МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{3\pi}{14}$ или $4\cos\dfrac{\pi}{7} - 5\sin\dfrac{\pi}{14}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1.

Пусть кол-во вершин n, тогда сумма углов данного многоугольника $(n-2)\cdot 180^\circ = S_n$

С другой стороны углы образуют арифм. прогрессию с шагом 2. $a_1 = 143^\circ$ $d=2$ $\Rightarrow$ $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n =$

$= \frac{\cancel{2}\cdot 143 + \cancel{2}(n-1)}{\cancel{2}} n = 143n + n^2 - n = 142n + n^2$

$S_n = S_n \Rightarrow 180(n-2) = 142n + n^2$

$n^2 + 142n - 180n + 360 = 0$

$n^2 - 38n + 360 = 0$

$D_1 = 19^2 - 360 = 361 - 360 = 1$

$\left[\begin{array}{l} n_1 = 19+1 \\ n_2 = 19-1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} n_1 = 20 \\ n_2 = 18 \end{array}\right.$

$n_2 < n_1 \Rightarrow$ искомый ответ на наибольшее кол-во вершин 20.

Проверка. $n = 18$ $S_n = 16\cdot 180$ $S_n = \frac{143\cdot\cancel{2} + \cancel{2}\cdot 17}{\cancel{2}}\cdot 18 = 160\cdot 18$

$S_n = S_n$ (+)

$n = 20$ $S_n = 18\cdot 180$ $S_n = \frac{143\cdot\cancel{2} + \cancel{2}\cdot 19}{\cancel{2}}\cdot 20 = 162\cdot 20 = 2\cdot 9\cdot 9\cdot 20 =$
$= 18\cdot 180$

$S_n = S_n$

~~20~~

Наибольшее число 20

Ответ: 20

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2.

$x\cdot\ln 16 + y\cdot\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$

$x^2+y^2+z^2 - \min.$

$\cancel{x\cdot\ln 2^4 + y\ln 2^3 + z\cdot\ln 2^3 + z\ln 3 = \ln 2 + \ln 3}$

$\cancel{4\ln 2\cdot x + 3\cdot\ln 2\cdot y + 3\ln 2\cdot z + \ln 3\cdot z = \ln 2 + \ln 3}$

$x\cdot\ln 4 + x\cdot\ln 4 + y\cdot\ln 2 + y\cdot\ln 4 + z\cdot\ln 4 + z\cdot\ln 6 = \ln 6$

$(x+y+z)\cdot\ln 4 + x\ln 4 + y\ln 2 + z\ln 6 = \ln 6$

$(x+y+z)\ln 4 + \underline{x\ln 2 + y\ln 2 + z\ln 2} + x\ln 2 + z\ln 3 = \ln 6$

$(x+y+z)\cdot 3\ln 2 + x\ln 2 + z\ln 3 = \ln 6$

$(x+y+z) = \dfrac{\ln 6 - (x\ln 2 + z\ln 3)}{3\ln 2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3.

Пусть 7 подряд идущих натуральных чисел это:

$n-3,\ n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$, где $n-3 \geq 1$, т.к. числа натуральные и $\Rightarrow n \geq 4$

Заметим, что выбрать шесть чисел без $\underline{n}$ нельзя, т.к. в таком случае сумма $(n-3)+(n-2)+(n-1)+(n+1)+(n+2)+(n+3)=6n$

$6n$ – составное, т.к. $n \geq 4$, а $6n \vdots 2$ и $\vdots 3$

Пусть ~~...~~ выбрали все, кроме $n-3$, тогда

$S_1 = 6n+3 = 3(2n+1) \vdots 3$, т.к. S должно быть простым, то

$2n+1 = 1$ $\quad n = 0$ – чего быть не могло (см. выше $n \geq 4$)

Пусть выбрали все, кроме $n-2$, тогда

$S_2 = 6n-2 = 2(3n+1) \vdots 2$, чтобы S было простым

$3n+1 = 1$ $\quad n = \cancel{\frac{2}{3}}\, 0$ – не могло, т.к. $n \in N$

Пусть выбрали все, кроме $n-1$, тогда

• $S_3 = 6n+1$

Пусть выбрали все, кроме $n+1$, тогда

• $S_4 = 6n-1$

Пусть выбрали все, кроме $n+2$, тогда

$S_5 = 6n-2 = 2(3n-1) \vdots 2$, чтобы S было простым $3n-1=1$

$n = \frac{2}{3}$ – не могло, т.к. $n \in N$

Пусть выбрали все, кроме $n+3$, тогда

$S_6 = 6n-3 = 3(3n-1) \vdots 3 \Rightarrow 3n-1=1 \quad n = \frac{2}{3}$ (−), т.к. $n \in N$

Заметим, что из всех возможных шестёрок чисел сумма может быть простой только у S_3 и S_4 $\Rightarrow$

