



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть n - число вершин такого многоугольника. С одной стороны, сумма его углов равна $(132 + 134 + \dots + (132 + 2^{n-1})) = \frac{(2 \cdot 132 + 2^{n-1})(n-1)}{2} = (132 + n - 1)n$. С другой стороны, она равна $180(n-2)$. Тогда $(132 + n - 1)n = 180(n-2)$; $n^2 + 131n = 180n - 360$; $n^2 - 49n + 360 = 0$; $\begin{cases} n = 40 \\ n = 9 \end{cases}$. Так как $40 > 9$, то наибольшее число вершин равно 40. Ответ: 40.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$. Числа $p+q$ и $p-q$ имеют одинаковую четность \Rightarrow они четные (м.н. 1080 - четное). Пусть $M = \{n; n+1; \dots; n+6\}$. Тогда $n + (n+1) + \dots + (n+6) = \frac{(n+(n+6)) \cdot 7}{2} = (n+3) \cdot 7 = 7n+21$. Также пусть

p - сумма всех чисел, кроме $n+k_1$ (где $0 \leq k_1 \leq 6$), q - сумма всех чисел, кроме $n+k_2$ (где $0 \leq k_2 \leq 6$). Тогда $p = 7n+21 - (n+k_1) = 6n+21-k_1$, $q = 7n+21 - (n+k_2) = 6n+21-k_2$. С учетом того, что $p > q$ (м.н. $(p-q)(p+q) = 1080 > 0$): $k_1 < k_2$, откуда $0 \leq k_1 \leq 5$, $1 \leq k_2 \leq 6$. $p+q = 12n+42 - (k_1+k_2)$, $p-q = k_2-k_1$. $1 \leq k_1+k_2 \leq 11$; $1 \leq k_2-k_1 \leq 6 \Rightarrow (k_2-k_1) \in \{2; 4; 6\}$ с учетом того, что $k_2-k_1 = p-q$ - четное.

1) $p-q=2$. $k_2-k_1=2$. $p+q = \frac{1080}{p-q} = 540 = 12n+42 - (k_1+k_2)$. $498 = 12n - (k_1+k_2)$; $12 \cdot 42 - 6$
Т.к. $n \neq 42$ ($k_1+k_2 \notin [1; 11]$) $\Rightarrow n=42$, $k_1+k_2=6$. $\begin{cases} k_2-k_1=2 \\ k_1+k_2=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2=4 \\ k_1=2 \end{cases}$
 $p = 6 \cdot 42 + 21 - k_1 = 271$; $q = 6 \cdot 42 + 21 - k_2 = 269$. Числа 271 и 269 - простые \Rightarrow

$M = \{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$.

2) $p-q=4$. $p+q = \frac{1080}{4} = 270 = 12n+42 - (k_1+k_2)$; $228 = 12n - (k_1+k_2)$. $228 : 12$, $12n : 12 \Rightarrow (k_1+k_2) \equiv 12$. Но $1 \leq k_1+k_2 \leq 11 \Rightarrow (k_1+k_2) \not\equiv 12$ - противоречие.

3) $p-q=6$. $p+q = \frac{1080}{6} = 180 = 12n+42 - (k_1+k_2)$; $138 = 12n - (k_1+k_2)$. Т.к. $n \neq 12$ ($k_1+k_2 \notin [1; 11]$) $\Rightarrow n=12$, $k_1+k_2=6$. $\begin{cases} k_1+k_2=6 \\ k_2-k_1=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2=6 \\ k_1=0 \end{cases}$ $p = 6 \cdot 12 + 21 - 0 = 93 = 3 \cdot 31$ - не простое $\Rightarrow M \neq \{12; 13; \dots; 18\}$.

Единственный подходящий вариант был рассмотрен в случае 1.

Ответ: $\{42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$.

