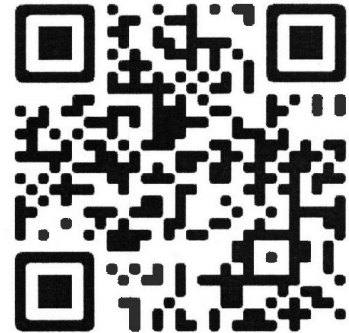




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Сумма углов выпуклого n -угольника равна

$180(n-2)$ градусов, а сумма ар. прогр. с n -м членом 143 ,

с шагом 2 равна n элементов равна

$$143n + n(n-1)$$

$$180n - 360 = 143n + n^2 - n$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$(n-18)(n-20) = 0$$

~~В~~ Точка кас. кол-во вершин (равное кол-ву углов)

при $n = 20$.

Ответ: 20.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \quad x \ln 6 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + 2 \ln 3 = \ln 2 + \ln 3$$

$$4x + 3y + 3z - 1 = (1-z) \frac{\ln 3}{\ln 2} = (1-z) \log_2 3$$

Т.к. $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$ (иначе $2^p = 3^q$ для $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}$, ~~каких-то~~ ~~каких-то~~),

каких-то $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, чего не может быть по ОГА),
равенство возможно лишь при $1-z=0$, т.е. $z=1$, а

$$4x + 3y + 3 - 1 = 0, \text{ т.е. } 3y = -2(2x+1).$$

Заметим, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$ (иначе $y \notin \mathbb{Z}$ или $x \notin \mathbb{Z}$ соответственно),

при этом $y \leq -2$, тогда $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + 1 \geq 1 + 2^2 + 1 = 6$,

при этом равенство достигается при $y = -2, x = 1$.

Ответ: 6.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. Пусть $M = \{a, a+1, \dots, a+6\}$, $a \in \mathbb{N}$. Мин. сумма 6-ти чисел из M равна $a+(a+1)+\dots+(a+5)$, а макс. сумма $(a+1)+(a+2)+\dots+(a+6)$. Тогда $p-q \leq (a+1)+(a+2)+\dots+(a+6) - (a+(a+1)+\dots+(a+5)) = 6$, при этом $p > q$. Заметим, что $p \neq 2, 3$ и $q \neq 2, 3$ (иначе $p^2 - q^2 \leq 2$ или $p^2 - q^2 \leq 3$). Тогда $p - q \in \{2, 4, 6\}$, т.е. $p = q+2$ или $p = q+4$ или $p = q+6$. Но при $p = q+6$ $p^2 - q^2 = 6(2q+6) \geq 9$, поэтому такого быть не может.

Остаток два случая: 1) $p = q+2$, 2) $p = q+4$

$$1) (q+2)^2 - q^2 = 792$$

$$2(2q+2) = 792$$

$$q+1 = 198$$

$$q = 197, p = 199. \text{ Такой вариант возможен при } a=30,$$

$$\text{поскольку } 199 = 30+31+33+34+35+36,$$

$$197 = 30+31+32+33+35+36.$$

$$2) (q+4)^2 - q^2 = 792$$

$$4(2q+4) = 792$$

$$q+2 = 99$$

$$q = 97, p = 101. \text{ Тогда } (a+1)+(a+2)+\dots+(a+6) = 6a+21 \geq p = 101,$$

$$\text{а также } a+(a+1)+\dots+(a+5) = 6a+15 \leq q = 97. \text{ Тогда}$$

$$40 \leq 3a \leq 41, \text{ чего не может быть при } a \in \mathbb{N}.$$

Ответ: $M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Т.к. $AD \parallel BC$, $\triangle AMD \sim \triangle CMB$ с коэф. $\frac{1}{2}$. Рассм. ~~прям.~~

l_1 содержащую бис. $\angle BMC$. Тогда $I_1 \in l_1$. ~~$I_2 \in l_1$~~

$$\angle I_2 M A = \frac{1}{2} \angle AMD = \frac{1}{2} \angle BMC = \angle I_1 M C, \text{ т.е.}$$

I_1, I_2 и M лежат на одной прямой. Т.к. при повороте ϵ гомотетии с центром в M на 180° и коэф. 2 $\triangle ADM$ переходит в $\triangle CBM$, $I_2 M$ перейдет в $I_1 M$, т.е.