(сумм всего возможно ~~8~~ $C_7^6 = 7$)

$S_3^2 - S_4^2 = p^2 - q^2 = 792$ – соотв. ~~$S_3 > S_4$~~ $S_4 < S_3$

$(6n+1)^2 - (6n-1)^2 = (6n+\cancel{1}+6n-\cancel{1})(6n+1-6n+1) = 792$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

продолжение №3

$\cancel{12}n \cdot \cancel{2} = \overset{33}{\cancel{792}}$ $n = 33$, тогда искомое множество М:

30 31 32 33 34 35 36

Проверка $p = 30+31+33+34+35+36 = 6\cdot 30 + 19 = 180+19 = 199$

$q = 30+31+32+33+35+36 = 180 + 17 = 197$

$p^2 - q^2 = 199^2 - 197^2 = 2\cdot(197+199) = 2\cdot 396 = 792$ +

Ответ: 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5.

$5-4\cdot\sin\frac{3\pi}{14}$ или $4\cdot\cos\frac{\pi}{7}-5\cdot\sin\frac{\pi}{14}$

Вычтем выр-ие друг из друга и определим знак разности

$5-4\cdot\sin\frac{3\pi}{14}-4\cdot\cos\frac{\pi}{7}+5\cdot\sin\frac{\pi}{14}=$

$=5-4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{14}+\frac{\pi}{7}\right)-4\cdot\cos\frac{\pi}{7}+5\cdot\sin\frac{\pi}{14}=$

$=5-4\cdot\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{7}-4\cdot\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{14}-4\cdot\cos\frac{\pi}{7}+5\cdot\sin\frac{\pi}{14}$

Пусть $\cos\frac{\pi}{14}=a$, тогда $\sin\frac{\pi}{14}=\sqrt{1-a^2}$

$\cos\frac{\pi}{7}=2\cdot\cos^2\frac{\pi}{14}-1=2\cdot a^2-1$ $\quad\sin\frac{\pi}{7}=\sqrt{1-(2a^2-1)^2}=$

$=\sqrt{(1-2a^2+1)(\cancel{1}+2a^2-\cancel{1})}=\sqrt{2(1-a^2)\cdot 2a^2}=2a\sqrt{1-a^2}$

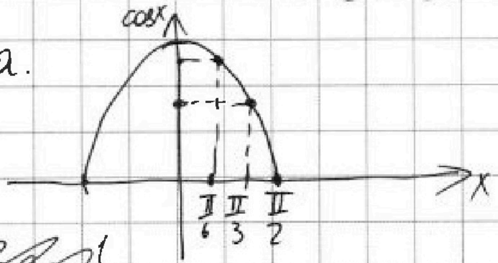
Подставим:

$5-4\cdot\sqrt{1-a^2}\cdot(2a^2-1)-4\cdot 2a\sqrt{1-a^2}\cdot a-4\cdot(2a^2-1)+5\cdot\sqrt{1-a^2}=$

$=5-8a^2\sqrt{1-a^2}+4\sqrt{1-a^2}-8a^2\sqrt{1-a^2}-8a^2+4+5\sqrt{1-a^2}=$

$=9-16a^2\sqrt{1-a^2}+9\sqrt{1-a^2}-8a^2\ \cancel{=9-8a^2+\sqrt{1-a^2}(9-16a^2)}$

$\cancel{=8(1-a^2)}$ Оценим a.



$\frac{\pi}{14}<\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \cancel{\cos\frac{\pi}{14}>\frac{1}{2}\Rightarrow a>\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{14}>\frac{\sqrt3}{2}\Rightarrow \frac{\sqrt3}{2}<a<1$

выражение: $f(a)=9-16a^2\sqrt{1-a^2}+9\sqrt{1-a^2}-8a^2$

$f'(a)=-16a+\frac{9}{2\sqrt{1-a^2}}\cdot(-2a)-\left(32a\cdot\sqrt{1-a^2}+\frac{16a^2}{2\sqrt{1-a^2}}(-2a)\right)=$

$=-16a-\frac{18a}{2\sqrt{1-a^2}}-32a\sqrt{1-a^2}+\frac{32a^3}{2\sqrt{1-a^2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

продолжение №5.

$$f'(a) = \cancel{\frac{32a^3}{2...}}\ \frac{16a^3}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{16a\sqrt{1-a^2}+32a(1-a^2)+9a}{\sqrt{1-a^2}} =$$

$$= \frac{16a^3+32a^3-41a-16a\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{48a^3-41a-16a\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\left(48a^2-16\sqrt{1-a^2}-41\right)$$