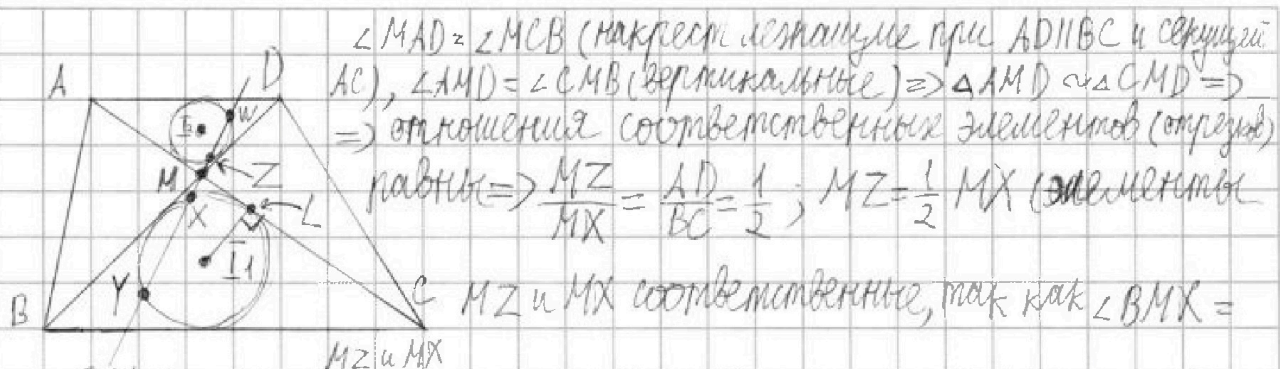


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\angle MAD = \angle MCB$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC), $\angle AMD = \angle CMB$ (вертикальные) $\Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle CMB \Rightarrow$
 \Rightarrow отложения соответственных элементов (отрезков) равны $\Rightarrow \frac{MZ}{MX} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$; $MZ = \frac{1}{2} MX$ (элементы

MZ и MX соответственные, так как $\angle BMX =$

$= \angle DMZ$, то есть лежат на соответственных сторонах одинаковых

углов, одинаково отложенных от соответственных сторон (BM и DM), а

точки X и Z - ближайше к M точки пересечения прямой из условия

с вписанной окружностью. $MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY = 9$; $MX \cdot MY = 18$. Точка L -

точка касания w_1 и MC . Тогда $I_1 L$ - радиус $w_1 \Rightarrow I_1 L \perp MC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle I_1 L M$ - прямоугольный ($\angle I_1 L M = 90^\circ$) $\Rightarrow I_1 L^2 = I_1 M^2 - ML^2$. По $ML^2 =$

$= MX \cdot MY$ (касательная и секущая, проведенные из одной точки). Также

$\frac{I_1 M}{I_2 M} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{1} \Rightarrow I_1 M = 2 I_2 M$, $I_1 M = I_1 I_2 - I_2 M = I_1 I_2 - \frac{1}{2} \cdot I_1 M$;

$\frac{3}{2} I_1 M = I_1 I_2 = 8$; $I_1 M = \frac{16}{3}$. $I_1 M$ и $I_2 M$ - соответственные элементы

каждой из этих отрезков являются соответственными элементами, а

именно: I_1 и I_2 , M и M . И так $I_1 L^2 = I_1 M^2 - ML^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 18 =$

$= \frac{256}{9} - 18 = \frac{94}{9}$; $I_1 L = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$. Ответ: $\frac{\sqrt{94}}{3}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & 5 - 4\sin\frac{9\pi}{14}; \quad \cancel{5 - 4\sin\frac{9\pi}{14}} \quad \cancel{3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}}; \quad \cos\frac{3\pi}{7} = \\ & = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right) = \sin\frac{\pi}{14}. \quad \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin\frac{3\pi}{14} < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \sin\frac{9\pi}{14} = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{14}\right) = \sin\frac{5\pi}{14}. \\ & 5 - 4\sin\frac{5\pi}{14} \vee 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\sin\frac{\pi}{14}; \quad 5 - 4\sin\frac{5\pi}{14} + 4\sin\frac{\pi}{14} - 3\sin\frac{3\pi}{14} \vee \\ & \vee 0; \quad 5 + 4\left(\sin\frac{\pi}{14} - \sin\frac{5\pi}{14}\right) - 3\sin\frac{3\pi}{14} \vee 0; \quad 5 + 8\sin\frac{\pi}{14} - 3\sin\frac{3\pi}{14} \\ & \quad - 2\sin\frac{2\pi}{14} \cos\frac{3\pi}{14} = \sin\left(\frac{4\pi}{14}\right) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Количество пирамид, у которых основание лежит в плоскости α :

$$C_4^1 \cdot (2^8 - C_8^0 - C_8^1 - C_8^2) = 4(2^8 - 1 - 8 - 28) = 4 \cdot 219 \text{ (четыре способа}$$

выбрать вершину; в ~~любой~~ ^{любой} плоскости любые точки в количестве от 3 до

8 задают основание: $C_8^3 + C_8^4 + \dots + C_8^8 = 2^8 - C_8^0 - C_8^1 - C_8^2$). * Кошт-