~~$I_2 M = \frac{1}{2} I_1 M$~~

$$I_2 M = \frac{1}{2} I_1 M. \text{ Тогда } \frac{13}{2} = I_1 I_2 = \frac{3}{2} I_1 M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 M = \frac{13}{3}. \text{ Аналогично при гомотетии } * MZ \text{ перейдет}$$

$$\text{в } MX, \text{ т.е. } MX = \frac{1}{2} MZ. \text{ Тогда } MX \cdot MY = 10. \text{ Рассм.}$$

$T \in MC$ — точка касания ω_1 прямой MC . $\angle MT I_1 = 90^\circ$,

~~тогда~~

$$\text{тогда } MT^2 = MI_1^2 - R^2 = \frac{169}{9} - R^2, \text{ где } R -$$

радиус ω_1 . По теор. о сек. и кас.

$$MX \cdot MY = MT^2, \text{ т.е. } 10 = \frac{169}{9} - R^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{79}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. Пусть $\frac{\pi}{4} = \alpha$. Тогда $5 = 4 \sin^3 \alpha = \sin 3\alpha$

$$5 - 4 \sin^3 \alpha = 5 - 4(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) = 16 \sin^3 \alpha - 12 \sin \alpha + 5,$$

а справа

$$4 \cos^2 \alpha - 5 \sin^2 \alpha = 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) - 5 \sin^2 \alpha = -8 \sin^2 \alpha - 5 \sin^2 \alpha + 4$$

$$16 \sin^3 \alpha - 12 \sin \alpha + 5 \quad \vee \quad -8 \sin^2 \alpha - 5 \sin^2 \alpha + 4$$

$$16 \sin^3 \alpha + 8 \sin^2 \alpha - 7 \sin \alpha + 1 \quad \vee \quad 0$$

$$(\sin \alpha + 1)(4 \sin \alpha - 1)^2 \quad \vee \quad 0$$

Т.к. $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin \alpha \geq 0$, тогда $\sin \alpha + 1 > 0$.

Докажем, что $\sin \alpha \neq \frac{1}{4}$ от противного.

$$\sin 7x = 7 \cos^6 x \sin x - 30 \cos^4 x \sin^3 x + 7 \cos^2 x \sin^5 x - \sin^7 x$$

Если $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, то, т.к. $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Тогда

$$1 = \sin \frac{\pi}{2} = \sin(7 \cdot \frac{\pi}{14}) = \sin(7 \cdot \alpha) = 7 \cdot \frac{15^3}{4^7} - 30 \cdot \frac{15^2}{4^7} + 7 \cdot \frac{15}{4^7} - \frac{1}{4^7}$$

$$4^7 = 7 \cdot 15^3 - 30 \cdot 15^2 + 7 \cdot 15 - 1 \quad \vee \quad 2, \text{ противоречие.}$$

Значит, $(4 \sin \alpha - 1)^2 > 0$, тогда и $(\sin \alpha + 1)(4 \sin \alpha - 1)^2 > 0$.