$\vee\ 0$

$$\cancel{g(x) = 48a^2-16\sqrt{1-a^2}-41 \quad g'(x) = 96a + \frac{16}{2\sqrt{1-a^2}}\cdot(2a) = 96a + \frac{16a}{\sqrt{1-a^2}} > 0 \text{ т.к. } a \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)}$$

$$48a^2-41 = 16\sqrt{1-a^2} \qquad (48a^2-41)^2 = 196(1-a^2)$$

$$48^2a^4 - 2\cdot48\cdot41a^2 + 41^2 = 196 - 196a^2$$

$$2304a^4 - 3740a^2 + 1485 = 0$$

$$D_1 = 187^2 - 2304\cdot1485\ \cancel{= 34969...}$$

Заметим, что $D_1 < 0$, т.к. $187^2 = 34969$, а $2304\cdot1485 >$ $> 2000\cdot1000 = 2000000$

$\Rightarrow D_1 < 0$

Значит

$f'(a) > 0 \Rightarrow$ функция возрастающая, значит

посчитаем значение при $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9 - 16\cdot\frac{3}{4}\sqrt{1-\frac{3}{4}} +$

$+ 9\sqrt{1-\frac{3}{4}} - 8\cdot\frac{3}{4} = 9 - \frac{4\cdot3}{2} + \frac{9}{2} - 6 = 3 - 6 + 4{,}5 = 1{,}5 > 0$

при $a > \frac{\sqrt{3}}{2}$ т.к. функция возр. будут больше 1,5

$\Rightarrow$ разность ~~...~~ положительна, а значит

$$5 - 4\cdot\sin\frac{3\pi}{14} > 4\cdot\cos\frac{\pi}{7} - 5\cdot\sin\frac{\pi}{14}$$

Ответ: $5 - 4\cdot\sin\frac{3\pi}{14}$

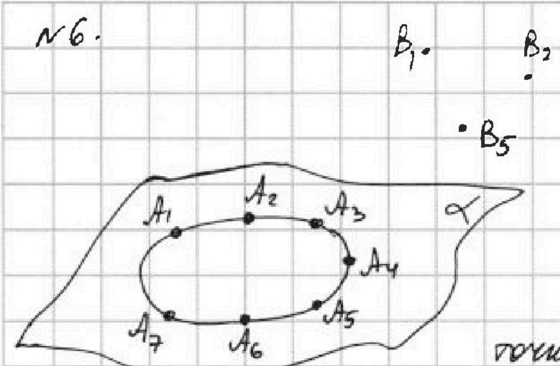
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6.



Для начала найдём кол-во пирамид содержащие в основании точки из плоскости α $(A_1, \dots, A_7)$, а в качестве вершины точка из набора $(B_1, B_2, \dots, B_5)$

Основание состоит минимум из трёх точек

1) В основании треуг. : C_7^3 – кол-во треуг из пл-ти α
всего: $C_7^3 \cdot 5$ (любая из B_i, причем $B_i \notin \alpha$)

2) В основании четырехуг: $C_7^4 \cdot 5$

3) В основании пятиуг: $C_7^5 \cdot 5$

4) В основании шестиуг: $C_7^6 \cdot 5$

5) В основании семиуг: $C_7^7 \cdot 5$

6) Найдём кол-во пирамид у которых только 1 вершина из множества A_i, другие из мн-ва B_i
т.к. любые 4 точки, лежащие в 1 пл-ти, лежат в пл-ти α, то из B_i мы можем выбрать только 3 точки для пирамиды
т.е. всего $C_5^3 \cdot 7$ – ~~таких~~ пирамид данного типа.

7) Теперь ~~нужно~~ найдём кол-во пирамид две вершины в которых из множества A_i, тогда из мн-ва B_i мы должны взять хотя бы 2 точки (заметим, что в итоге 2 из A_i и 2 из B_i не окажутся в 1 пл-ти, т.к. таким свойством обладают только точки из пл-ти α. (т.е A_i).

$C_7^2 \cdot C_5^2$ – всего.

Три точки из пл-ти α (A_i) взять уже нельзя, т.к (случай тетраэдра рассмотрен) ~~з~~ при этом нужно взять быть 2 точки из B_i и какие-то ~~[illegible]~~ 4 должны образоват

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

продолжение 6

~~пл-ть~~, но по условию это могут быть точки только из пл-ти α $\Rightarrow$ подведём итог:

$\cancel{C_7^3 + C_7^3}$

$$C_7^2\cdot C_5^2 + 7\cdot C_5^3 + C_7^7\cdot 5 + C_7^6\cdot 5 + C_7^5\cdot 5 + C_7^4\cdot 5 + C_7^3\cdot 5 =$$

$$= C_7^2\cdot C_5^2 + 7C_5^3 + 5\left(C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7\right) =$$

$$\cancel{= \frac{7!}{2!\cdot5!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot2!} + 5\cdot\left(\frac{7!}{3!\cdot4!} + \frac{7!}{4!\cdot3!} + \frac{7!}{5!\cdot2!} + \frac{7!}{6!} + 1\right) =}$$

$$\cancel{= \frac{4\cdot5\cdot6}{2\cdot2} + 5\cdot\left(\frac{5\cdot6\cdot7}{3\cdot2} + \frac{5\cdot6\cdot7}{3\cdot2} + \frac{3\cdot6\cdot7}{2} + 7 + 1\right) =}$$

$$\cancel{= 30 + 5(35+35+21+8) = 30 + 5(70+29) = 30 + 5\cdot99 = 525}$$

$$= \frac{7!}{2!\cdot5!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!} + \frac{7\cdot5!}{3!\cdot2!} + 5\left(\frac{7!}{3!\cdot4!} + \frac{7!}{4!\cdot3!} + \frac{7!}{5!\cdot2!} + 7 + 1\right) =$$

$$= \frac{4\cdot5\cdot6}{2\cdot2} + \frac{7\cdot4\cdot5}{2} + 5\cdot\left(\frac{5\cdot6\cdot7}{3\cdot2} + \frac{5\cdot6\cdot7}{3\cdot2} + \frac{3\cdot6\cdot7}{2} + 8\right) =$$

$$= 30 + 70 + 5(35+35+29) = 100 + 5\cdot99 = 595$$ пирамид.

Ответ: 595

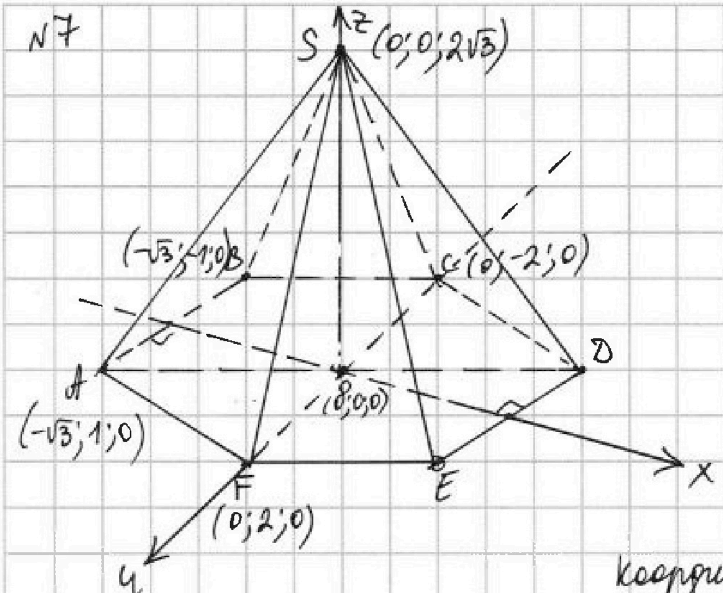
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7

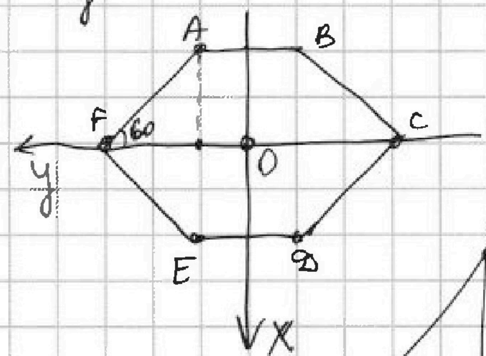


Введём оси координат г/з. центр основания $Oz \perp xOy$ $Ox \perp AB$ и ED $CF \in Oy$ (показано на рис.)

~~FO = A~~ Пусть сторона основания $a = 2$

боковая $b = 4$

$FO = a = 2$



координаты точки A:

$x_A = -2\cdot\cos 30 = -2\cdot\frac{\sqrt3}{2} = -\sqrt3$

$y_A = \frac{2}{2} = 1$

$z_A = 0$

точки B: $x_B = -\sqrt3$ $y_B = -1$ $z_B = 0$

в $\triangle FSO$: $FO = 2$ $FS = 4 \Rightarrow$

$SO = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt3 = z_S$

Тогда найдём ур-ие пл-ти (SAB):

$S(0;0;2\sqrt3)$ $A(-\sqrt3;1;0)$ $B(-\sqrt3;-1;0)$

$Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{cases} 2\sqrt3\cdot C = -D \\ -\sqrt3\cdot A + B = -D \\ -\sqrt3 A - B = -D \end{cases}$$

Пусть $D = 2\sqrt3$ $\Rightarrow$ $C = -1$

$$+\begin{cases} -\sqrt3 A + B = -D \\ -\sqrt3 A - B = -D \end{cases}$$

$-2\sqrt3 A = -2D$

$2\sqrt3 A = 2\cdot 2\sqrt3$ $A = 2$

$B = \sqrt3 A - D = 2\sqrt3 - 2\sqrt3 = 0$

$\Rightarrow$ ур-ие пл-ти: $2x + 0\cdot y - 1\cdot z + 2\sqrt3 = 0$

$2x - z + 2\sqrt3 = 0$

вектор нормали $\vec{n}\{2;0;-1\}$ к данной пл-ти.

