МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{3\pi}{14}$ или $4\cos\dfrac{\pi}{7} - 5\sin\dfrac{\pi}{14}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180(n-2)$ градусов, а сумма ар. прог. с 1-м членом 143, шагом 2 ~~равна~~ и n элементами равна $143n + n(n-1)$.

$180n - 360 = 143n + n^2 - n$

$n^2 - 38n + 360 = 0$

$(n-18)(n-20) = 0$

Тогда наиб. кол-во вершин (равное кол-ву углов) при $n = 20$.

Ответ: 20.

2. $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$

$4x\ln 2 + 3y\ln 2 + 3z\ln 2 + z\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$4x + 3y + 3z - 1 = (1-z)\frac{\ln 3}{\ln 2} = (1-z)\log_2 3$

Т.к. $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$ (иначе $2^p = 3^q$ для ~~каких-то~~ ~~$p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}$~~ ~~каких-то~~,

каких-то $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, чего не может быть по ОТА),

равенство возможно лишь при $1 - z = 0$, т.е. $z = 1$, а

$4x + 3y + 3 - 1 = 0$, т.е. $3y = -2(2x+1)$.

Заметим, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$ (иначе $y \notin \mathbb{Z}$ или $x \notin \mathbb{Z}$ (соотв.)), при этом $y \vdots 2$, тогда $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + 1 \geqslant 1^2 + 2^2 + 1 = 6$, при этом равенство достигается при $y = -2$, $x = 1$.

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3. Пусть $M = \{a, a+1, \dots, a+6\}$, $a \in \mathbb{N}$. Мин. сумма 6-ти чисел из M равна $a+(a+1)+\dots+(a+5)$, а макс. сумма — $(a+1)+(a+2)+\dots(a+6)$. Тогда $p-q \leq (a+1)+(a+2)+\dots+(a+6) - (a+(a+1)+\dots+(a+5)) = 6$, при этом $p>q$. Заметим, что $p \neq 2, 3$ и $q \neq 2, 3$ (иначе $p^2-q^2 \not\vdots\, 2$ или $p^2-q^2 \not\vdots\, 3$).

Тогда $p-q \,\vdots\, 2$, т.е. $p=q+2$ или $p=q+4$ или $p=q+6$.

Но при $p=q+6$ $p^2-q^2 = 6(2q+6) \not\vdots\, 9$, поэтому такого быть не может.

Осталось два случая: 1) $p=q+2$, 2) $p=q+4$

1) $(q+2)^2-q^2=792$

$2(2q+2)=792$

$q+1=198$

$q=197$, $p=199$. Такой вариант возможен при $a=30$, поскольку $199=30+31+33+34+35+36$,

$197=30+31+32+33+35+36$.

2) $(q+4)^2-q^2=792$

$4(2q+4)=792$

$q+2=99$

$q=97$, $p=101$. Тогда $(a+1)+(a+2)+\dots+(a+6)=6a+21 \geq p=101$, а также $a+(a+1)+\dots+(a+5)=6a+15 \leq q=97$. Тогда $40 \leq 3a \leq 41$, чего не может быть при $a \in \mathbb{N}$.

Ответ: $M=\{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4. Т.к. $AD \parallel BC$, $\triangle AMD \sim \triangle CMB$ с коэф. $\frac{1}{2}$. ~~Рассм. прям. l, содержащую бис. $\angle BMC$.~~ Тогда $I_1 \in l$.

$\angle I_2MA = \frac{1}{2}\angle AMD = \frac{1}{2}\angle BMC = \angle I_1MC$, т.е.

I_1, I_2 и M лежат на одной прям. Т.к. при поворотной гомотетии с центром в M на 180° и коэф. 2 $\triangle ADM$ переходит в $\triangle CBM$, I_2M перейдет в I_1M, т.е.

$I_2M = \frac{1}{2} I_1M$. Тогда $\frac{13}{2} = I_1I_2 = \frac{3}{2} I_1M \Rightarrow$

$\Rightarrow I_1M = \frac{13}{3}$. Аналогично при гомотетии MZ перейдет в MX, т.е. $MX = \frac{1}{2}MZ$. Тогда $MX \cdot MY = 10$. Рассм.

