МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 1080$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{9\pi}{14}$ или $3\sin\dfrac{3\pi}{14} - 4\cos\dfrac{3\pi}{7}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 4 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Введём обозначения нашей арифметической прогрессии:

$a_1 = 132$ $\quad [a_1] = {}^\circ$

$d = 2$ $\quad [d] = {}^\circ$ } это про то, что всё в градусах

Пусть в нашем многоугольнике n вершин.
Обозначим за S_n сумму всех углов в ~~выпуклом n -~~ выпуклом n-угольнике.
С одной стороны, $S_n = 180(n-2)$,
с другой же, это сумма первых n членов арифм. прогрессии =

$= \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n$.

$\Downarrow$

$$\frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n = 180(n-2)$$

$$\frac{2\cdot 132+2(n-1)}{2} \cdot n = 180(n-2)$$

$$(132+n-1)n = 180(n-2)$$

$$132n + n^2 - n = 180n - 360$$

$$n^2 + (132-1-180)n + 360 = 0$$

$$n^2 + (-49)n + 360 = 0$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

— решаем, как обычное квадратное уравнение по формуле:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$D = (-49)^2 - 4\cdot 1\cdot 360 = 2401 - 1440 = 961 = 31^2$$

$$n = \frac{49 \pm 31}{2} = \{9; 40\}$$

Заметим, что нас просят найти <u>максимальное</u> такое n.

$\max(9;40) = 40 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: } 40.}$

$\boxed{x, y, z \in \mathbb{Z}}$

$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$

$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$

~~$\ln(25^x \cdot 75^y \cdot 12$~~

$\ln(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z) = \ln 45$

$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$

$(5^2)^x \cdot (5^2 \cdot 3)^y \cdot (5^3)^z = 5 \cdot 3^2$

$5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 5 \cdot 3^2$

$\Downarrow$

$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5 \cdot 3^2$

$\Downarrow$

$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1, \\ y = 2; \end{cases} \Rightarrow 2x + 2 \cdot 2 + 3z = 1$

$2x + 4 + 3z = 1$

$2x + 3z = -3$.

Итак, значение y зафиксировано и равно 2

$\Downarrow$

$\min(x^2 + y^2 + z^2) = \min(x^2 + z^2) + y^2 = \min(x^2 + z^2) + 2^2 = \min(x^2 + z^2) + 4$

$\Downarrow$

Задача сводится к нахождению $\min(x^2 + z^2)$, если $x, z \in \mathbb{Z}$ и $2x + 3z = -3$.

$2x + 3z = -3$

$x = -\frac{3}{2}(z+1)$ — т.к. $x \in \mathbb{Z}$, то число z должно быть НЕЧЁТНЫМ.

$x^2 + z^2 = \left[-\frac{3}{2}(z+1)\right]^2 + z^2 = \frac{9}{4}(z^2 + 2z + 1) + z^2 = \frac{9}{4}z^2 + \frac{9}{2}z + \frac{9}{4} + z^2 =$

$= \frac{13}{4}z^2 + \frac{9}{2}z + \frac{9}{4}.$

Пусть $f(z) = \frac{13}{4}z^2 + \frac{9}{2}z + \frac{9}{4}$.

Тогда $\min(x^2+z^2) = \min(f(z))$ при целом нечётном z.

$f(z)$ – парабола ветвями вверх

$\Downarrow$

$\min(f(z))$ при $z \in \mathbb{R}$ достигается при $z = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{9}{2}}{2\cdot\frac{13}{4}} =$

$= -\frac{\frac{9}{2}}{\frac{13}{2}} = -\frac{9}{13}$

Ближайшие целые числа к $-\frac{9}{13}$ это -1 и 0.

$\Downarrow$

$f(-1) = \frac{13}{4} - \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{13-18+9}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

$z_0 = -1$ это ближайшее целое нечётное число к оси симметрии параболы, а также $f(z_0) = f(-1) = \underline{1 \in \mathbb{Z}}$

$\Downarrow$

$\min(x^2+z^2) = f(z_0 = -1) = 1$.

