МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 1080$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{9\pi}{14}$ или $3\sin\dfrac{3\pi}{14} - 4\cos\dfrac{3\pi}{7}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 4 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть n – число вершин такого многоугольника. С одной стороны, сумма его углов (в градусах) равна $132+134+\ldots+(132+2(n-1))=\frac{(2\cdot 132+2(n-1))n}{2}=$ $=(132+n-1)n$. С другой стороны, она равна $180(n-2)$. Тогда $(132+n-1)n=180(n-2)$; $n^2+131n=180n-360$; $n^2-49n+360=0$; $\left[\begin{array}{l} n=40, \\ n=9. \end{array}\right.$

Так как $40>9$, то наибольшее число вершин равно 40. Ответ: 40.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ■ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$p^2-q^2=(p-q)(p+q)=1080=2^3\cdot 3^3\cdot 5$ - Числа $p+q$ и $p-q$ имеют одинаковую чётность $\Rightarrow$ они чётные (т.к. 1080 - чётное). Пусть $M=\{n;n+1;\dots;n+6\}$. Тогда $n+(n+1)+\dots+(n+6)=\frac{(n+(n+6))\cdot 7}{2}=(n+3)\cdot 7=7n+21$. Также пусть p - сумма всех чисел, кроме $n+k_1$ (где $0\le k_1\le 6$), q - сумма всех чисел, кроме $n+k_2$ (где $0\le k_2\le 6$). Тогда $p=7n+21-(n+k_1)=6n+21-k_1$, $q=7n+21-(n+k_2)=6n+21-k_2$. С учётом того, что $p>q$ (т.к. $(p-q)(p+q)=1080>0$): $k_1<k_2$, откуда $0\le k_1\le 5$, $1\le k_2\le 6$. $p+q=12n+42-(k_1+k_2)$, $p-q=k_2-k_1$. $1\le k_1+k_2\le 11$; $1\le k_2-k_1\le 6\Rightarrow (k_2-k_1)\in\{2;4;6\}$ с учётом того, что $k_2-k_1=p-q$ - чётные.

1) $p-q=2$. $k_2-k_1=2$. $p+q=\frac{1080}{p-q}=540=12n+42-(k_1+k_2)$. $\underbrace{498}_{12\cdot 42-6}=12n-(k_1+k_2)$; При $n\ne 42$ $(k_1+k_2)\notin[1;11]\Rightarrow n=42$, $k_1+k_2=6$. $\begin{cases}k_2-k_1=2\\k_1+k_2=6\end{cases}$; $\begin{cases}k_2=4\\k_1=2\end{cases}$. $p=6\cdot 42+21-k_1=271$; $q=6\cdot 42+21-4=269$. Числа 271 и 269 - простые $\Rightarrow$ $M=\{42;43;44;45;46;47;48\}$.

2) $p-q=4$. $p+q=\frac{1080}{4}=270=12n+42-(k_1+k_2)$; $228=12n-(k_1+k_2)$. $228\,⋮\,12$, $12n\,⋮\,12\Rightarrow$ $\Rightarrow (k_1+k_2)\,⋮\,12$. Но $1\le k_1+k_2\le 11\Rightarrow (k_1+k_2)\not⋮\,12$ - противоречие.

3) $p-q=6$. $p+q=\frac{1080}{6}=180=12n+42-(k_1+k_2)$; $\underbrace{138}_{12\cdot 12-6}=12n-(k_1+k_2)$. При $n\ne 12$ $(k_1+k_2)\notin[1;11]\Rightarrow n=12$, $k_1+k_2=6$. $\begin{cases}k_1+k_2=6\\k_2-k_1=6\end{cases}$; $\begin{cases}k_2=6\\k_1=0\end{cases}$. $p=6\cdot 12+21-0=93=3\cdot 31$ - не простое $\Rightarrow M\ne\{12;13;\dots;18\}$.

Единственный подходящий вариант был рассмотрен в случае 1.