$T \in MC$ — точка касания ω_1 прямой MC. $\angle MTI_1 = 90^\circ$,

тогда $MT^2 = MI_1^2 - R^2 = \frac{169}{9} - R^2$, где R — радиус ω_1. По теор. о сек. и кас.

$MX \cdot MY = MT^2$, т.е. $10 = \frac{169}{9} - R^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{79}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5. Пусть $\frac{\pi}{14}=\alpha$. Тогда ~~$5-4\sin 3\alpha$~~ слева

$5-4\sin 3\alpha = 5-4(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=16\sin^3\alpha-12\sin\alpha+5$,

а справа

$4\cos 2\alpha-5\sin\alpha = 4(1-2\sin^2\alpha)-5\sin\alpha=-8\sin^2\alpha-5\sin\alpha+4$

$16\sin^3\alpha-12\sin\alpha+5 \vee -8\sin^2\alpha-5\sin\alpha+4$

$16\sin^3\alpha+8\sin^2\alpha-7\sin\alpha+1 \vee 0$

$(\sin\alpha+1)(4\sin\alpha-1)^2 \vee 0$

Т.к. $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$, $\sin\alpha\geq 0$, тогда $\sin\alpha+1>0$.

Докажем, что $\sin\alpha\neq\frac{1}{4}$ от противного.

$\sin 7x = 7\cos^6 x\sin x-35\cos^4 x\sin^3 x+7\cos^2 x\sin^5 x-\sin^7 x$

Если $\sin\alpha=\frac{1}{4}$, то, т.к. $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$, $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$. Тогда

$1=\sin\frac{\pi}{2}=$ ~~$\sin(7\cdot\frac{\pi}{2})$~~ $\sin(7\cdot\frac{\pi}{14})=7\cdot\frac{15^3}{4^7}-35\cdot\frac{15^2}{4^7}+7\cdot\frac{15}{4^7}-\frac{1}{4^7}$

$4^7=7\cdot15^3-35\cdot15^2+7\cdot15-1 \,\not\vdots\, 2$, противоречие.

Значит, $(4\sin\alpha-1)^2>0$, тогда и $(\sin\alpha+1)(4\sin\alpha-1)^2>0$.

Ответ: выражение слева больше.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

6. Рассм. кол-во пирамид с кол-вом вершин ≥ 5. ~~Тогда~~ В основании такой пирамиды хотя бы 4 вершины, при этом они лежат в одной плоскости, т.е., из условия, лежат в α. Если мы из 7 вершин из α выберем n, $n \geq 4$, а также выберем одну из 5 оставшихся вершин, что по ним однозначно задается выпуклая пирамида — n точек обязаны быть основанием, при этом n точек на окр. образуют лишь 1 выпуклый n-угольник, — точки должны следовать по/против часовой стрелки отн. центра окр. Выбрать $n \geq 4$ точек из 7 можно $C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7$ способами, а одну из пяти точек — пятью. Итого $5\left(\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} + \frac{7\cdot6}{2} + 7 + 1\right) = 5(35+21+8) = 320$ пирамид с ≥ 5 вершинами. Осталось посчитать пирамиды с 4 верш. Их обр. любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Четверок точек всего C_{12}^4, а леж. в одной плоскости — т.е. в α — C_7^4. Итого $C_{12}^4 - C_7^4 = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2} - \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = 5\cdot99 - 7\cdot5 = 5\cdot92 = 460$ четверок, не леж. в одной плоскости. Тогда всего пирамид $320+460=780$. $\boxed{\text{Ответ: } 780}$

$|(1-\alpha)\vec{x}+(-\alpha\vec{y})|^2 = 4(1-\alpha)^2+4\alpha^2+4(1-\alpha)\alpha$

$|\vec{YX}|^2 = 4-8\alpha+4\alpha^2+4\alpha^2+4\alpha-4\alpha^2+12\alpha^2 = 16\alpha^2-4\alpha+4$, минимум при $\alpha = -\frac{-4}{2\cdot 16} = \frac{1}{8} \in (0;1)$ и равен $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+4 = \frac{15}{4}$,

