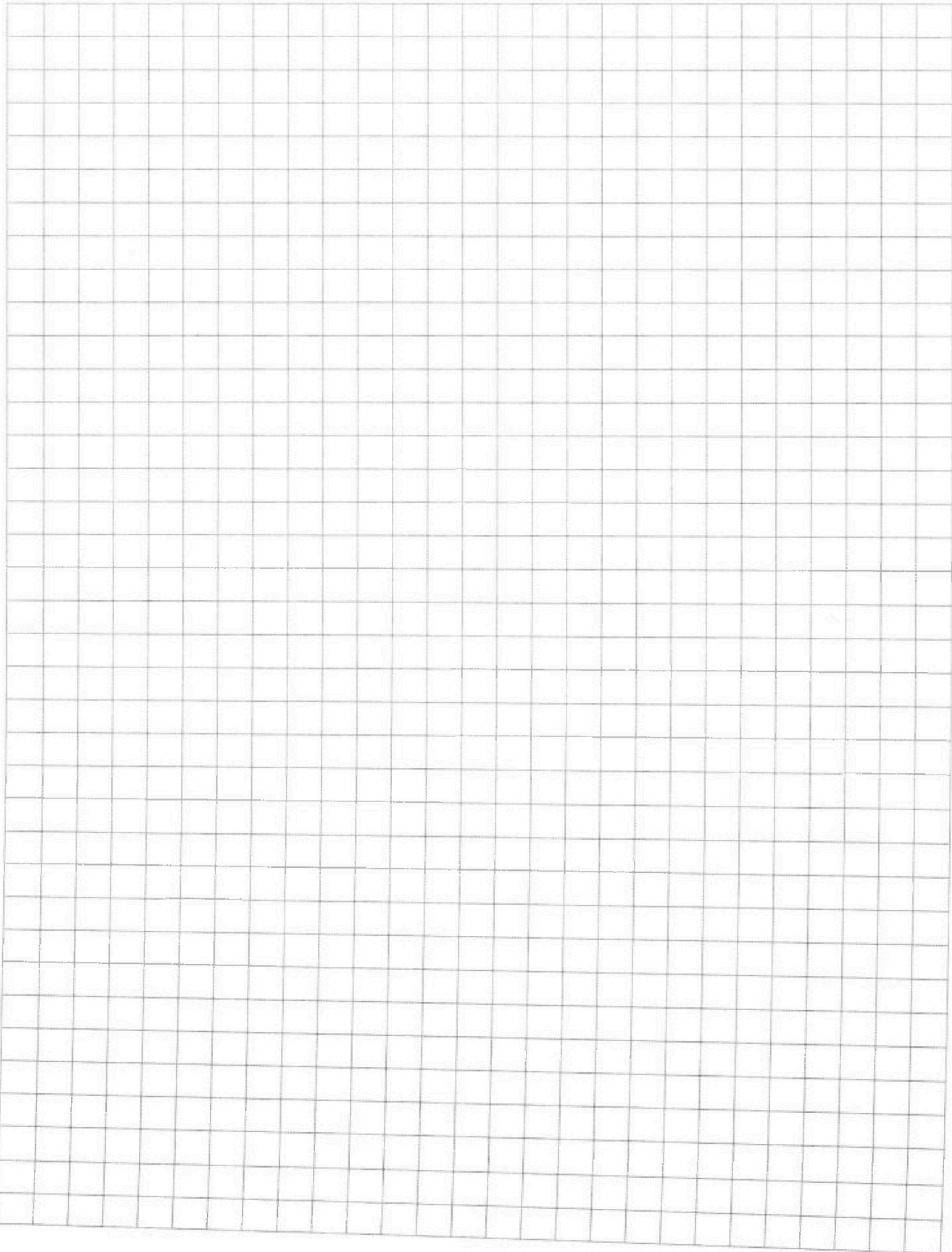


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





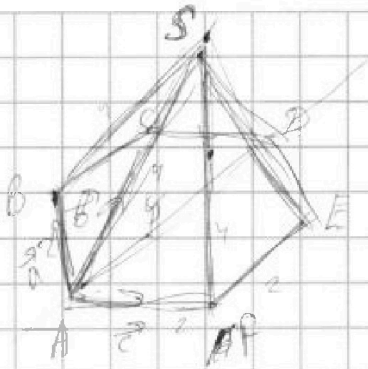
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\vec{AX} = y \cdot (\vec{a} + \vec{c})$$

$$\vec{SX} = x \cdot (\vec{c} - \vec{b})$$

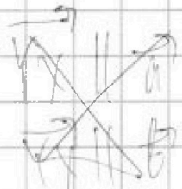
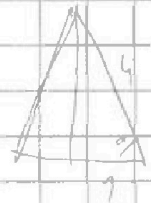
$$\vec{XA} = y(\vec{a} + \vec{c})$$