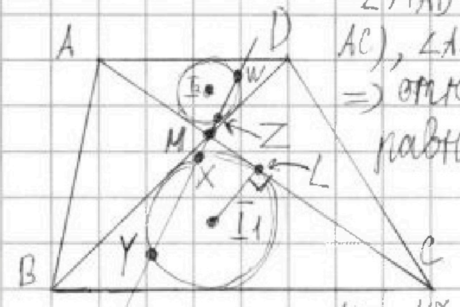
Ответ: $\{42;43;44;45;46;47;48\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\angle MAD = \angle MCB$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC), $\angle AMD = \angle CMB$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle CMD \Rightarrow$ $\Rightarrow$ отношения соответственных элементов (отрезков) равны $\Rightarrow \frac{MZ}{MX} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$; $MZ = \frac{1}{2} MX$ (элементы MZ и MX соответственные, так как $\angle BMX = \angle DMZ$, то есть лежат на соответственных сторонах одинаковых углов, одинаково отложенных от соответственных сторон (BM и DM), а точки X и Z – ближайшие к M точки пересечения прямой из условия с вписанными окружностями (ω_1 и ω_2)). $MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY = 9$; $MX \cdot MY = 18$. Пусть L – точка касания ω_1 и MC. Тогда I_1L – радиус $\omega_1 \Rightarrow I_1L \perp MC \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle I_1LM$ – прямоугольный ($\angle I_1LM = 90^\circ$) $\Rightarrow I_1L^2 = I_1M^2 - ML^2$. Но $ML^2 = MX \cdot MY \overset{18}{=}$ (касательная и секущая, проведённые из одной точки). Также $\frac{I_1M}{I_2M} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{1} \Rightarrow I_1M = 2 I_2M$, $I_1M = I_1I_2 - I_2M = I_1I_2 - \frac{1}{2} \cdot I_1M$; $\frac{3}{2} I_1M = I_1I_2 = 8$; $I_1M = \frac{16}{3}$. I_1M и I_2M – соответственные элементы, так как концы каждого из этих отрезков являются соответственными элементами, а именно: I_1 и I_2, M и M. Итак $I_1L^2 = I_1M^2 - ML^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 18 =$ $= \frac{256}{9} - 18 = \frac{94}{9}$; $I_1L = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$. Ответ: $\frac{\sqrt{94}}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5-4\sin\frac{9\pi}{14}$; $\cancel{\frac{\pi}{2} < \frac{9\pi}{14} < \pi} \Rightarrow$ $3\sin\frac{3\pi}{14}-4\cos\frac{3\pi}{7}$; $\cos\frac{3\pi}{7}=$

$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{14}$. $\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{14}<\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}<\sin\frac{3\pi}{14}<\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\sin\frac{9\pi}{14}=\sin\left(\pi-\frac{9\pi}{14}\right)=\sin\frac{5\pi}{14}$.

$5-4\sin\frac{5\pi}{14} \vee 3\sin\frac{3\pi}{14}-4\sin\frac{\pi}{14}$; $5-4\sin\frac{5\pi}{14}+4\sin\frac{\pi}{14}-3\sin\frac{3\pi}{14}\vee$

$\vee 0$; $5+4\left(\sin\frac{\pi}{14}-\sin\frac{5\pi}{14}\right)-3\sin\frac{3\pi}{14}\vee 0$; $5+8\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}-3\sin$

$-2\sin\frac{2\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}=\sin\left(\frac{4\pi}{14}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