$|\vec{YX}| = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

При $\alpha<0$ или $\alpha>1$ угол между $(1-\alpha)\vec{x}$ и $(-\alpha\vec{y})$ равен $60°$, тогда $|(1-\alpha)\vec{x}+(-\alpha\vec{y})|^2 = 4(1-\alpha)^2+4\alpha^2-4(1-\alpha)\alpha$,

$|\vec{YX}|^2 = 4-8\alpha+4\alpha^2+4\alpha^2-4\alpha+4\alpha^2+12\alpha^2 = 24\alpha^2-12\alpha+4$,

Вершина параболы в $\alpha=\frac{1}{4}\in(0;1)$, значит минимума ~~достигается при~~ при $\alpha\notin[0;1]$ нет, однако знач. в каждой точке из $\alpha\notin[0;1]$ не ~~больше~~ меньше знач. в $\alpha=0$, т.е. 4. Тогда при $\alpha\notin[0;1]$ $|\vec{YX}| \geq 2$.

Тогда при любых α мин. при $\alpha=\frac{1}{8}$, и равен он $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

7. Обозначим центр шестиугольника O, $\vec{OF}=\vec{x}$, $\vec{OA}=\vec{y}$, ~~$\vec{OS}=\vec{z}$~~.
$\vec{OS}=\vec{z}$. Тогда $\vec{OX}=\vec{OF}+\alpha\vec{FS}=\vec{x}+\alpha(\vec{z}-\vec{x})$,
$\vec{OY}=\beta\vec{OA}=\beta\vec{y}$ для некоторых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$\vec{YX}=(1-\alpha)\vec{x}-\beta\vec{y}+\alpha\vec{z}$.

$\vec{BA}=\vec{x}$, $\vec{AS}=\vec{z}-\vec{y}$. ~~Если~~ $YX\parallel SAB \Leftrightarrow \vec{YX}$ лежит в плоскости, порожденной векторами $\vec{BA}$ и $\vec{AS}$, т.е. $\exists\lambda,\omega\in\mathbb{R}$: $\vec{YX}=\lambda\vec{BA}+\omega\vec{AS}$.

$(1-\alpha)\vec{x}-\beta\vec{y}+\alpha\vec{z}=\lambda\vec{x}-\omega\vec{y}+\omega\vec{z}$

$(1-\alpha-\lambda)\vec{x}-(\beta-\omega)\vec{y}+(\alpha-\omega)\vec{z}=0$

Т.к. $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ линейно независимы ($S\notin OAF$),
$(1-\alpha-\lambda)\vec{x}-(\beta-\omega)\vec{y}+(\alpha-\omega)\vec{z}=0 \Leftrightarrow \lambda=1-\alpha,\ \beta=\omega,\ \alpha=\omega$,
т.е. $\alpha=\beta$, при этом для любого α и $\beta=\alpha$ $\exists\lambda,\omega$: $\lambda=1-\alpha$, $\omega=\alpha$. Тогда задача сводится к поиску такого α, что $|\vec{YX}|=|(1-\alpha)\vec{x}-\alpha\vec{y}+\alpha\vec{z}|$ минимален.

Т.к. $\vec{z}\perp OAF$, $|(1-\alpha)\vec{x}-\alpha\vec{y}+\alpha\vec{z}|^2=|(1-\alpha)\vec{x}-\alpha\vec{y}|^2+|\alpha\vec{z}|^2=$
$=|(1-\alpha)\vec{x}-\alpha\vec{y}|^2+\alpha^2\cdot OS^2$. По теор. Пифагора $OS^2=4^2-2^2=12$.
($OF=AF$ т.к. $ABCDEF$ правильный).

Если $\alpha=1$, то $|\vec{YX}|^2=|-\alpha\vec{y}|^2+12\alpha^2=4+12=16$, $|\vec{YX}|=4$

Если $\alpha=0$, то $|\vec{YX}|^2=|\vec{x}|^2=4$, $|\vec{YX}|=2$.