$\Downarrow$

$\min(x^2+y^2+z^2) = 1+4 = 5$.

$\boxed{\text{Ответ: } 5.}$

(и достигается это значение при $x=0,\ y=2,\ z=-1$.)

P.S.: я бы использовал КБШ для нахождения $\min(x^2+z^2)$, но побоялся, т.к. не помню границы его применимости, если они вообще есть.

$p^2 - q^2 = 1080$

$(p-q)(p+q) = 1080$

Пусть $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_7\}$, причём $a_i = a_{i-1} + 1$, $i \in [2;7]$.

Пусть $S(M) = \sum_{i=1}^{7} a_i = 7a_1 + (1+2+\ldots+6) = 7a_1 + 21$

Тогда $p = S(M) - a_n$ для некоторого $n \in [1;7]$,

$q = S(M) - a_m$ для некоторого $m \in [1;7]$,

причём $n \neq m \Rightarrow a_n \neq a_m \Rightarrow p \neq q$.

$\Downarrow$

$p - q = a_m - a_n \in [1;6]$.

Рассмотрим все 6 случаев:

(1) $p - q = 1 \Rightarrow p + q = 1080$

$\begin{cases} p-q=1, \\ p+q=1080; \end{cases}$ (+)

$2p = 1081 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \varnothing$.

(3) $p - q = 3 \Rightarrow p+q = 360$

$\begin{cases} p-q=3, \\ p+q=360; \end{cases}$ (+)

$2p = 363 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \varnothing$

(2) $p - q = 2 \Rightarrow p + q = 540$

$\begin{cases} p-q=2, \\ p+q=540; \end{cases}$ (+)

$2p = 542$

$p = 271$

$q = p - 2 = 269$

269, 271 – простые числа

$p - q = 2 \Rightarrow a_m - a_n = 2 \Rightarrow a_n + 2 = a_m$.

Тогда $n \in [1;5]$, $m \in [3;7]$.

Рассмотрим 5 подслучаев:

1. $n=1 \Rightarrow p = S(M) - a_1 = 7a_1 + 21 - a_1 = 6a_1 + 21$

$6a_1 + 21 = 271$

$6a_1 = 250$

$a_1 = \frac{250}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \varnothing$.

2. $n=2 \Rightarrow p = S(M) - a_2 = 7a_1 + 21 - (a_1+1) = 6a_1 + 20$

$6a_1 + 20 = 271$

$6a_1 = 251$

$a_1 = \frac{251}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \varnothing$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3. $n = 3 \Rightarrow p = S(M) - a_3 = 7a_1 + 21 - (a_1 + 2) = 6a_1 + 19$

$6a_1 + 19 = 271$

$6a_1 = 252$

$a_1 = \frac{252}{6} = 42 \Rightarrow \boxed{M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}}$

4. $n = 4 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 = \frac{253}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \varnothing$

5. $n = 5 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_1 = \frac{254}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \varnothing.$

(4) $p - q = 4 \Rightarrow p + q = 270$

$\begin{cases} p - q = 4, \\ p + q = 270; \end{cases}$ (+)

$2p = 274$

$p = \frac{274}{2} = 137$

$q = p - 4 = 133 = 7 \cdot 19$

$\Downarrow$

q – составное $\Rightarrow \varnothing$

(5) $p - q = 5 \Rightarrow p + q = 216$

$\begin{cases} p - q = 5, \\ p + q = 216; \end{cases}$ (+)

$2p = 221$

$p = \frac{221}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \varnothing.$

(6) $p - q = 6 \Rightarrow p + q = 180$

$\begin{cases} p - q = 6, \\ p + q = 180; \end{cases}$ (+)

$2p = 186$

$p = \frac{186}{2} = 93 = 3 \cdot 31$

$\Downarrow$

p – составное $\Rightarrow \varnothing.$

$\boxed{\text{Ответ: } M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}}$

P.S.: множество M именно такое, потому что при переборе вариантов это оказалось единственно возможный вариант. Он получился в случае (2) подслучае 3., т.е. при $p - q = 2$ и $n = 3$. При этом $p = 271 = 42 + 43 + 45 + 46 + 47 + 48$,