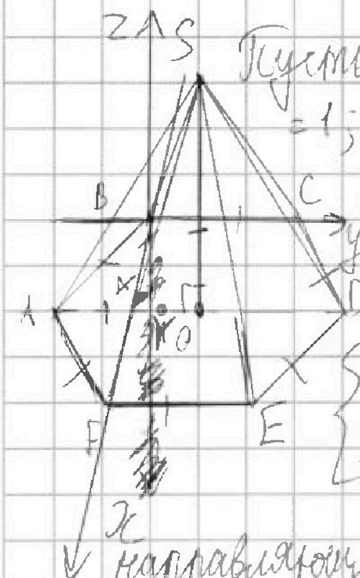
Количество пирамид, у которых основание лежит в плоскости α: $C_4^1 \cdot (2^8 - C_8^0 - C_8^1 - C_8^2) = 4(2^8 - 1 - 8 - 28) = 4 \cdot 219$ (четыре способа выбрать вершину; в α любые точки в количестве от 3 до 8 задают основание: $C_8^3 + C_8^4 + \ldots + C_8^8 = 2^8 - C_8^0 - C_8^1 - C_8^2$). * Количество пирамид, у которых в плоскости α лежат ровно две вершины: $C_8^2 \cdot C_4^2 = 28 \cdot 6 = 168$. * Важно: поскольку любые четыре точки либо не лежат в одной плоскости, либо лежат в плоскости α, то все пирамиды, основание которых не лежит в α, являются треугольными. Поэтому далее считаются только они (то есть только те, у которых ровно четыре вершины). Уточнение: у подсчитываемых далее пирамид не более двух вершин лежит в α (так как остальные уже посчитаны выше). Пирамиды, у которых в α ровно одна вершина: $C_8^1 \cdot C_4^3 = 8 \cdot 4 = 32$. Пирамиды, у которых нет вершин в α: $C_8^0 \cdot C_4^4 = 1$. Примечание: точки, не лежащие в α, не лежат в одной плоскости $\Rightarrow$ они задают пирамиду. Также все пирамиды, у которых основание не лежит в α, содержат в основании треугольник, а потому являются выпуклыми. Пирамиды с основанием в α тоже выпуклые, так как их основанием является выпуклый многоугольник (ведь он вписан в окружность). Итак, $4 \cdot 219 + 168 + 32 + 1 = 1077$ (искомое количество). Ответ: 1077.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Пусть $SO \perp ABC$, $O \in ABC$. $AB = BC = \ldots = AF = 1$; $AO = AB = 1$; $SO \perp ABC \Rightarrow SO \perp AO \Rightarrow \angle AOS = 90^\circ \Rightarrow OS^2 = AS^2 - AO^2 = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 1$; $OS = AO$. $B(0;0;0)$; $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$, $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$.

Для ABC:
$$\begin{cases} 0+0+0+d=0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b + 0 + d = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b + c + d = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} d = 0, \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{1}{2}b; \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{1}{2}b = -c; \end{cases} \quad \begin{cases} d = 0, \\ b = a\sqrt{3}, \\ c = -a\sqrt{3}. \end{cases}$$

$ABC: ax + a\sqrt{3}y - a\sqrt{3}z + 0 = 0 \mid : a, a \neq 0.$

$x + y\sqrt{3} - z\sqrt{3} = 0$. Тогда $\bar{n}\{1; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$ — направляющий для ABC. Пусть $\bar{e}$ — направляющий для XY (т. е. $\bar{e} \parallel XY$). Т. к. $XY \parallel ABC$, то $XY \perp \bar{n}$; $\bar{e} \perp \bar{n}$. Причём $XY \parallel ABC \Leftrightarrow \bar{e} \perp \bar{n}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