Ответ: Выражение слева больше.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6. Рассм. кол-во пирамид с кол-вом вершин ≥ 5 . Тогда

В основании такой пирамиды хотя бы 4 вершины, при этом они лежат в одной плоскости, т.е., из условия, лежат в α . Если мы из 7 вершин изх выберем n , $n \geq 4$, а также выберем одну из 5 оставшихся вершин, то по ним однозначно задается выпуклая пирамида — и точек обязаны быть основанием, при этом n точек ^{на окр.} образуют лишь 1 выпуклый n -угольник, — точки должны следовать по/против часовой стрелки отк. центра окр. Выбрать $n \geq 4$ точек из 7 можно

$$\binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} \text{ способами, а одна из пяти точек —}$$

$$\text{пятой. Итого } 5 \left(\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + \frac{7 \cdot 6}{2} + 7 + 1 \right) = 5(35 + 21 + 8) =$$

$$= 320 \text{ пирамид с } \geq 5 \text{ вершинами. Остаток}$$

исчислять пирамиды с 4 верш. Их обр. любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Четверок

точек всего $\binom{7}{4}$, а лежащих в одной плоскости — т.е. в α — $\binom{4}{4}$. Итого $\binom{7}{4} - \binom{4}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} =$

$$= 35 - 7 = 28 \text{ четверок, не лежащих в одной}$$

плоскости. Тогда всего пирамид $320 + 28 = 348$. Ответ: 348



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|((1-\alpha)\vec{x} + (-\alpha)\vec{y})|^2 = 4(1-\alpha)^2 + 4\alpha^2 + 4(1-\alpha)\alpha$$

$$|\vec{x}\vec{x}|^2 = 4 - 8\alpha + 4\alpha^2 + 4\alpha^2 + 4\alpha - 4\alpha^2 + 12\alpha^2 = 16\alpha^2 - 4\alpha + 4, \text{ минимум}$$

$$\text{при } \alpha = -\frac{-4}{2 \cdot 16} = \frac{1}{8} \in (0; 1) \text{ и равен } \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 4 = \frac{15}{4},$$

$$|\vec{x}\vec{x}| = \frac{\sqrt{15}}{2},$$

При $\alpha < 0$ или $\alpha > 1$ угол между $(1-\alpha)\vec{x}$ и $(-\alpha)\vec{y}$ равен

$$60^\circ, \text{ тогда } |((1-\alpha)\vec{x} + (-\alpha)\vec{y})|^2 = 4(1-\alpha)^2 + 4\alpha^2 - 4(1-\alpha)\alpha,$$

$$|\vec{x}\vec{x}|^2 = 4 - 8\alpha + 4\alpha^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 4\alpha^2 + 12\alpha^2 = 24\alpha^2 - 12\alpha + 4,$$

Вершина параболы в $\alpha = \frac{1}{4} \in (0; 1)$, значит минимума

~~достигается при α~~ при $\alpha \notin [0; 1]$ нет, однако

знач. в каждой точке из $\alpha \notin [0; 1]$ не ~~больше~~ меньше знач. в

$\alpha = 0$, т.е. 4. Тогда при $\alpha \notin [0; 1]$ $|\vec{x}\vec{x}| \geq 2$.

Тогда при любых α мин. при $\alpha = \frac{1}{8}$, и равен

$$\text{он } \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7. Обозначим центр шестиугольника O , $\vec{OF} = \vec{x}$, $\vec{OA} = \vec{y}$, $\vec{OE} = \vec{z}$.

Тогда $\vec{OX} = \vec{OF} + \alpha \vec{FE} = \vec{x} + \alpha(\vec{z} - \vec{x})$,

$\vec{OY} = \beta \vec{OA} = \beta \vec{y}$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

~~$\vec{YX} = (1-\alpha)\vec{x} - \beta\vec{y} + \alpha\vec{z}$~~

$\vec{BA} = \vec{x}$, $\vec{AB} = \vec{z} - \vec{y}$. ~~Есть~~ $\exists \lambda, \omega \in \mathbb{R}$ $\vec{YX} \parallel \vec{BA}$ $\Leftrightarrow \vec{YX}$ лежит

в плоскости, порожденной векторами \vec{BA} и \vec{AB} ,

т.е. $\exists \lambda, \omega \in \mathbb{R}$: $\vec{YX} = \lambda \vec{BA} + \omega \vec{AB}$.