Если $\alpha\in(0;1)$, то угол между $(1-\alpha)\vec{x}$ и $-\alpha\vec{y}$ равен 120°.
Тогда, по теор. косинусов,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\vec{9\alpha} = \vec{a} + \alpha(\vec{c} - \vec{a})$

$\vec{9x} = \alpha\vec{b}$

$\vec{yx} = (1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b} + \alpha\vec{c}$

$|\alpha\vec{c}|^2 = 12\alpha^2$

$4((1-\alpha)^2 + \alpha^2 \pm \alpha(1-\alpha))$

$4(2\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 3\alpha^2 \pm (\alpha - \alpha^2))$

$\cancel{6\alpha^2 - 2\alpha + 1}$

$\cancel{6\alpha^2 - 2\alpha + 1}$

$6\alpha^2 - 3\alpha + 1$

$\alpha_0 = \frac{1}{4}$

$\frac{6}{4} - 3 + 4 = \frac{10}{4}$

$\cancel{5\alpha^2 - \alpha + 1}$

$4\alpha^2 - \alpha + 1$

$\alpha_0 = \frac{1}{8}$

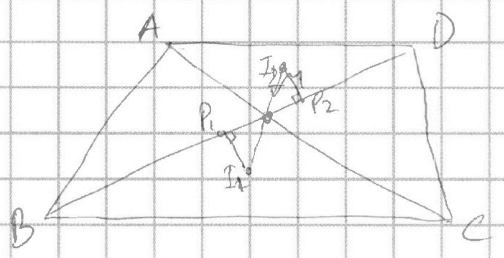
$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 4 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\sin\frac{\pi}{14} < \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cancel{\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} =$

$MI_1 = 2MI_2$

$\frac{13}{2} = I_1I_2 = 3MI_2$

$MI_2 = \frac{13}{6}, \quad MI_1 = \frac{13}{3}$

$MZ \cdot MY = 5$

$MX \cdot MY = MP_1^2 = MI_1^2 - R_1^2$

$\cancel{MX = 2MY}$

$MX = 2MZ$

$MY = 2MW$

$R_1 = 2R_2$

$MX \cdot MY = 10 = MI_1^2 - R_1^2 = \frac{169}{9} - R_1^2$

$R_1^2 = \frac{169}{9} - \frac{90}{9} = \frac{79}{9}$

$R_1 = \frac{\sqrt{79}}{3}$

$\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}$ $\frac{\pi}{7} = \alpha$

$\sin\alpha > 0$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$5 - 12\sin\alpha + 16\sin^3\alpha \lor 4 - 8\sin^2\alpha - 5\sin\alpha$

$1 - 7\sin\alpha + 8\sin^2\alpha + 16\sin^3\alpha \lor 0$

$0 = \sin\left(3\cdot\frac{\pi}{3}\right) = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} = 0$

$5 - 4\sin(3\alpha) = 5 - 12\sin\alpha + 16\sin^3\alpha$

$4\cos 2\alpha - 5\sin\alpha = 4(1 - 2\sin^2\alpha) - 5\sin\alpha = 4 - 8\sin^2\alpha - 5\sin\alpha$

$1 - 12\sin\alpha + 16\sin^3\alpha \lor -8\sin^2\alpha - 5\sin\alpha$

$16\sin^3\alpha + 8\sin^2\alpha - 7\sin\alpha + 1 \lor 0$

$\cancel{\sin\alpha}\,(\sin\alpha + 1)(16\sin^2\alpha - 8\sin\alpha + 1) \lor 0$

$(\sin\alpha + 1)(4\sin\alpha - 1)^2$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

$2\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \cos\frac{\pi}{6}$

$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sin\frac{\pi}{14} = \frac{1}{4}$

$\cos\frac{\pi}{14} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\cos\frac{\pi}{7} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ $\quad \sin\frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{15}}{8}$ $\cancel{\cos\frac{2\pi}{7}} =$

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{4}{7} < \frac{2}{3}$

$\frac{7}{8} \vee \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad 12 \vee 14$

$7 \vee 4\sqrt{3}$

$49 \vee 48$

$2\alpha\sqrt{3} + 2\sqrt{2\alpha^2 - \alpha + (\alpha-1)^2} =$

$= 2\left(\alpha\sqrt{3} + \sqrt{3\alpha^2 - 3\alpha + 1}\right)$

$2\sqrt{3}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{3}}\right)$

$\alpha + \alpha^2 -$

$\sin 7\alpha = 7\cos^6\alpha \sin\alpha - 30\cos^4\alpha \sin^3\alpha + 7\cos^2\alpha \sin^5\alpha$