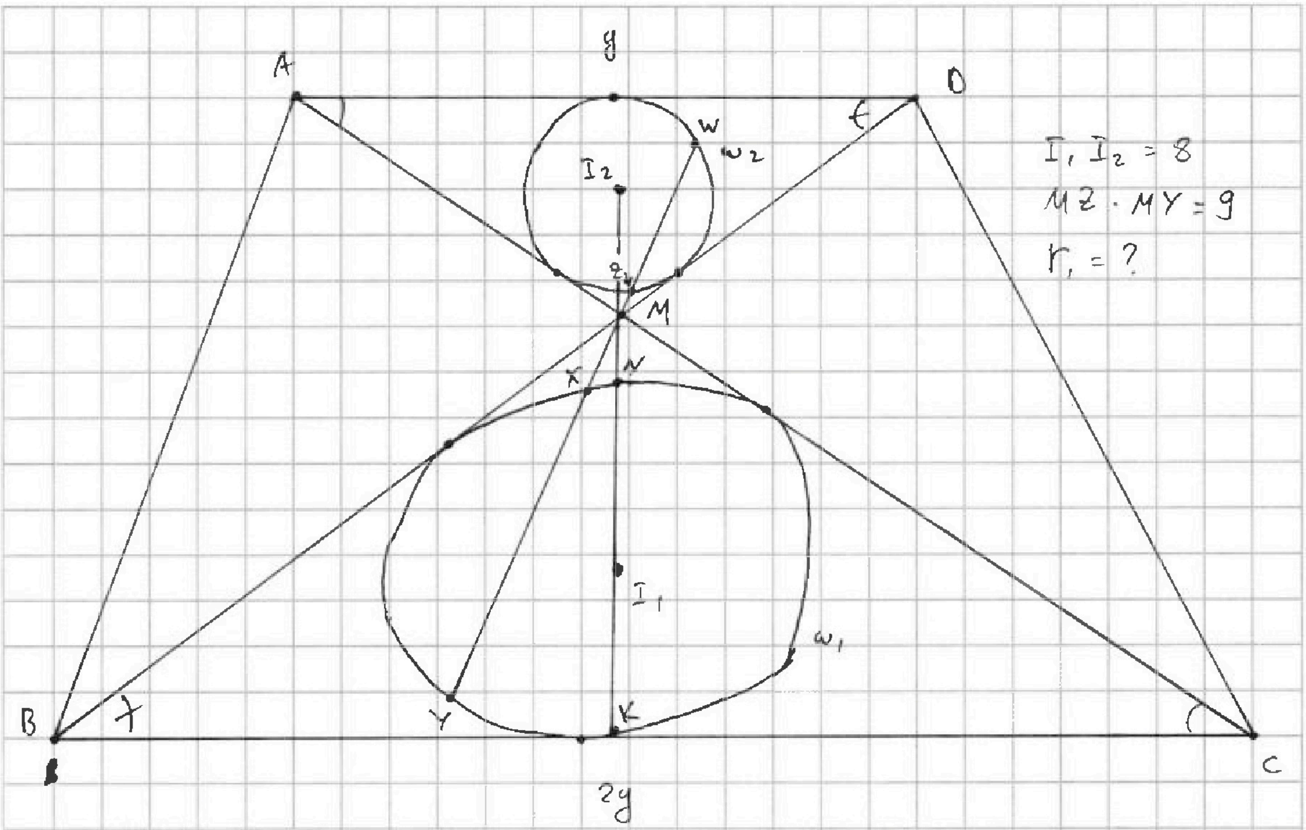
$q = 269 = 42 + 43 + 44 + 45 + 47 + 48$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$I_1 I_2 = 8$

$MZ \cdot MY = 9$

$r_1 = ?$

1) Стоит сказать, что точка M лежит на прямой $I_1 I_2$, т.к I_1 – центр окружности, вписанной в угол BMC => лежит на его биссектрисе, которая является также биссектрисой угла AMD => содержит I_2. Ну и очевидно, что эта биссектриса проходит через вершину обоих углов – точку M.