чтобы XY была параллельна (SAB) $\vec{n} \perp \vec{XY}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

продолжение задачи №7

$X \in SF$ $\quad Y \in AD$ $\quad$ точка $Y \in AD \Rightarrow z_y = 0$

$X(x_x; y_x; z_x)$ $\quad Y(x_y; y_y; 0)$; т.к $X \in SF$, то $x_x = 0$

~~$\overrightarrow{XY}\{(x_y - x_x); (y_y - y_x); -z_x\}$~~ $\quad \overrightarrow{XY}\{x_y; (y_y - y_x); -z_x\}$

~~$\overrightarrow{XY} \cdot \vec{n} = 0$ т.к перпендик. $\Rightarrow$~~

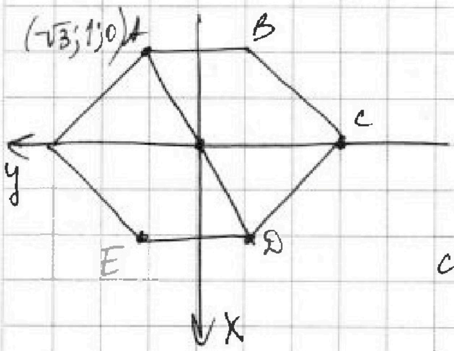
~~$(x_y - x_x) \cdot 2 + 0 + z_x = 0$ Длина $|\overrightarrow{XY}| = \sqrt{(x_y - x_x)^2 + (y_y - y_x)^2 + z_x^2}$~~

~~$z_x = -2(x_y - x_x) \Rightarrow |\overrightarrow{XY}| = \sqrt{\frac{z_x^2}{4} + z_x^2 + (y_y - y_x)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}z_x^2 + (y_y - y_x)^2}$~~

~~$(x_y - x_x) = -\frac{z_x}{2}$ т.к $X \in SF$, то $x_x = 0$~~

т.к. $\overrightarrow{XY} \perp \vec{n}$, то $\overrightarrow{XY} \cdot \vec{n} = 0$ $\quad 2x_y + z_x = 0 \Rightarrow z_x = -2x_y$ (1)

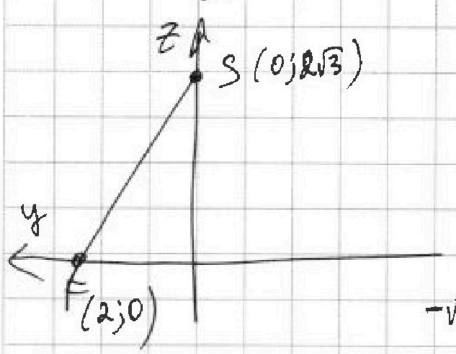
Длина: $|\overrightarrow{XY}| = \sqrt{x_y^2 + (y_y - y_x)^2 + z_x^2} = \sqrt{5x_y^2 + (y_y - y_x)^2}$ (2)



Прямая AD в пл-ти XoY имеет вид:

$1 = -\sqrt{3}k$ $\quad k = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$, тогда точка Y имеет связь координат: $\sqrt{3}y_y = -x_y$ (3)



Прямая SF в пл-ти ZoY имеет вид: $2\sqrt{3} = b$ $\quad 0 = 2k + b$

$k = -\frac{b}{2} = -\sqrt{3}$

$z = -\sqrt{3}y + 2\sqrt{3}$, тогда координаты точки X уд-т условию:

$-\sqrt{3}y_x + 2\sqrt{3} = z_x$ (4)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Имеем: $|\vec{XY}| = \sqrt{5x_y^2 + (y_y - y_x)^2}$

$$\begin{cases} z_x = -2x_y \\ \sqrt{3}\,y_y = -x_y \\ -\sqrt{3}\,y_x + 2\sqrt{3} = z_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,y_y = -x_y \quad \Rightarrow \quad x_y = -\sqrt{3}\,y_y \ (2)^* \\ -\sqrt{3}\,y_x + 2\sqrt{3} = -2x_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_y = \dfrac{\sqrt{3}\,y_x - 2\sqrt{3}}{2} \\ y_y = \dfrac{-x_y}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow y_y = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,y_x}{2\sqrt{3}} = \frac{2 - y_x}{2}$$

$$\Rightarrow 2y_y = 2 - y_x \Rightarrow y_x = 2(1 - y_y) \ (1)^*$$

Подставим $(1)^*$ и $(2)^*$ в $|\vec{XY}|$:

$$|\vec{XY}| = \sqrt{5 \cdot 3y_y^2 + (y_y - 2(1 - y_y))^2} = \sqrt{15y_y^2 + (y_y - 2 + 2y_y)^2} =$$

$$= \sqrt{15y_y^2 + (3y_y^2 - 2)^2} = \sqrt{15y_y^2 + 9y_y^2 - 12y_y + 4} = \sqrt{24y_y^2 - 12y_y + 4}$$