ество пирамид, у которых в плоскости α лежат ~~ровно две~~ ~~вершины~~

~~ровно две~~ ~~вершины~~ $\} : C_8^2 \cdot C_4^2 = 28 \cdot 6 = 168$. * Важно: ~~каковы-~~

~~любы~~ ~~любы~~ ~~четыре~~ ~~точки~~ ~~либо~~ ~~не~~ ~~лежат~~ ~~в~~ ~~одной~~ ~~плоскости~~, ~~либо~~ ~~лежат~~

~~в~~ ~~плоскости~~ α , ~~то~~ ~~все~~ ~~пирамиды~~, ~~которые~~ ~~не~~ ~~лежат~~ ~~в~~ α , ~~явля-~~

~~ются~~ ~~треугольниками~~. Поэтому далее считаются только они

(то есть только те, у которых ровно четыре вершины). Уточнение: у

~~каждой~~ ~~подсчитываемых~~ ~~далее~~ ~~пирамид~~ ~~не~~ ~~более~~ ~~двух~~ ~~вершин~~ ~~ле-~~

~~жит~~ ~~в~~ α (так как остальные уже подсчитаны выше). Пирамиды, у кото-

рых в α ровно одна вершина: $C_8^1 \cdot C_4^3 = 8 \cdot 4 = 32$. Пирамиды,

у которых нет вершин в α : $C_8^0 \cdot C_4^4 = 1$. Примечание: точки, не лежа-

щие в α , не лежат в одной плоскости \Rightarrow они задают пирамиду. Также все пи-

рамиды, у которых основание не лежит в α , содержат в основании ~~треуголь-~~

~~ник~~ ~~а~~ ~~потому~~ ~~являются~~ ~~выпуклыми~~. Пирамиды с ~~т.е.~~ ~~в~~ α ~~также~~ ~~выпуклы~~,
так как их основанием является выпуклый многоугольник (ведь от вершин в
окружности). Итак, $4 \cdot 219 + 168 + 32 + 1 = 1077$ (исковое количество). Ответ: 1077.

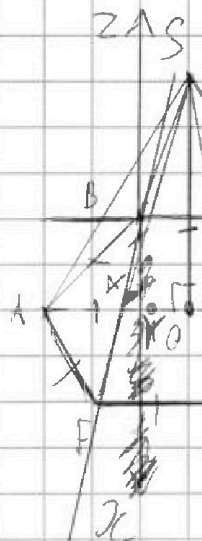


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $SO \perp ABC$, $O \in ABC$. $AB = BC = \dots = AF = 1$; $AO = AB = 1$; $SO \perp ABC \Rightarrow SO \perp AO \Rightarrow \angle OS = 90^\circ \Rightarrow OS^2 = AS^2 - AO^2 = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 1$; $OS = 1$. $B(0; 0; 0)$; $A(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0)$;

$$S(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1)$$

$$\begin{cases} a+d=0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b + d = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b + c + d = 0; \end{cases} \begin{cases} d = -a, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{2}b, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b = -c; \end{cases}$$

$$ABC: ax + a\sqrt{3}y - a\sqrt{3}z + d = 0 \quad | :a, a \neq 0.$$

$$x + y\sqrt{3} - z\sqrt{3} = 0. \text{ Тогда } \vec{n} \{1; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$$

\vec{n} — направляющий для ABC . Пусть \vec{e} — направляющий для XY (т.е. $\vec{e} \parallel XY$). П.к. $XY \parallel ABC$, то $XY \perp \vec{n}$; $\vec{e} \perp \vec{n}$. Прямая $XY \parallel ABC \Rightarrow \vec{e} \perp \vec{n}$.