$$(1-\alpha)\vec{x} - \beta\vec{y} + \alpha\vec{z} = \lambda\vec{x} - \omega\vec{y} + \omega\vec{z}$$

$$(1-\alpha-\lambda)\vec{x} - (\beta-\omega)\vec{y} + (\alpha-\omega)\vec{z} = 0$$

т.к. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ линейно независимы ($S \notin OAF$),

$$(1-\alpha-\lambda)\vec{x} - (\beta-\omega)\vec{y} + (\alpha-\omega)\vec{z} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1-\alpha, \beta = \omega, \alpha = \omega,$$

т.е. $\lambda = \beta$, при этом для любого α и $\beta = \alpha$

$\exists \lambda, \omega$: $\lambda = 1-\alpha, \omega = \alpha$. Тогда задача сводится к

поиску такого α , что $|\vec{YX}| = |(1-\alpha)\vec{x} - \alpha\vec{y} + \alpha\vec{z}|$ минимален.

$$\begin{aligned} \text{т.к. } \vec{z} \perp OAF, \quad & |(1-\alpha)\vec{x} - \alpha\vec{y} + \alpha\vec{z}|^2 = |(1-\alpha)\vec{x} - \alpha\vec{y}|^2 + |\alpha\vec{z}|^2 = \\ & = |(1-\alpha)\vec{x} - \alpha\vec{y}|^2 + \alpha^2 \cdot OS^2. \text{ По теор. Пифагора } OS^2 = 4 - 2^2 = 12. \end{aligned}$$

($OF = AF$ т.к. $ABCDEF$ правильный).

$$\text{Если } \alpha = 1, \text{ то } |\vec{YX}|^2 = |1-\alpha|^2 + 12\alpha^2 = 4 + 12 = 16, |\vec{YX}| = 4$$

$$\text{Если } \alpha = 0, \text{ то } |\vec{YX}|^2 = |1|^2 = 4, |\vec{YX}| = 2.$$

Если $\alpha \in (0; 1)$, то угол между $(1-\alpha)\vec{x}$ и $-\alpha\vec{y}$ равен 120° .

Тогда, по теор. косинусов,



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\vec{a} + 2(\vec{c} - \vec{a})$$

$$\vec{a} = \alpha \vec{b}$$

$$\vec{a} = (1-\alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b} + 2\vec{c}$$

$$|\alpha\vec{c}| = 2\alpha^2$$

$$4((1-\alpha)^2 + \alpha^2 \pm 2(1-\alpha))$$

$$4(2\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 3\alpha^2 \pm (\alpha - \alpha^2))$$

$$6\alpha^2 - 2\alpha + 1$$

$$6\alpha^2 - 2\alpha + 1$$

$$6\alpha^2 - 3\alpha + 1$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{6}{4} - 3 + 1 = \frac{10}{4}$$

$$5\alpha^2 - \alpha + 1$$

$$4\alpha^2 - \alpha + 1$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

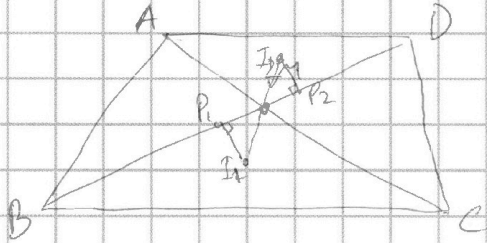


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \frac{\pi}{4} < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