2) ABCD – трапеция => $\angle MBC = \angle MDA$, $\angle MCB = \angle MAD$ } как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущих BD, AC.

⇓

$\triangle MBC \sim \triangle MDA$,

$k = \frac{BC}{AD} = 2$

При этом они расположены так, что переходят друг в друга при гомотетиях в т. M.

То есть:

Пусть H_A^k – гомотетия с центром в т. A и коэффициентом k.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Тогда H_M^{-2}: $A \mapsto C$ $\triangle MBA \mapsto \triangle MDC$

$D \mapsto B$

$I_2 \mapsto I_1$

$Z \mapsto X$ $\omega_2 \mapsto \omega_1$

$W \mapsto Y$

И наоборот при $H_M^{-\frac{1}{2}}$.

3) $I_1M = 2I_2M$ (т.к. $I_2M \mapsto I_1M$ при H_M^{-2})

$\Downarrow$

$I_1I_2 = 8$

$I_1M + I_2M = 8$

$I_1M + \frac{I_1M}{2} = 8$

$\frac{3}{2} \cdot I_1M = 8$

$I_1M = \frac{8 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3}$.

4) $MX = 2MZ$ (т.к. $MZ \mapsto MX$ при H_M^{-2})

$\Downarrow$

$MZ \cdot MY = 9$

$\frac{MX}{2} \cdot MY = 9$

$MX \cdot MY = 18$.

5) Пусть прямая MI_1 пересекает ω_1 в точках N и K (N ближе к M, чем K).

Тогда $MN \cdot MK = (MI_1 - I_1M)(MI_1 + I_1K) =$
$= (MI_1 - r_1)(MI_1 + r_1) =$
$= MI_1^2 - r_1^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - r_1^2 = \frac{256}{9} - r_1^2$.

6) По теореме о секущей (для любой фиксированной точки вне окружности произведение секущей на её внешнюю часть постоянно) для окружности ω_1 и точки M имеем:

$MX \cdot MY = MN \cdot MK$

$18 = \frac{256}{9} - r_1^2$

$r_1^2 = \frac{256}{9} - 18 = \frac{256 - 18 \cdot 9}{9} = \frac{256 - 162}{9} = \frac{94}{9}$

$r_1 = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$

$\boxed{\text{Ответ: } r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}.}$

P.S.: рассуждения ~~с гомотетией~~ с гомотетией можно заменить кучей пар подобных треугольников, но с гомотетией легче.

P.P.S.: теорему о секущей можно заменить идеей о степени точки M относительно окружности ω_1, но её, возможно, придётся доказывать, а я этого делать не хочу, хоть это и не сложно.

P.P.P.S.: r_1 – это радиус окружности ω_1.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} \vee 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$

Пусть $\alpha = \frac{3\pi}{14}$, $2\alpha = \frac{3\pi}{7}$, $3\alpha = \frac{9\pi}{14}$.

Заметим, что $\frac{\pi}{6} < \alpha = \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4}$, т.к. если домножить всё неравенство на 84, то получим:

$\frac{84}{6}\pi < 84\alpha = 3\cdot\frac{84}{14}\pi < \frac{84}{4}\pi$

$14\pi < 84\alpha = 18\pi < 21\pi$, что является верным равенством.

Т.к. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{14}$, $\frac{\pi}{4} \in$ I четв., где функция $f(x) = \sin x$ возрастает, то:

$\sin\frac{\pi}{6} < \sin\frac{3\pi}{14} < \sin\frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{2} < \sin\frac{3\pi}{14} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Заметим также, что $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$, т.к. $\frac{2\sqrt{2}}{4} < \frac{3}{4}$, т.к. $2\sqrt{2} < 3$, т.к. $(2\sqrt{2})^2 < 3^2$, т.к. $8 < 9$, что является верным равенствам.