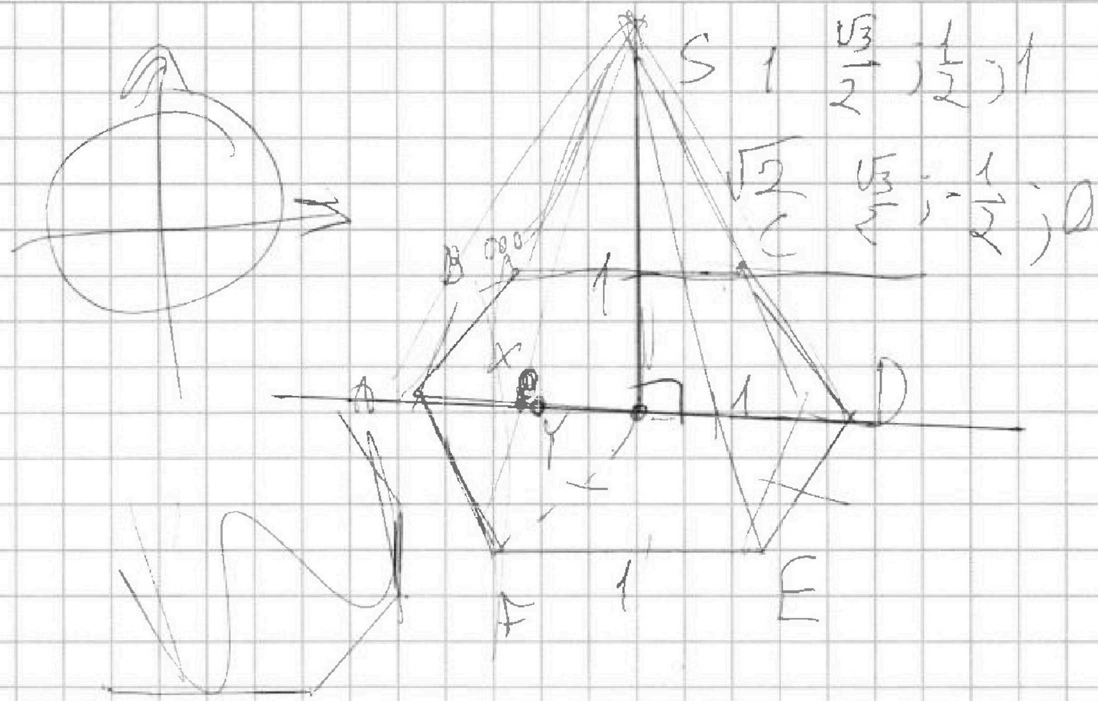
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\frac{(2\cdot 132+2(n-1))n}{2}=180(n-2)$ $\quad (132+n-1)n=180n-360$

$2\cdot 132-2=262$

$n+131$

$n^2+131n-49n+360=0$

$(2\cdot 132+2(n-2))n^2=360(n-2)$

$2n^3+262n^2-360n+720=0$

$n^3+131n^2-180n+360=0$

$\left[\begin{array}{l} n=40 \\ n=9\log_9 5 \end{array}\right.$

$\ln 125=\ln 25+\ln 5$

$\ln 75=\ln 25+\ln 3$

$360=10\cdot 4\cdot 9$

$2^3\cdot 3^2\cdot 5$

$x^2\ln^2 25+y^2\ln^2 75+z^2\ln^2 125+2(xy\ln 25\ln 75+xz\ln 25\ln 125+yz\ln 75\ln 125)=\ln^2 45$

$x\ln 25+y\ln 25+y\ln 3+z\ln 25+\frac{1}{2}z\ln 25$

$x\log_9 5+y\log_9 5+\frac{1}{2}y$

$n(n^2+131n-180)+360=0$

$1\le k_2-k_1\le 6$ $\quad n, n+1 \dots n+6$ $\quad 0\le k\le 6$

$(p-q)(p+q)=1080$

$p>q$

$108\cdot 10=3\cdot 36\cdot 2\cdot 5$

$\frac{(n+(n+6))\cdot 7}{2}=\frac{(2n+6)7}{2}=(n+3)7=7n+21$

$p-q=k_2-k_1$ $\quad 2^3\cdot 3^3\cdot 5$

$p+q=12n+42-k_1-k_2$

$p=7n+21-n-k_1=6n+21-k_1$

$q=7n+21-n-k_2=6n+21-k_2$

$q\ne 2,\ p\ne 2 \Rightarrow$ $p-q$ и $p+q$ одного четности

1) $n=42$

3) $n=12$

Если $p-q\ \vdots\ 4$, то k_2-k_1

$1\le k_1+k_2\le 11$

1) $p-q=2$: $\quad p+q=540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$

$540=12n+42-x$ $\quad \begin{cases} k_1+k_2=6 \\ k_2-k_1=2 \end{cases}$

$498=12n-x$

2) $p-q=4$: $\quad p+q=2\cdot 3^3\cdot 5=270=12n+42-(k_1+k_2)$

3) $p-q=6$: $\quad p+q=180=12n+42-x$

$138=12\cdot 12-6$; $\begin{cases} k_1+k_2=6 \\ k_2-k_1=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2=6 \\ k_1=0 \end{cases}$