$$\vec{XA} + \vec{AS} + \vec{SX} = \vec{AX}$$

$$\vec{AX} = y(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} + x(\vec{c} - \vec{b})$$

$$\vec{AX} = y\vec{a} + (1-x)\vec{b} + (y+x)\vec{c}$$

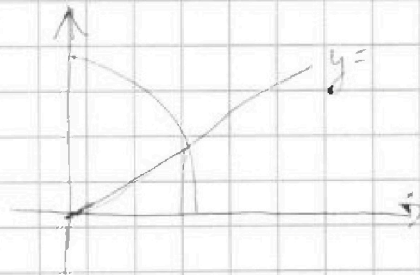
$$\vec{n} = p_1\vec{a} + p_2\vec{b} + p_3\vec{c}$$



$\vec{AX} \parallel (SAB)$

$$\vec{n} = p_1\vec{a} + p_2\vec{b} + p_3\vec{c}$$

$$\frac{1}{14} \cdot \frac{3 \cdot 14}{14}$$



$$4p_1 + 8p_2 \cos \angle(\vec{c}, \vec{b}) + 4(-\frac{1}{2}) = 0$$

$$4p_2 + 2p_2 - 2 = 0$$

$$p_2 = 3$$

$$p_1 = -1$$

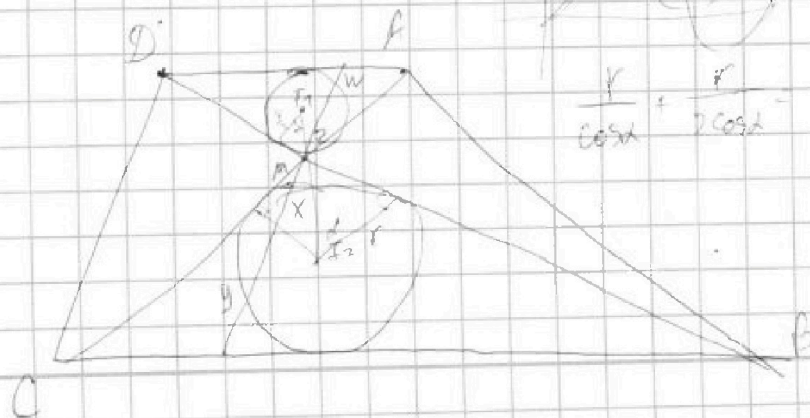
$$2p_2 + 16p_2 + 2p_3 = 0$$

$$p_3 = -23$$

$$\frac{396}{1900} < \frac{1}{4}$$

$$6n = 1997 + x$$

$$n = 33 \quad x = 1$$



$$\frac{r}{\cos \alpha} + \frac{r}{2 \cos \alpha} = \frac{13}{2}$$

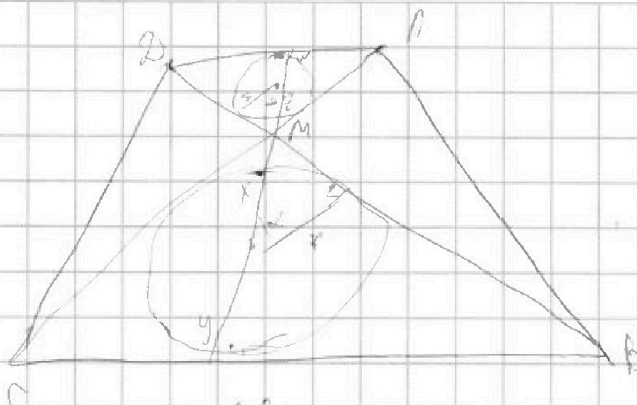


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{r}{\cos \alpha} + \frac{r}{2 \cos \alpha} = \frac{13}{2}$$

$$(r \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \cancel{M^2} \cdot M^2$$

$$\left( \frac{r \operatorname{ctg} \alpha}{2} \right)^2 = MZ \cdot MW$$

$$(r \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 16$$

$$\frac{3r}{2 \cos \alpha} = \frac{13}{2}$$

$$3r = 13 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3r}{13}$$

$$r^2 = \frac{10}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 2}$$

$$r^2 = 10 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$r^2 = \frac{10}{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1}$$

$$r^2 = 10 \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right)$$

$$r^2 = \frac{20 \sin^2 \alpha}{2 - \sin^2 \alpha}$$

$$r^2 = 10 \left( \frac{169}{9r^2} - 1 \right)$$

$$9r^4 = 1690 - 90r^2$$

$$9r^4 + 90r^2 - 1690 = 0$$

$$1690 = 2 \cdot 845 = 2 \cdot 5 \cdot 169 = 2 \cdot 5 \cdot 13^2$$

$$r^2 = \frac{-045 + \sqrt{45^2 + 1690 \cdot 9}}{9}$$

$$\frac{7!}{3!4!} + \frac{7!}{4!3!} + \frac{7!}{5!2!} + \frac{7!}{6!1!} + \frac{7!}{7!0!} =$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} =$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \quad \sqrt{4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}} \quad 16x^3 + 8x^2 - 7x + 1 > 0$$