~~$$\sin \frac{\pi}{6} =$$~~

$$MI_1 = 2 MI_2$$

$$\frac{13}{2} I_1 I_2 = 3 MI_2$$

$$MI_2 = \frac{13}{6}, MI_1 = \frac{13}{3}$$

$$MZ \cdot MY = 5$$

$$MX \cdot MY = MP_1^2 = MI_1^2 - R_1^2$$

~~$$MX = 2MZ$$~~

$$MX = 2MZ$$

$$MY = 2MW$$

$$MX \cdot MY = 10 = MI_1^2 - R_1^2 = \frac{169}{9} - R_1^2$$

$$R_1^2 = \frac{169}{9} - \frac{90}{9} = \frac{79}{9}$$

$$R_1 = \frac{\sqrt{79}}{3}$$

$$R_1 = 2R_2$$

~~$$\cos \frac{\pi}{7}$$~~
$$\frac{\pi}{7} = \alpha$$

$$\sin \alpha > 0 \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$5 - 12\sin \alpha + 16\sin^3 \alpha \vee 4 - 8\sin^2 \alpha - 5\sin \alpha$$

$$1 - 7\sin \alpha + 8\sin^2 \alpha + 16\sin^3 \alpha \vee 0$$

$$0 = \sin(3 \cdot \frac{\pi}{3}) = 3 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{8} = 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0$$

$$5 - 4\sin(3\alpha) = 5 - 12\sin \alpha + 16\sin^3 \alpha$$

$$4\cos 2\alpha - 5\sin \alpha = 4(1 - 2\sin^2 \alpha) - 5\sin \alpha = 4 - 8\sin^2 \alpha - 5\sin \alpha$$

$$1 - 12\sin \alpha + 16\sin^3 \alpha \vee -8\sin^2 \alpha - 5\sin \alpha$$

$$16\sin^3 \alpha + 8\sin^2 \alpha - 7\sin \alpha + 1 \vee 0$$

$$(\sin \alpha + 1)(16\sin^2 \alpha - 8\sin \alpha + 1) \vee 0$$

$$(\sin \alpha + 1)(4\sin \alpha - 1)^2$$

$\frac{2}{3} = \cos(\frac{\pi}{6}) =$
 $2\sin^2 \frac{\pi}{6} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{6}$
 $2 - \frac{2}{3} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{6}$
 $\frac{4}{3} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{6}$
 $\frac{1}{3} = -2\sin^2 \frac{\pi}{6}$
 $\frac{1}{6} = -\sin^2 \frac{\pi}{6}$
 $\frac{1}{6} = \sin^2 \frac{\pi}{6}$
 $\frac{1}{\sqrt{6}} = \sin \frac{\pi}{6}$

$1 = \sin(\frac{\pi}{2}) =$
 $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$
 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$
 $\frac{1}{3} = \sin \frac{\pi}{6}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \frac{\pi}{14} = \frac{1}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{14} = \frac{\beta}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{7} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{\beta}{2}$$

$$7 \cdot \beta$$

$$49 \cdot \beta$$

$$\sin \frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{5}}{8}$$

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{\beta}{3}$$

$$7 \cdot \beta$$

$$2\alpha\beta + 2\sqrt{2\alpha^2 - \alpha + (\alpha-1)^2}$$

$$= 2(\alpha\beta + \sqrt{3\alpha^2 - 3\alpha + 1})$$

$$2\beta(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{3}})$$

$$\alpha + \alpha^2$$

$$\sin 7\alpha = 7\cos^6\alpha \sin\alpha - 30\cos^4\alpha \sin^3\alpha + 7\cos^2\alpha \sin^5\alpha$$

$$1 = \sin \frac{\pi}{2} = 7 \cdot \frac{3^3}{497} - 30 \cdot \frac{3^2}{47} + 7 \cdot \frac{3}{77}$$

$$2^{14} = 7 \cdot 15^3 - 2 \cdot 15^3 + 7 \cdot 15 - 1 = 15(5 \cdot 15^2 + 7) - 1 =$$

=

$$1 - \frac{2\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + \frac{1}{3}}} = 0$$