$1 = \sin\frac{\pi}{2} = 7 \cdot \frac{3^3}{4^7} - 30\frac{3^2}{4^7} + 7 \cdot \frac{3}{4^7}$

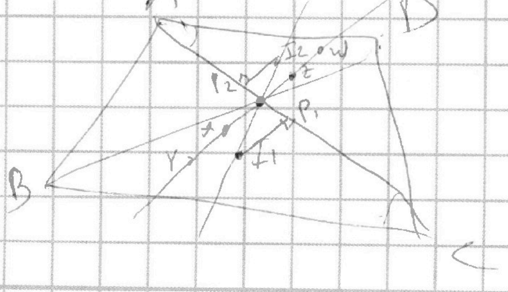
$2^{14} = 7 \cdot 15^3 - 2 \cdot 15^3 + 7 \cdot 15 - 1 = 15(5 \cdot 15^2 + 7) - 1 =$

$=$

$1 - \frac{2\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{3}}} = 0$

$\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{3} = (\alpha - \frac{1}{2})^2 = \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times\ 15 \\ \hline 375 \\ 75 \\ \hline 1125 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cancel{1125} \\ 1132 \\ \times\ 15 \\ \hline 5660 \\ 1132 \\ \hline 16980 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16979 \\ \\ 4096 \\ \times\ 4 \\ \hline 16384 \end{array}$$



$1 - \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{\sqrt{(\alpha - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12}}} > 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

$C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7=\frac{7\cdot6\cdot5}{6}+\frac{7\cdot6}{2}+7+1=35+21+7+1=64$

$64\cdot5=320$

$2\alpha\beta$

$C_{12}^4-C_7^4=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot6}-\frac{7\cdot6\cdot5}{6}=11\cdot5\cdot9-7\cdot5=$

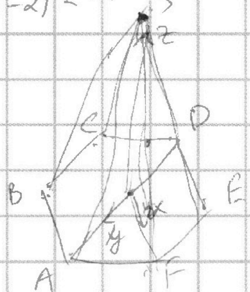
$=5(99-7)=5\cdot92=$

$=460$

780

$\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

$2\sqrt{\alpha^2+(1-\alpha)^2-\alpha(1-\alpha)}$



$\overrightarrow{OX}=\alpha\vec{y}$,

$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OF}+\beta\overrightarrow{FS}$

$=2\vec{x}+$

$\frac{12}{2\cdot24}=\frac{1}{4}$

$\overrightarrow{OA}=\vec{y}$, $\overrightarrow{OF}=\vec{x}$, $\overrightarrow{OZ}=\vec{z}$

$\overrightarrow{OB}=\vec{y}-\vec{x}$

$\overrightarrow{BA}=\vec{x}$

$\overrightarrow{AS}=\vec{z}-\vec{y}$

$\overrightarrow{OX}=\alpha\vec{x}$,

$\overrightarrow{OY}=\alpha\vec{y}$

$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FX}=\vec{x}+\beta(\vec{z}-\vec{x})$

$\overrightarrow{YX}=\vec{x}+\beta\vec{z}-\beta\vec{x}-\alpha\vec{y}$

$\overrightarrow{YX}=\lambda\overrightarrow{BA}+\omega\overrightarrow{AS}$

$\alpha>1$ $\alpha=1$

$\alpha<0$

$(1-\beta)\vec{x}+\beta\vec{z}-\alpha\vec{y}=\lambda\vec{x}+\omega\vec{z}-\omega\vec{y}$

$(\lambda+\beta-1)\vec{x}+(\omega-\beta)\vec{z}+(\alpha-\omega)\vec{y}=0$

$\lambda+\beta=1$

$\alpha=\beta$

$|\alpha\vec{y}+(1-\alpha)\vec{x}+\beta\vec{z}|$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$180^\circ(n-2) = \frac{143^\circ + 143^\circ + 2(n-1)}{2} n$