минимум достигается в вершине параболы (под корнем), т.е. $y_y = \frac{12}{2 \cdot 24} = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ минимальная длина XY:

$$|\vec{XY}| = \sqrt{\cancel{24}^{3} \cdot \frac{1}{\cancel{16}_{2}} - \cancel{12}^{3} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} + 4} = \sqrt{1{,}5 + 4 - 3} = \sqrt{2{,}5} = 5\sqrt{0{,}1} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

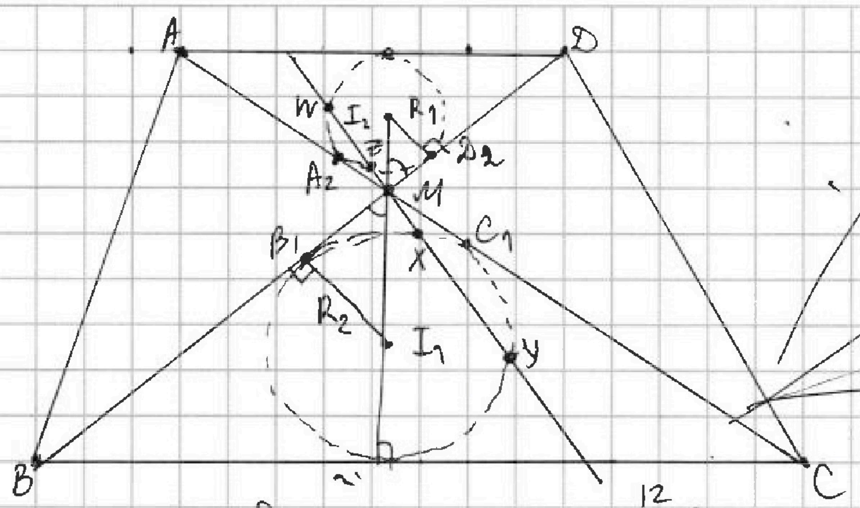
Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{2}$

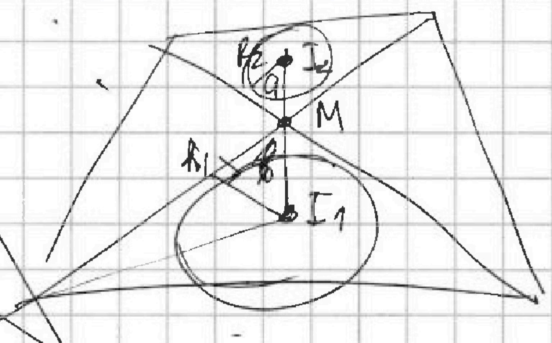
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

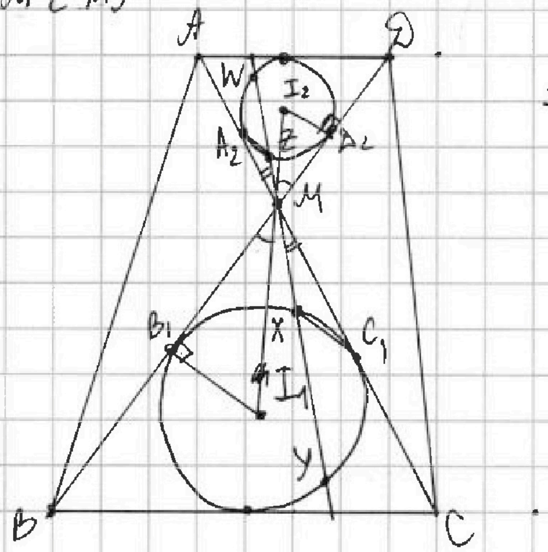
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





$2AD = BC$

$MZ \cdot MY = 5$



$\cancel{48}^{12} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} - 16\sqrt{1-\frac{3}{4}} - 41 =$