1) $315-0$, $315-6=309$

$498=12\cdot 42-6$

$k_2=4;\ k_1=2$

3) $105-4=101$; $105-2=103$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

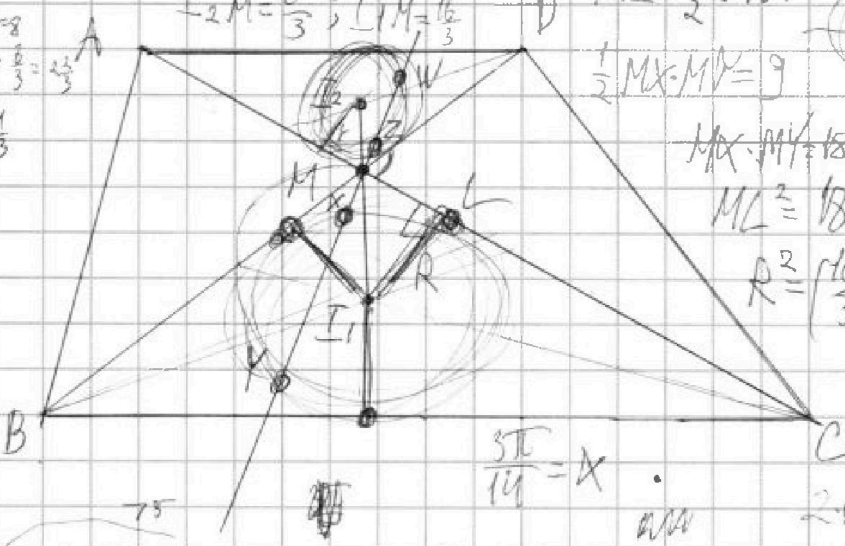
$I_1I_2 = 8$

$3x = 8$

$x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

$5\frac{1}{3}$

$I_2M = \frac{8}{3}$, $I_1M = \frac{16}{3}$



$MZ = \frac{1}{2}MX$

$\frac{1}{2}MX \cdot MY = 9$

$MX \cdot MY = 18$

$ML^2 = 18$

$R^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 18 = \frac{256}{9} - 18$

$28\frac{4}{9} - 18 = 10\frac{4}{9}$

$\frac{94}{9}$ $\frac{\sqrt{94}}{3}$

$\frac{3\pi}{14} = x$

$9 \cdot 28 = 252$

$5 - 4\sin 3x \lor 3\sin x - 4\cos 2x$

$(3+4+5=12) + 4 = 16$

$3\sin x$

$5 + 4\cos 2x \lor 3\sin x + 4\sin 3x$

$5 - 4\sin 3x - 3\sin x + 4\cos 2x \lor 0$

$5 - 4\sin\frac{5\pi}{14} \lor$

$\frac{1}{9} \quad \frac{3}{12} > \frac{3}{14}$

$\frac{\pi}{2} < \frac{9\pi}{14} < \pi$ $\quad \frac{9\pi}{14}$ $\quad \frac{5\pi}{14}$

$\frac{3}{14} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{1}{6} < \frac{3}{14} < \frac{1}{4}$

$C_4^2 \quad C_4^3$

$4 \cdot \left(2^8 - 1 - 8 - \frac{8 \cdot 7}{2}\right) + 4 \cdot 9 + \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 8 \cdot 9 + 4 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2}$

$256 - 9 - 28 = 219$

$\sin\left(\frac{7}{14} - \frac{6}{14}\right)\pi =$

$C_4^3 \quad C_8^0 \quad C_4^4$

$x + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 8 \cdot 4 + 1$

$= \sin\frac{\pi}{14} < \frac{1}{2}$

$-4\left(\frac{3\pi}{} - \pi\right)$

$C_8^2 \quad 876 + 168 + 32 + 1 \quad C_8^1$

$877 + 200 = 1077$

$4 \cdot 219 + 28 \cdot 6 + 32 + 1$

$\sin x$

$\frac{2\pi}{14} \quad \frac{\pi}{7}$

$4 \cdot 220$