$\Downarrow$

$\cancel{\alpha = \frac{3\pi}{14}}$

$\sin\alpha = \sin\frac{3\pi}{14} \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

$5 - 4\sin 3\alpha \vee 3\sin\alpha - 4\cos 2\alpha$

$5 - 4\sin 3\alpha - 3\sin\alpha + 4\cos 2\alpha \vee 0$

$5 - 4(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) - 3\sin\alpha + 4(1 - 2\sin^2\alpha) \vee 0$

$5 - 12\sin\alpha + 16\sin^3\alpha - 3\sin\alpha + 4 - 8\sin^2\alpha \vee 0$

$16\sin^3\alpha - 8\sin^2\alpha - 15\sin\alpha + 9 \vee 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим теперь функцию

$f(x) = 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9.$

Теперь задача сводится к ~~два~~ сравнению

$f(\sin\alpha) \vee 0.$

Найдём промежутки знакопостоянства функции $f(x)$:

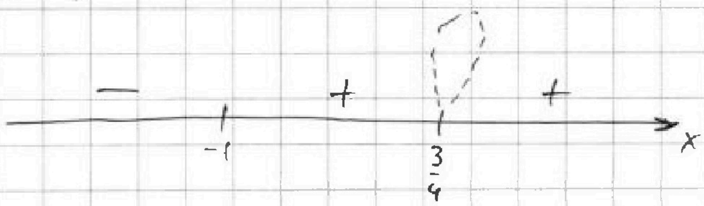
$f(x) = 0$

$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 = 0.$

Заметим, что $x = -1$ является корнем данного уравнения, так что вынесем множитель $(x+1)$:

$(x+1)(16x^2 - 24x + 9) = 0$

$(x+1)(4x-3)^2 = 0$



„метод интервалов"

~~Заметим~~

Заметим, что на интервале $\left(-1; \frac{3}{4}\right)$ функция ~~принимает~~ больше нуля.

$\sin\alpha \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \subset \left(-1; \frac{3}{4}\right)$

$\Downarrow$

$f(\sin\alpha) > 0$

$\Downarrow$

$16\sin^3\alpha - 8\sin^2\alpha - 15\sin\alpha + 9 > 0$

$\Downarrow$

$5 - 4\sin 3\alpha > 3\sin\alpha - 4\cos 2\alpha$:)

$\boxed{\text{Ответ: } 5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} > 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}}$

P.S.: оценка $\sin\frac{3\pi}{14} > \frac{1}{2}$ является излишней.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 2 вида пирамид:

(1) $\boxed{\text{Треугольные пирамиды}}$, т.е. в основании пирамиды лежит треугольник. ~~Треугольная пирамида состоит из 4-ёх вершин~~. Т.к. любые три точки лежат в одной плоскости и любой треугольник является выпуклым многоугольником, то способов выбрать треугольную пирамиду с вершинами в данных 12 точках будет C_4^{12}, т.к. в треугольной пирамиде есть 4 вершины.

$$C_4^{12} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = \frac{12!}{4!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{4!} = \frac{9\cdot \cancel{10}\cdot 11\cdot \cancel{12}\cdot 1\cdot 5}{\cancel{24}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}} =$$

$$= 5\cdot 9\cdot 11 = 45\cdot 11 = 495.$$

(2) $\boxed{\text{Нетреугольные пирамиды}}$, т.е. в основании лежит выпуклый n-угольник и $n \geq 4$. Тогда основание не может содержать те 4 точки, не лежащие в плоскости α, т.к. если такое случилось, то найдётся набор из ~~[illegible]~~ 4-ёх точек, среди которых есть точка, не лежащая в плоскости α, и которые лежат в одной плоскости. Но т.к. 4 точки лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α (~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ см. 2-ое предложение условие задачи) $\Rightarrow$ точка, не лежащая в плоскости α, лежит в плоскости α $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ основание любой нетреугольной пирамиды, каждая вершина которой является одной из 12 данных

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

точек, не содержит ни одну из точек, не лежащих в плоскости α $\Rightarrow$ лежит в плоскости α.