$= 36 - \frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{2}} - 41 < 0$

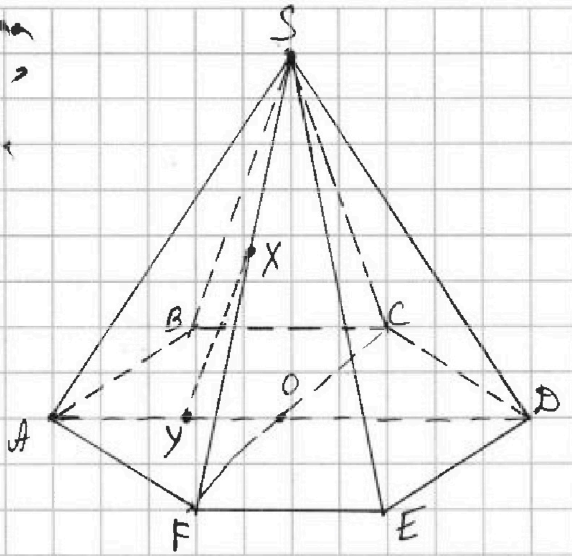
$48 - 41 > 0$

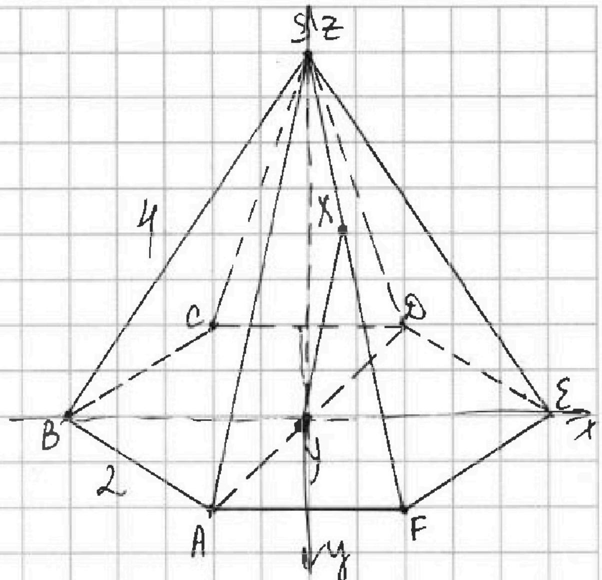
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





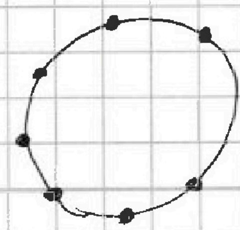
$x \cdot \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$ $\quad 4\ln 2 \cdot x + 3\ln 2 \cdot y + 3\ln 2 \cdot z + \cancel{z}\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$x \cdot \ln 4 + x \ln 4 + y \ln 2 + y \ln 4 + z \cdot \ln 4 + z \cdot \ln 6 = \ln 6$

$(x+y+z)\ln 4 + (x\ln 4 + y\ln 2 + z\ln 6 - \ln 6) = 0$

$4\ln 2 \cdot x + 3\ln 2 \cdot y + 3\ln 2 \cdot z + \cancel{z}\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$\sqrt{2{,}5} = \sqrt{\frac{25}{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$



$\frac{-496}{5}$
$6{,}6$

$\frac{-525}{5}$
$\frac{-496}{5}$
66

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5-4\cdot\sin\frac{3\pi}{14}-4\cdot\cos\frac{\pi}{7}+5\cdot\sin\frac{\pi}{14}=5-4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{14}\right)-4\cdot\cos\frac{\pi}{7}+5\cdot\sin\frac{\pi}{14}=$

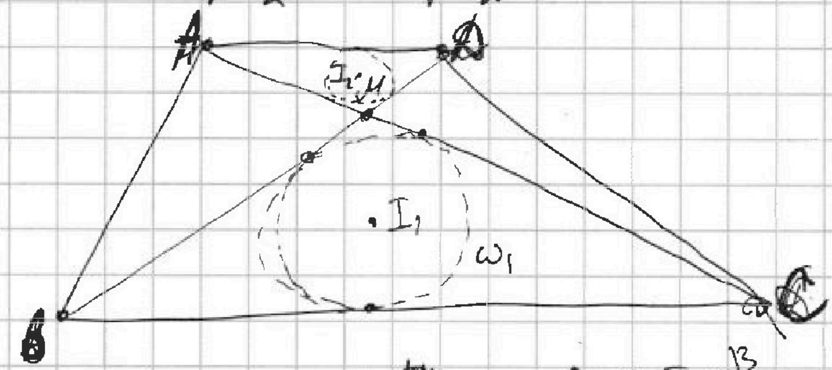
$=5-4\cdot\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{14}+4\cdot\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{\pi}{7}-4\cdot\cos\frac{\pi}{7}+5\cdot\sin\frac{\pi}{14}=$

$\frac{\pi}{7}=a \quad \frac{\pi}{14}=\frac{a}{2}$ / $\sin^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}=1$ $\quad \cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}=2\cos^2\frac{a}{2}-1$