$$5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14}\right) \sqrt{4 \left(\cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{14}\right)} \quad \begin{array}{r|l} 16 & 8 \\ \hline & -7 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}$$

$$5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14}\right) \sqrt{4 \left(\sin \frac{5\pi}{14} + \sin \frac{3\pi}{14}\right)} - 1 \quad \begin{array}{r|ll} 16 & -8 & 1 \\ \hline & & 0 \end{array}$$

$$5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14}\right) \quad 5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14}\right) \sqrt{4 \left(\sin \frac{5\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{14}\right)} + 4 \sin \frac{3\pi}{14}$$

$$5 \sqrt{\sin \frac{\pi}{14}} \sqrt{\sin \frac{3\pi}{14}}$$

$$(x+1)(16x^2 - 8x + 1) > 0$$

$$5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14}\right) \sqrt{4 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{14}}$$

$$(x+1)(4x-1)^2 > 0$$

$$5 \left(1 + \sin \frac{\pi}{14}\right) \sqrt{8 \sin \frac{\pi}{14} \cos^2 \frac{\pi}{14}}$$

$$5 \sqrt{8 \sin \frac{\pi}{14} \cos^2 \frac{\pi}{14}} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$5 \sqrt{\sin \frac{\pi}{14} (8 \cos^2 \frac{\pi}{14} - 5)}$$

$$\sin \frac{\pi}{14} (8 \cos^2 \frac{\pi}{14} - 5) \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \frac{5\pi}{14}$$

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \quad \sqrt{4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}}$$

$$5 \sqrt{4 \left(\sin \frac{3\pi}{14} + \sin \frac{3\pi}{14}\right)} - 5 \sin \frac{\pi}{14} \quad \sin 7x =$$

$$5 \sqrt{4 \cdot 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{14}} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$5 \sqrt{16 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14}} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$5 \sqrt{16} \cdot \frac{1}{2} \quad 5 \sqrt{16} \quad 5 \sqrt{32 \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{14} \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14}} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

$$5 \sqrt{\sin \frac{\pi}{14} (32 \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14} - 5)}$$

$$\sin(3x) = (\sin(\alpha + \alpha) + \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + (1 - 2\sin^2 \alpha) \sin \alpha =$$

$$= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновики

$$p^2 - q^2 = 792$$

$$(p-q)(p+q) = 792$$

$$p-q \leq 6$$

$$\begin{cases} p-q=2 \\ p+q=396 \end{cases}$$

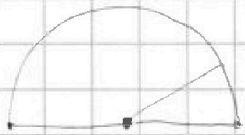
$$\begin{cases} p=199 \\ q=197 \end{cases}$$

$$7n - n - x = 199$$

$$6n = 199 + x \quad x \in [-3; 3]$$

$$\begin{cases} n=33 \\ x=-1 \end{cases}$$

$\sin(\frac{\pi}{n})$



$$\begin{cases} p-q=4 \\ p+q=198 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=101 \\ q=97 \end{cases}$$

$$7n - n - x = 101$$

$$6n = 101 + x$$

$$n=17$$

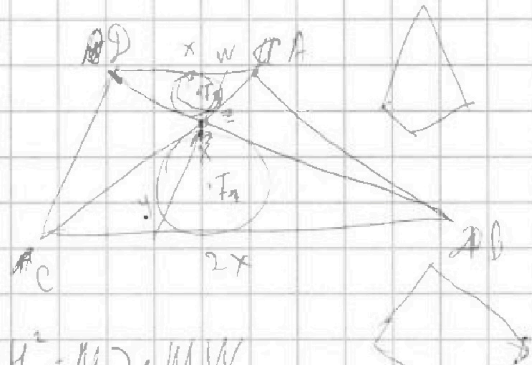
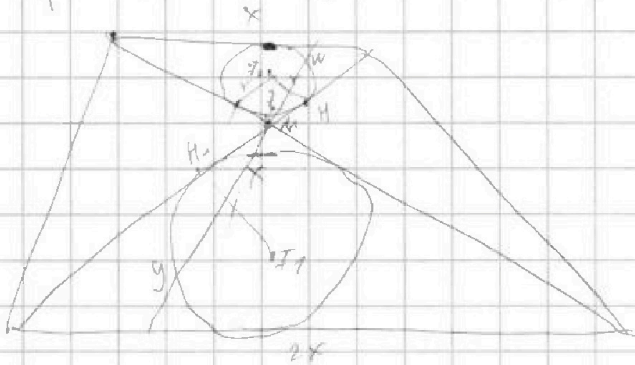
$$x=1$$