Заметим также, что все 8 точек в плоскости α лежат на одной окружности $\Rightarrow$ любой многоугольник с вершинами в данных точках – выпуклый, т.к. вписанный.

Тогда основание можно выбрать $\sum\limits_{i=4}^{8} C_i^8$ способами.

$$\sum_{i=4}^{8} C_i^8 = C_4^8 + C_5^8 + C_6^8 + C_7^8 + C_8^8 =$$

$$= \frac{8!}{4!\,4!} + \frac{8!}{5!\,3!} + \frac{8!}{6!\,2!} + \frac{8!}{7!\,1!} + \frac{8!}{8!\,0!} =$$

$$= \frac{5\cdot\cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{2\cdot 3}\cdot 4} + \frac{\cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{2\cdot 3}} + \frac{7\cdot 8}{2} + 8 + 1 =$$

$$= 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 163$$

Ну и осталось заметить, что вершина всех таких пирамид (здесь я имею ввиду вершину, не лежащую в плоскости основания) – это одна из точек, не лежащих в плоскости основания, = плоскости α, т.е одна из четырёх точек вне плоскости α. $4\cdot 163 = 652$

$495 + 652 = 1147$

$\boxed{\text{Ответ: } 1147.}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$p-q < p+q$

$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \le (a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$

$x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$

$p-q=a$, $p+q=b$, $2p=a+b$, $p=\frac{a+b}{2}$, $q=\frac{b-a}{2}$

$(p-q)(p+q)$

$\bar u\{x, y, z\}$

$\bar v\{\ln 25, \ln 75, \ln 125\}$

$x = \frac{\ln 45}{\ln 75 + \ln 125 + \ln 25} = \frac{\ln 45}{\ln 25}$

$\ln\frac{45}{25\cdot 75\cdot 125}$

$p+q>0$ $\quad p^2-q^2=1080$ $\quad 1080=a\cdot b$

$a<b$ $\quad \frac{b-a}{2}$

$\bar u\cdot\bar v \le |\bar u|\cdot|\bar v|$

$=\ln$

$\ln 45 \le \sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{(\ln 25)^2+(\ln 75)^2+(\ln 125)^2}$

$(p-q)(p+q)=1080$

$\frac{3}{5^6}$

$x^2+y^2+z^2 \ge \frac{(\ln 45)^2}{(\ln 25)^2+(\ln 75)^2+(\ln 125)^2}$

$p-q = a_j - a_i \in [1,6]\ i \ne j$

$x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125$

$\ln (\log_a b)^2$

$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$

$(\ln 45)^2$

$x^2 =$

$2x+3z=-3$ $\quad x=3k$

$2k+z=-1$ $\quad 2k=-z-1$

$\log_a b^{\log_a b}$

$x:3$ $\quad 6k+3z=-3$

$25^x\cdot 75^y\cdot 125^z = 45$

$25\cdot 3$

$\frac{-18}{10}=-1.$

$5^{2x}\cdot 5^{2y}\cdot 3^y\cdot 5^{3z}=45$

$\frac{D}{4}=81-25=56$

$5^{2x+2y+3z}\cdot 3^y = 5\cdot 3^2$

$x=$

$p=S(M)-a_i$ $\quad q=S(M)-a_j$

$x^2+z^2 \ge 1 \ge \frac{9}{13}$

$5z^2+18z+5=0$

$y=2$

$y=2$

$2x+2y+3z=1$

$2x+4+3z=1$ $\quad \min(x^2+y^2+z^2)=5$

$p>q$

$2x+3z=-3$

$x^2+z^2=1$

$x=-\frac{3}{2}(z+1)$

1080

$x^2+z^2 -$

$\frac{9}{4}(z^2+2z+1)+z^2=1$

$(2x+3z)^2 \le (x^2+z^2)(2^2+3^2)$

$9z^2+18z+9+4z^2=4$

9

$x^2+z^2 \ge \frac{9}{13}$

$9z^2+18z+5=0$

$5z^2+18z+5$

2	2	2	3	3
1080	540	270	135	45

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(черновик)