$180n - 360 = 143n + n^2 - n$

$n^2 - 38n + 360 = 0$

$(n-18)(n-20) = 0$

$n = 20$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$\sin\frac{\pi}{14} = \frac{1}{4}$

$\cos\frac{\pi}{14} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{15}}{8} \vee \frac{1}{2}$

$\sqrt{15} \vee 4$

$15 < 16$

$\sin\frac{\pi}{7} < \sin\frac{\pi}{6}$

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$

$x^2 + y^2 + z^2 \to \min$

$4x\ln 2 + 3y\ln 2 + 3z\ln 2 + z\ln 3 = \ln 2 + \ln 3$

$(4x + 3y + 3z - 1)\ln 2 = (1 - z)\ln 3$

$\sin 7\alpha = 7\cos^6\alpha\sin\alpha - 35\cos^4\alpha\sin^3\alpha + 21\cos^2\alpha\sin^5\alpha$

$\alpha\ln 2 = \ln 3$

$7\left(1-\frac{1}{16}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} - 35\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{13}$

$\frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3$

$z = 1$

$2^{\frac{p}{q}} = 3$

$4x + 3y = -2$

$2^p = 3^q$

$-3y = 2(2x+1)$

$2x + 1 \vdots 3$

$2x \equiv_3 -1$

$x \equiv_3 1$

$x = 3k + 1$

$-3y = 2(6k+3)$

$y = -4k - 2$

$x^2 + y^2 = (3k+1)^2 + (4k+2)^2 = 25k^2 + 22k + 5$

$-\frac{22}{2\cdot 25} = -\frac{11}{25}$

$x = 1$
$y = -2$

$\ln 16 - \ln 64 + \ln 24 = \ln\left(\frac{16\cdot 24}{64}\right) = \ln\left(\frac{24}{4}\right) = \ln 6$

$\cos\frac{\pi}{7} = \frac{7}{8}$

$\sin\frac{2\pi}{7} = \frac{7\sqrt{15}}{32}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$1 + 4 + 1 = 6$

$\frac{7\sqrt{15}}{32} \vee \frac{\sqrt{3}}{2}$

$7\sqrt{5} \vee 16$

$49 \cdot 5 \vee 256$

$5 - 125\sin\alpha + 169\sin$

$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$

$\frac{12}{16} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(p-q)(p+q) \vdots 792$

$(p-q)(p+q) \vdots$

$p>q$

$\sin\frac{\pi}{14}=\frac{1}{4}$

$\cos\frac{\pi}{7}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

$\sin(\frac{2\pi}{14})=$

$=3\cos^2\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14}-\sin^3\frac{\pi}{14}=$

$\frac{a+a+5}{2}6\le 197\le\frac{a+1+a+6}{2}6$

$3(2a+5)\le 197$

$2a+5 < \frac{198}{3}=66$

$a\le 30$

$3(2a+7)\ge 197$

$3(2a+7)\ge 198$

$2a+7\ge 66$

$2a\ge 59$

$a\ge 30$

$14 \cdot 6 = 84$

$6a+27=$

$6a+21 \ge 101$

$6a\le 84$

$a\le 14$

$6a+21\le 97$

$67, 69$

$5-\frac{7}{4} \vee \frac{7}{2}-\frac{5}{4}$

$20-7 \vee 14-5$

$13 \vee 9$

$p\le q+6$

$p=q+2 \vee q+4 \vee q+6$

$2(2q+2)=792$

$q+1=198$

$q=197$

$4(2q+4)=792$

$q+2=99$

$q=97$

$6(2q+6)=792$

$2q+6 \vdots 3$

$q \vdots 3$

$6a\ge 84$

$3a\ge 40$

$a\ge\frac{42}{3}=14$

$6a\le 82$

$3a\le 41$

$14+15+16+17+18+19+20=\frac{20+14}{2}\cdot 7=17\cdot 7=119$

$30, 31, 32, 33, 34, 35, 36$

$\frac{30+36}{2}\cdot 7=33\cdot 7=231$

$30+31+32+33+35+36=197$

$30+31+33+34+35+36=199$

$1+\dots 6=21$

$15\cdot 6$

$15+16+\dots+20=15\cdot 6+$

$a\ge\frac{90}{6}=15$