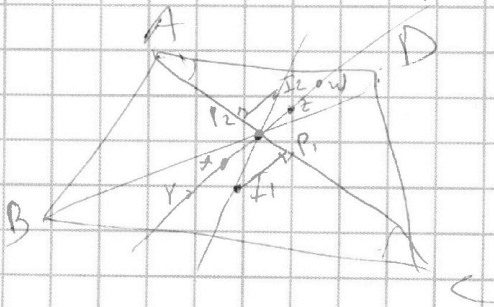
$$\alpha^2 - 2\alpha + \frac{1}{3} = (\alpha - \frac{1}{2})^2 = \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 15 \\ \hline 375 \\ 75 \\ \hline 1125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1125 \\ \times 15 \\ \hline 5660 \\ 1132 \\ \hline 16980 \end{array}$$

$$16979$$

$$\begin{array}{r} 4096 \\ \times 4 \\ \hline 16384 \end{array}$$



$$1 - \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{\sqrt{(\alpha - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12}}} > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

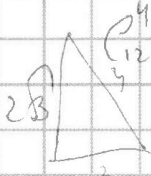
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

$$C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} + \frac{7 \cdot 6}{2} + 7 + 1 = 35 + 21 + 7 + 1 = 64$$

7 $64 \cdot 5 = 320$

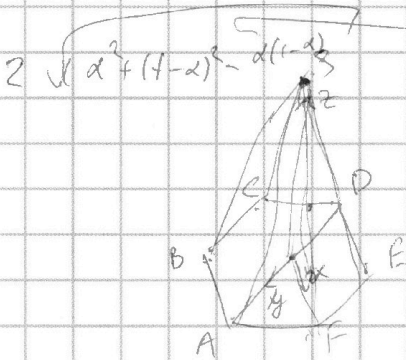
2αβ



$$C_7^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 6} - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 11.59 - 7.5 = 5(9.5 - 7) = 5 \cdot 2.5 = 12.5$$

780

$$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$



~~$\vec{OX} = \alpha \vec{y}$~~

~~$\vec{OX} = \alpha \vec{F} + \beta \vec{S} + \gamma \vec{Z} + \delta = 2\vec{x}$~~

$$\frac{12}{2 \cdot 24} = \frac{1}{4}$$

$$\vec{OA} = \vec{y}, \vec{OF} = \vec{x}, \vec{OZ} = \vec{z}$$

$$\vec{OB} = \vec{y} - \vec{x}$$

$$\vec{BA} = \vec{x}$$

$$\vec{AS} = \vec{z} - \vec{y}$$

~~$\vec{OX} = \alpha \vec{x}$~~

~~$\vec{OY} = \alpha \vec{y}$~~

$$\vec{OX} = \vec{OF} + \vec{FX} = \vec{x} + \beta(\vec{z} - \vec{y})$$

~~$\vec{YX} = \vec{x} + \beta \vec{z} - \beta \vec{y} - \alpha \vec{y}$~~

~~$\vec{YX} = \lambda \vec{BA} + \omega \vec{AS}$~~ $\alpha \geq 1 \quad \alpha = 1$

$$(1-\beta)\vec{x} + \beta\vec{z} - \alpha\vec{y} = \lambda\vec{x} + \omega\vec{z} - \omega\vec{y} \quad \alpha < 0$$

$$(\lambda + \beta - 1)\vec{x} + (\omega - \beta)\vec{z} + (\alpha - \omega)\vec{y} = 0$$

$$\lambda + \beta = 1$$

$$\omega = \beta \quad \alpha = \beta$$

$$(\alpha \vec{y} + (1-\beta)\vec{x} + \beta \vec{z})$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1
121
1331
14641
151051
16151561
1721302171

$$180^\circ(n-2) = \frac{143^\circ + 123^\circ + 2(n-1)}{2} \cdot n$$

$$180n - 360 = 143n + n^2 - n$$

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$(n-18)(n-20) = 0$$

$$n = 20$$

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \min$$

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + 2 \ln 3 = \ln 2 + \ln 3$$

$$(4x + 3y + 3z - 1) \ln 2 = (1 - z) \ln 3$$

$$\sin 7\alpha = 7 \cos^6 \alpha \sin \alpha - 30 \cos^4 \alpha \sin^3 \alpha + 7 \cos^2 \alpha \sin^5 \alpha$$