$\sin(\frac{\pi}{n}) \leq \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} p+q=6 \\ p+q=132 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=69 \\ q=63 \end{cases}$$

$$M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$$



$$MN^2 = MZ \cdot MW$$

$$MN^2 = MX \cdot MY$$

$$r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = MZ \cdot MW$$

$$4r^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha = MX \cdot MY$$

$$4r^4 \operatorname{ctg}^4 \alpha = 5 \cdot MX \cdot MW$$

$$MZ \cdot MY = 5$$

$$T_1 T_2 = 6,5$$

$$5 - 12x + 16x^3 \sqrt{4 - 8x^2 - 9x}$$

$$1 + 16x^3 + 8x^2 \sqrt{7x}$$

$$5 - 4(3x - 4x^3) \sqrt{4(1 - 2x^2)} - 5x$$

$$\frac{r}{\sin \alpha} + \frac{2r}{5 \sin \alpha} = T_1 + T_2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p^2 - q^2 = 792$$

$$p^2 - q^2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$(p-q)(p+q) =$$

$p-q$	$p+q$
2	11
4	3
6	

$$7n + 21 = 7(n+3)$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 25 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ 28 \\ \hline 53 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ 28 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$7n + 21 - n - x = 101$$

$$6n - x = 80$$

$$80 = 6n + x$$

$$6n = 80 + x$$

$$n = 14$$

$$x = 4$$

$$7n + 21 - n - x = 199$$

$$6n - x = 178$$

$$6n = 178 + x$$

$$n = 30$$

$$x = 2$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 66 \\ \hline 168 \\ 12 \\ \hline 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 15 \\ \hline 44 \\ 18 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$\frac{14+20}{2} \cdot 7 = 17 \cdot 7 = 119$$

$$792 = 396 \cdot 2 = 198 \cdot 4 = 99 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} 792 \overline{) 6} \\ 6 \phantom{00} \\ \hline 19 \phantom{0} \\ 18 \phantom{00} \\ \hline 10 \phantom{0} \\ 9 \phantom{00} \\ \hline 1 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} n & n+1 & n+2 & n+3 & n+4 & n+5 & n+6 \\ & & +1 & & & & \\ & & & & +1 & & \\ & & & & & & +1 \end{array}$$

$$p - q \leq 6$$

$$p - q = 2$$

$$p + q = 396$$

$$p - q = 4$$

$$p + q = 198$$

$$p - q = 6$$

$$p + q = 132$$

$$\begin{array}{l} p = 799 \\ q = 797 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p = 101 \\ q = 297 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p = 69 \\ q = 63 \end{array}$$

$$13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19$$

$$14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20$$

$$30 \quad 31 \quad 32 \quad 33 \quad 34 \quad 35 \quad 36$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

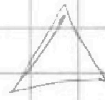
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНИК

$143^\circ$   $145^\circ$



$+2^\circ \cdot n$

$(n-2) \cdot 180^\circ$

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 143^\circ + 145^\circ + \dots + 143^\circ + 143^\circ + 2^\circ(n-1)$$

$$(n-2) \cdot 180^\circ = \frac{143^\circ + 143^\circ + 2^\circ(n-1)}{2} \cdot n$$

$$(n-2) \cdot 180 = 143n + n(n-2)$$

$$180n - 360 = 143n + n^2 - 2n$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 143^\circ \cdot n + n(n-1)$$

$$n = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 360}}{2} = \frac{19 \pm 1}{2} =$$

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$x^2 + z^2 + y^2 \rightarrow \min$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + z \ln 3 + 3z \ln 2 = \ln 2 + \ln 3$$

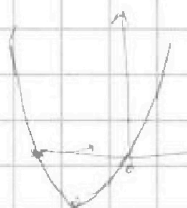
$$4x + 3y + z \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 3z = 1 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$z = 1 \quad 4x + 3y + 2 = 0 \quad x = -\frac{3y}{4} - \frac{1}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + \left(-\frac{3y}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + y^2 + \frac{9}{16}y^2 + \frac{1}{4} + \frac{3y}{4}$$

$$\frac{25}{16}y^2 + \frac{3y}{4} = 0 \quad y \left( \frac{1}{4} \left( \frac{25}{4}y^2 + 3y \right) \right) = \frac{1}{4} y \left( \frac{25}{4}y + 3 \right)$$

$$y_0 = -\frac{6}{25}$$



$$y = 0 \quad y = -\frac{4 \cdot 3}{25}$$

$$4x + 3y + 2 = 0$$

$$x = -\frac{3y}{4} - \frac{1}{2}$$

$$x^2 + y^2 \rightarrow \max$$

$$4x = -2 - 3y$$

$$x = \frac{-3y-2}{4}$$

$$y = 0$$