основание $\subset \alpha$

$4\left(2^{12} - \left(C_0^{12} + C_1^{12} + C_2^{12}\right)\right) =$

$4\left(4096 - (1 + 12 + 66)\right) =$

4

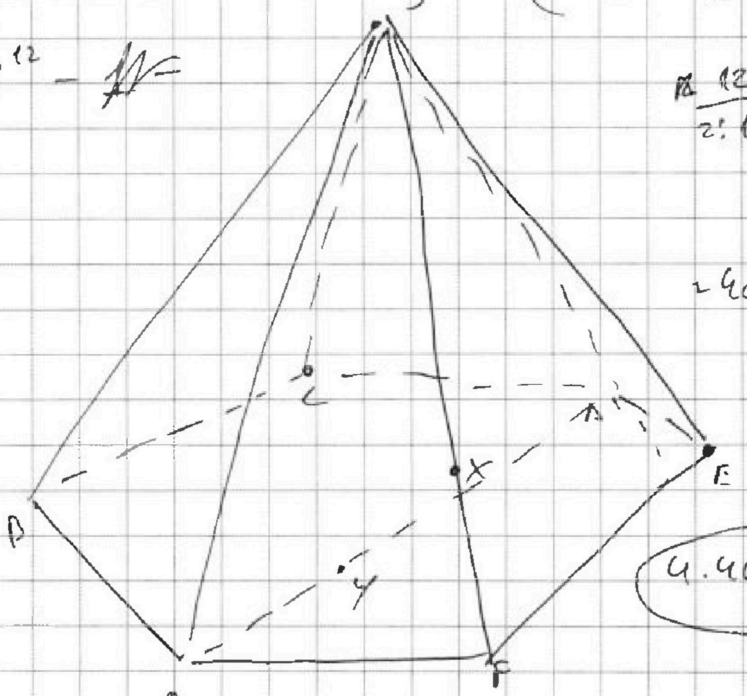
$2^{12} -$

$\frac{12!}{2!\,10!} = \frac{11 \cdot 12}{2} =$

$11 \cdot 6 = 66$

$= 4096 - 79 =$

$= 4017$



$4 \cdot 4017 = 16068$

основание из 4-ёх точек вне α

$C_3^4 = \frac{4!}{3!\,1!} = 4 \cdot 12 = 48$

$C_1^{12} \cdot C_2^4 + C_2^{12} \cdot C_1^4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
x	x	x	x	x	x	x

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$\sqrt{\frac{47}{3\sqrt{2}}}$ $\frac{\sqrt{94}}{6}$ 11