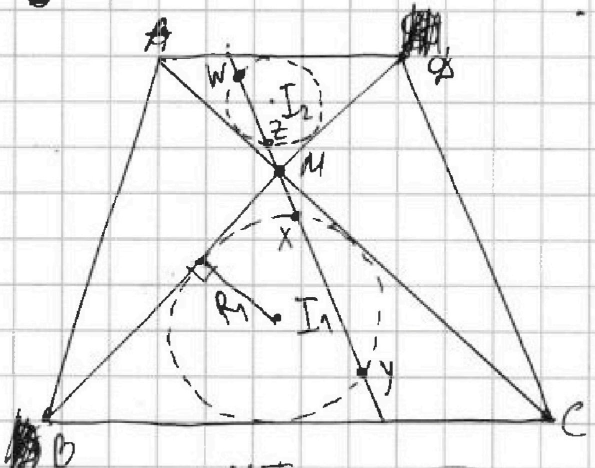
$=5-4\cdot\sin a\cdot\cos\frac{a}{2}+4\cdot\sin\frac{a}{2}\cdot\cos a-4\cdot\cos a+5\cdot\sin\frac{a}{2}=$

$=5-4\cdot\sin a\cdot\sqrt{\frac{\cos a+1}{2}}+4\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}\cdot\cos a-4\cdot\cos a+5\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}=$

$=$

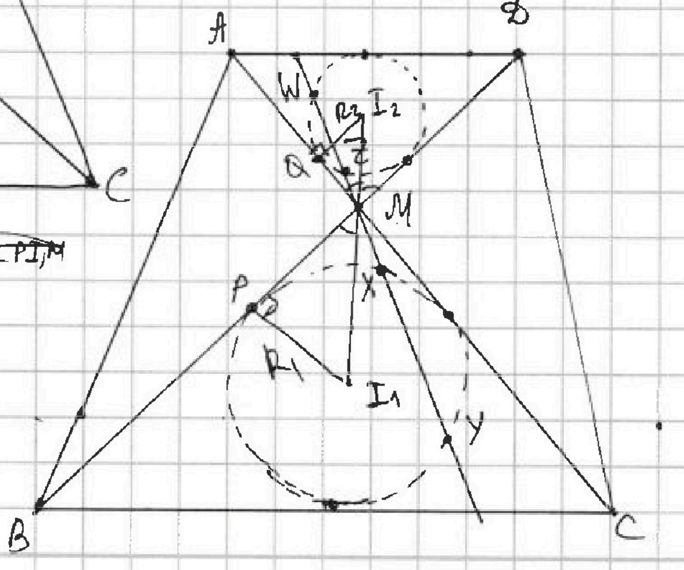


$I_1I_2=\frac{13}{2}$ $\quad MZ\cdot MY=5$



~~$\triangle PMI_1 \sim \triangle QMI_2$~~ ~~$\angle QMI_2=PI_1M$~~

$\triangle I_2QM \sim \triangle I_1PM$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1. $a_1 = 143$, $a_n = a_1 + 2(n-1) = 143 + 2(n-1)$

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S = (n-2)\cdot 180$

$\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n = (n-2)\cdot 180$

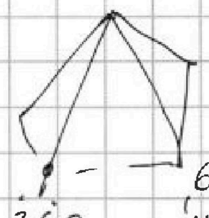
$(286 + 2(n-1))n = 360(n-2)$

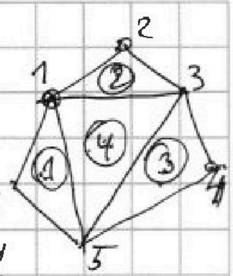
$2n^2 + 284n = 360n - 720$

$2n^2 - 176n + 720 = 0$

$n^2 - 88n + 360 = 0$

$D_1 = 44^2 - 360 =$





$(2\cdot 143 + 2(n-1))n = 2\cdot 180\cdot(n-2)$

$143n + n^2 - n = 180n - 360$

$n^2 + 142n - 180n + 360 = 0$

$n^2 - 38n + 360 = 0$

$x\cdot \ln 16 + y \cdot \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$

$x^2 + y^2 + z^2$

$x \ln 2^4 + y \ln 2^3 + z(\ln 2^3 + \ln 3) = \ln 2 + \ln 3$

$4x \cdot \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + z \ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$5 - 4\cdot \sin\frac{3\pi}{14}$ $4 \cdot \cos\frac{\pi}{7} - 5 \cdot \sin\frac{\pi}{14}$

$\cos\frac{\pi}{7} = a$

$\sin\frac{\pi}{14} = b$

$5 - 4\cdot \sin\left(\frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}\right)$ и $4\cdot\cos\frac{\pi}{7} - 5\cdot \sin\frac{\pi}{14}$

$5 - 4\cdot \sin\left(\frac{\pi}{14}\right)\cdot \cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{14}$ и $4\cdot\cos\frac{\pi}{7} - 5\cdot\sin\frac{\pi}{14}$

$5 - 4\cdot b \cdot a - \sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}$ и $4\cdot a - 5b$

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\cdot 2\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2}$

$\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$