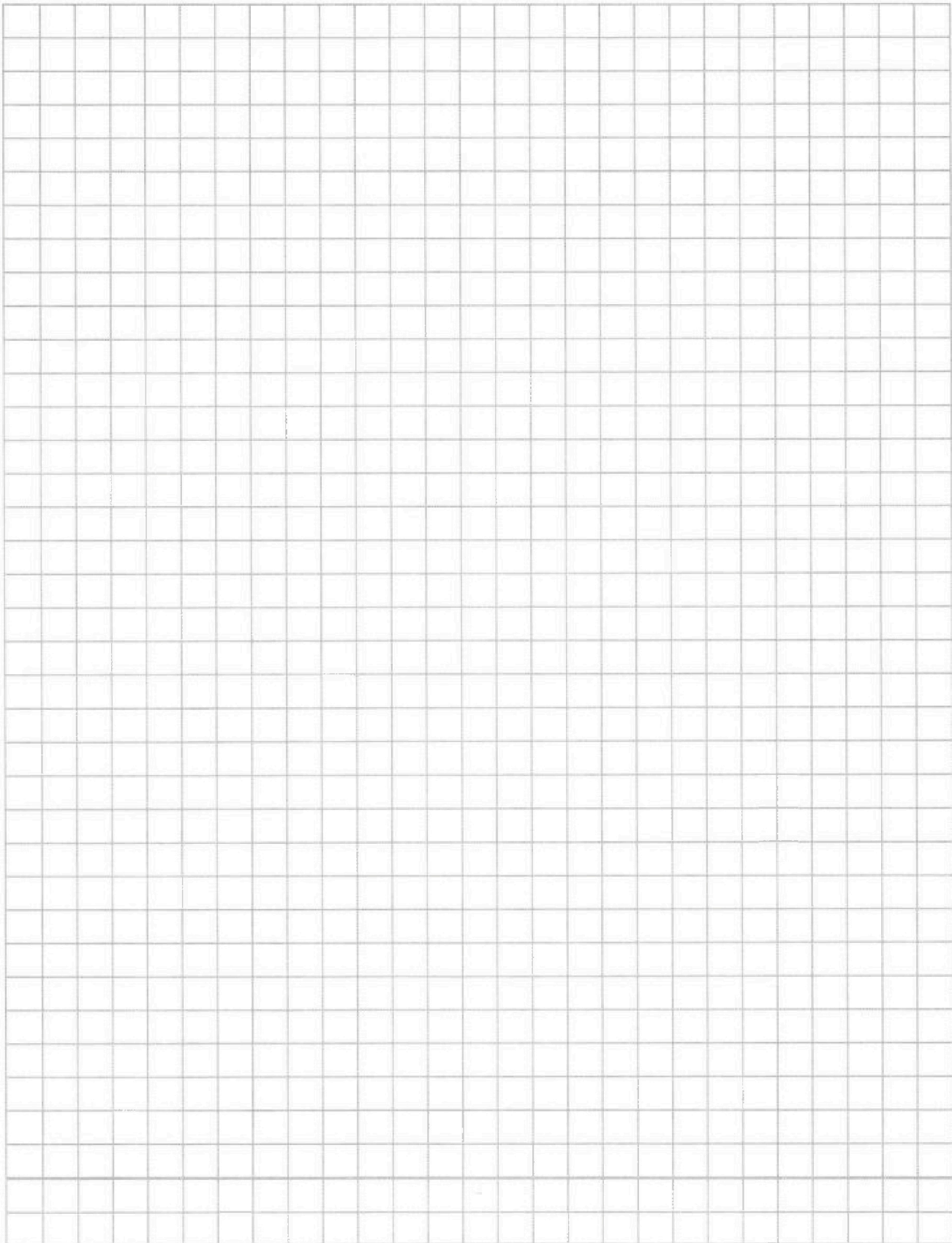


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



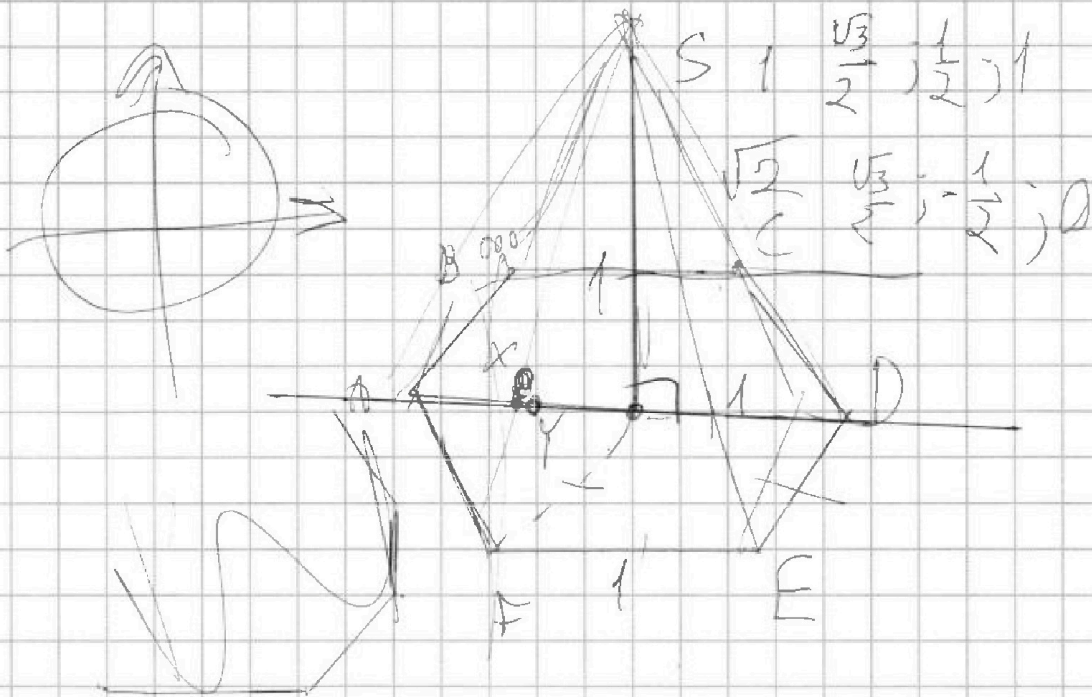


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(2 \cdot 132 + 2(n-1))n}{2} = 180(n-2)$$

$$2 \cdot 132 - 2 = 262$$

$$(132 + n - 1)n = 180n - 360$$

$$n^2 + 131n - 49n + 360 = 0$$

$$n^2 + 131n - 180n + 360 = 0$$

$$n^3 + 131n^2 - 180n + 360 = 0$$

$$n = 40$$

$$n = 9 \log_5 5$$

$$x^2 \ln 25 + y \ln 25 + z \ln 25 + 2(x \ln 25 \ln 5 + 2z \ln 25 \ln 5)$$

$$2x \log_5 5 + y \log_5 5 + \frac{1}{2} y$$

$$1 \leq k_2 - k_1 \leq 6$$

$$(p-q)(p+q) = 1080$$

$$108 \cdot 10 = 3 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 5$$

$$p-q = k_2 - k_1$$

$$p+q = 12n + 42 - k_1 - k_2$$

$$q \neq 2, p \neq 2$$

$$p-q = 4$$

$$p+q = 138 = 12n + 42 - x$$

$$138 = 12 \cdot 12 - 6$$

$$1) p-q=2$$

$$2) p-q=4$$

$$3) p-q=6$$

$$138 = 12 \cdot 12 - 6$$

$$k_1 = 2, k_2 = 2$$

$$k_2 - k_1 = 0$$

$$k_1 = 2, k_2 = 2$$

$$k_1 = 2, k_2 = 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$I_1 \perp I_2 = 8$
 $3x = 8$
 $x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$
 $5\frac{1}{3}$

$\Gamma_2 M = \frac{8}{3}, \Gamma_1 M = \frac{16}{3}$