$$2 \ln 2 = \ln 3$$

$$7 \left(1 - \frac{1}{16}\right)^3 = \frac{1}{4} - 30 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$z = 1$$

$$4x + 3y = -2$$

$$-3y = 2(2x+1)$$

$$2x+1 = 3$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

$$x = 3k+1$$

$$-3y = 2(6k+5)$$

$$y = -4k-2$$

$$x^2 + y^2 = (3k+1)^2 + (4k+2)^2 = 25k^2 + 22k + 5$$

$$x = 1$$

$$y = -2$$

$$\ln 16 + \ln 4 - \ln 24 = \ln \left(\frac{16 \cdot 4}{24} \right) = \ln \left(\frac{24}{24} \right) = \ln 1$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{7} = \frac{\sqrt{5}}{8}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{8} < \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{5} < 4$$

$$5 < 16$$

$$\sin \frac{\pi}{7} < \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\cos \frac{\pi}{7} = \frac{7}{8}$$

$$\sin \frac{2\pi}{7} = \frac{7\sqrt{5}}{32}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 + 4 + 1 = 6$$

$$\frac{7\sqrt{5}}{32} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$7\sqrt{5} < 16\sqrt{3}$$

$$2 \cdot 49 \cdot 5 < 256$$

$$\frac{-22}{2 \cdot 25} = \frac{11}{25}$$

5 - $12 \sin \alpha + 16 \sin$

$9 \sin^2 \alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{12}{16} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(p-q)(p+q) = 792$
 $(p-2)(p+2)$
 $p > 2$
 $\sin \frac{\pi}{14} = \frac{1}{4}$
 $\cos \frac{\pi}{7} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
 $\sin(\frac{2\pi}{14}) =$
 $= 2 \cos^2 \frac{\pi}{14} \sin \frac{\pi}{14} - \sin^3 \frac{\pi}{14}$
 $\frac{a+a+5}{2} \leq 197 \leq \frac{a+1+a+6}{2}$
 $3(2a+5) \leq 197$
 $2a+5 \leq \frac{198}{3} = 66$
 $a \leq 30$
 $3(2a+7) \geq 197$
 $3(2a+7) \geq 188$
 $2a+7 \geq 66$
 $2a \geq 59$
 $a \geq 30$
 $6a \leq 84$
 $a \leq 14$

$5 - \frac{7}{4} \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{5}{4}}$
 $20 - 7 \sqrt{14 - 5}$
 $15 \sqrt{9}$
 $p \leq q+6$
 $p = q+1 \vee q+3 \vee q+5$
 $p = q+2 \vee q+4 \vee q+6$
 $2(2q+2) = 792$
 $q+1 = 198$
 $q = 197$
 $4(2q+4) = 792$
 $q+2 = 99$
 $q = 97$
 $6(2q+6) = 792$
 $2q+6 = 132$
 $2q = 126$
 $q = 63$

$6a \geq 84$
 $3a \geq 40$
 $a \geq \frac{40}{3} = 14$
 $6a \leq 82$
 $3a \leq 41$
 $30, 31, 32, 33, 34, 35, 36$
 $30+31+32+33+35+36 = 197$
 $30+31+33+34+35+36 = 199$
 $1+...+6 = 21$
 $15+16+...+20 = 15 \cdot 6 +$
 $a \geq \frac{90}{6} = 15$

$17+15+16+17+18+19+20 =$
 $\frac{20+14}{2} \cdot 7 = 17 \cdot 7 = 119$
 $\frac{30+36}{2} \cdot 7 = 33 \cdot 7 = 231$