$p = 271$

$q = 269$ $p - q = 2$

$= \sqrt{\frac{47}{18}}$

$a_m - a_n = 2$ $3+8+10+40$

$MZ \cdot MW = \frac{9}{2}$ 31 $\frac{9}{2} = \frac{64}{9} - r_2^2$

$a_m = a_n + 2$

$n \in [1;5]$, $m \in [3;7]$ $r_2^2 = \frac{64}{9} - \frac{9}{2} =$

$n = 1$ $S(M) = 7a_1 + (1+2+3+\dots+6) = 7 \cdot 7 = 21$ $= \frac{128-81}{18} =$

$MX = 2MZ$

$S(M) = 7a_1 + 21$

$\triangle AMD \to \triangle CMB$

$\omega_1 \to \omega_2$

$p - q = 3$

$p + q = 360$

$2p = 363$

$MZ \cdot MY =$

$r_1 = 2r_2$ $I_2M = 2\frac{2}{3}$

$I_1M = 2I_2M$ $I_1M = 5\frac{1}{3}$

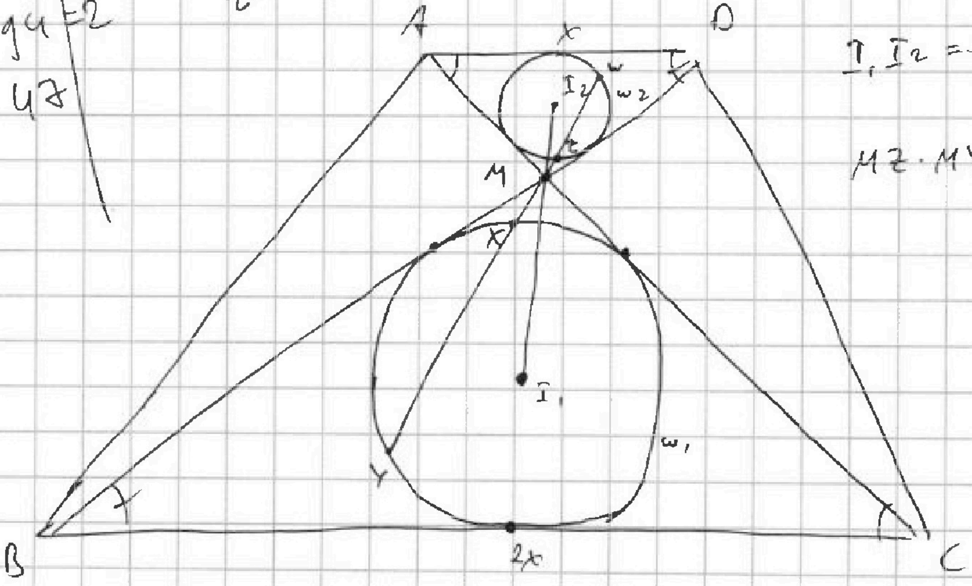
$3I_2M = 8$

$94 = 2$

47

$I_1I_2 = 8$

$MZ \cdot MY = 9$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

(ЧЕРНОВИК)

$\frac{\pi}{4}$

$16x^2 - 24x + 9 = 0$

$5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} \vee 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$

$\frac{D}{4} = b^2 - ac = (12)^2 - 16\cdot 9 =$

$= 144 -$

пусть $\alpha = \frac{3\pi}{14}$, тогда $2\alpha = \frac{3\pi}{7}$, $3\alpha = \frac{9\pi}{14}$

$\frac{\pi}{6}$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$

$(x+1)(4x-3)^2$

$5 - 4\sin 3\alpha \vee 3\sin\alpha - 4\cos 2\alpha$

$\frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4}$

$\sin\frac{3\pi}{14}$

$\frac{6\pi}{28} < \frac{7\pi}{28}$

$\sin 3\alpha = 3\sin^3\alpha - 4\sin\alpha$

$\frac{3\pi}{14} < \frac{1}{6}$

$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) =$

$-$ $+$ $+$ -1 $\frac{3}{4}$ x

$\sqrt{2}$

$\frac{2}{42} = \frac{1}{21}$

$\frac{3}{14} - \frac{1}{6} = \frac{9-7}{42}$

$= \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha =$

$= \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + \cancel{\cos\alpha}\ 2\sin\alpha\cos^2\alpha =$

$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) = 2\sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{2}$

$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha$

$5\cdot 7\cdot 2 =$

$= 35\cdot 2 = 70$

$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$

$-16 - 8 + 15 + 9 =$

$-24 + 24 = 0$

$\frac{2\sqrt{2}}{4} < \frac{3}{4}$

$5 - \cancel{4\sin}\ 4(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) - 3\sin\alpha + 4(1 - 2\sin^2\alpha) \vee 0$

$2\sqrt{2} < 3$

$5 - \cancel{12\sin\alpha} + \cancel{16\sin^3\alpha} - \cancel{3\sin\alpha} + 4 - \cancel{8\sin^2\alpha} \vee 0$

$4\cdot 2 < 9$

$8 < 9$

$16\sin^3\alpha - 8\sin^2\alpha - 15\sin\alpha + 9 \vee 0$

	16	-8	-15	9
-1	16	-24	9	0

$16\sin^3\alpha + 9 \vee 8\sin^2\alpha + 15\sin\alpha$

$\frac{14\pi}{84} < \frac{18\pi}{84} < \frac{21\pi}{84}$

$f(x) = 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9$

$f(x) = (x+1)(16x^2 - 24x + 9)$