 $MZ = \frac{1}{2} MX$
 $\frac{1}{2} MX \cdot MY = 9$
 $MX \cdot MY = 18$
 $ML \approx 18$
 $R^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - 18 = \frac{256}{9} - 18$
 $28\frac{4}{9} - 18 = 10\frac{4}{9}$
 $\frac{94}{9} \neq \frac{\sqrt{94}}{3}$
 $9 = \frac{3}{14} \Rightarrow \frac{3}{14} > \frac{R}{2}$

$5 - 4 \sin 2x$
 $3 \sin x - 4 \cos 2x$
 $(3+4+5=12) + 9 = 16$
 $3 \sin x$
 $5 + 4 \cos 2x$
 $3 \sin x + 4 \sin 2x$
 $5 - 4 \sin 2x - 3 \sin x + 4 \cos 2x$
 $5 - 4 \sin \frac{5\sqrt{6}}{14}$
 $4 \cdot \left(\frac{2^8 - 1 - 8 - 8 \cdot \frac{3}{2}}{2} \right) + 4 \cdot 9 + \left(\frac{4 \cdot 3}{2} \right) \cdot 8 \cdot 9 + 9 \cdot 8 \cdot \frac{3}{2}$
 $256 - \frac{9 - 28 = 214}{38}$
 $x + \frac{8 \cdot \frac{3}{2}}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot 3}{2} + 8 \right) \cdot (4 + 1)$
 $4 \cdot 219 + 28 \cdot 6 + 32 + 1$
 $4 \cdot 220$

$\frac{5\sqrt{6}}{14} < \frac{\pi}{14} < \frac{\pi}{2}$
 $\frac{3}{14} < \frac{3}{12} < \frac{1}{2}$
 $\frac{5\sqrt{6}}{14} < \frac{3}{14}$
 $\sin \left(\frac{3}{14} - \frac{6}{14} \right) \sqrt{6} = \sin \frac{\pi}{14} < \frac{1}{2}$
 $-4 \left(\frac{3\pi}{14} - \frac{\pi}{2} \right)$
 $\sin x \frac{2\pi}{14} - \frac{\pi}{2}$