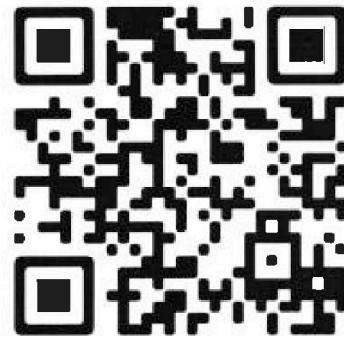




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 12

- [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
- [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
- [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 1080$.
- [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.
- [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$ или $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$?
- [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 4 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
- [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Введём обозначение нашей арифметической прогрессии:

$$a_1 = 132$$

$$d = 2$$

$$[a_1] = \text{ }^\circ$$

$$[d] = \text{ }^\circ$$

$$[] = \text{ }^\circ$$

Это то, что все в правильном порядке

Пусть в нашем многоугольнике n вершины.

Обозначим за S_n сумму всех углов в ~~внешних~~ - внутреннем n -угольнике.

С одной стороны, $S_n = 180(n-2)$,

с другой же, что сумма первых n членов арифм. прогрессии =

$$= \cancel{2a_1 + (n-1)d} \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

↓

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = 180(n-2)$$

$$\frac{2 \cdot 132 + 2(n-1)}{2} \cdot n = 180(n-2)$$

$$(132 + n-1)n = 180(n-2)$$

$$132n + n^2 - n = 180n - 360$$

$$n^2 + (132 - 1 - 180)n + 360 = 0$$

$$n^2 + (-49)n + 360 = 0$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

- решаем, как обычные квадратные уравнения по

$$D = (-49)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 360 = 2401 - 1440 = 961 = 31^2$$

; формула:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n = \frac{-49 \pm 31}{2} = \{9; 40\}$$

Замечаем, что нас просят найти максимальное малое n .

$$\max\{9; 40\} = 40 \Rightarrow$$

Ответ: 40.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$$

$$\ln(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z) = \ln 45$$

$$\ln(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z) = \ln 45$$

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$$

$$(5^2)^x \cdot (5^2 \cdot 3)^y \cdot (5^3)^z = 5 \cdot 3^2$$

$$5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 5 \cdot 3^2$$

¶

~~y~~

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5 \cdot 3^2$$

↓

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=1, \\ y=2; \end{cases} \Rightarrow 2x+2 \cdot 2+3z=1 \\ 2x+4+3z=1 \\ 2x+3z=-3.$$

Итак, уложение у фиксировано и равно 2

↓

$$\min(x^2+y^2+z^2) = \min(x^2+z^2) + y^2 = \min(x^2+z^2) + 2^2 = \min(x^2+z^2) + 4$$

↓

Задача сводится к нахождению $\min(x^2+z^2)$, если ~~y~~ $x, z \in \mathbb{Z}$

$$2x+3z=-3.$$

$$2x+3z=-3$$

$$x = -\frac{3}{2}(z+1)$$

— м.к. $x \in \mathbb{Z}$, то число z должно быть нечётным.

$$\begin{aligned} x^2+z^2 &= \left[-\frac{3}{2}(z+1)\right]^2 + z^2 = \frac{9}{4}(z^2+2z+1) + z^2 = \frac{9}{4}z^2 + \frac{9}{2}z + \frac{9}{4} + z^2 = \\ &= \frac{13}{4}z^2 + \frac{9}{2}z + \frac{9}{4}. \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } f(z) = \frac{13}{4}z^2 + \frac{9}{2}z + \frac{9}{4}.$$

Найдем $\min(x^2 + z^2) = \min(f(z))$ при целом кратном z .

$f(z)$ - парабола с вершиной вниз

$$\begin{aligned} \min(f(z)) \text{ при } z \in \mathbb{Z} \text{ достигается при } z = -\frac{9}{20} = -\frac{\frac{9}{2}}{2 \cdot \frac{13}{4}} = \\ = -\frac{\frac{9}{2}}{\frac{13}{2}} = -\frac{9}{13} \end{aligned}$$

Ближайшее целое к $-\frac{9}{13}$ это -1 и 0 .

$$\text{так } f(-1) = \frac{13}{4} - \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{13 - 18 + 9}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

$z_0 = -1$ это ближайшее целое кратное к оси симметрии параболы, а также $f(z_0) = f(-1) = 1 \in \mathbb{Z}$

$$\min(x^2 + z^2) = f(z_0 = -1) = 1.$$

↓

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) = 1 + 4 = 5.$$

Ответ: 5.

и достигается это значение при
 $x=0, y=2, z=-1$

P.S.: я бы использовал КБ(II) для нахождения $\min(x^2 + z^2)$, но забыл, т.к. не помню формулы его применимости, если кто знает скажи.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p^2 - q^2 = 1080$$

$$(p-q)(p+q) = 1080$$

Пусть $M = \{o_1, o_2, o_3, \dots, o_7\}$, члены $o_i = o_{i-1} + 1$, $i \in [2; 7]$.
Пусть $S(M) = \sum_{i=1}^7 o_i = 7o_1 + (1+2+\dots+6) = 7o_1 + 21$

тогда $p = S(M) - o_n$ для некоторого $n \in [1; 7]$,
 $q = S(M) - o_m$ для некоторого $m \in [1; 7]$,
причем $n \neq m \Rightarrow o_n \neq o_m \Rightarrow p \neq q$.

в

$$p - q = o_m - o_n \in [1; 6].$$

Рассмотрим все 6 случаев:

(1) $p - q = 1 \Rightarrow p + q = 1080$

$$\begin{cases} p - q = 1, \\ p + q = 1080; \end{cases} \textcircled{+}$$

$$2p = 1081 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset.$$

(3) $p - q = 3 \Rightarrow p + q = 360$

$$\begin{cases} p - q = 3, \\ p + q = 360; \end{cases} \textcircled{+}$$

$$2p = 363 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset$$

(2) $p - q = 2 \Rightarrow p + q = 540$

$$\begin{cases} p - q = 2, \\ p + q = 540; \end{cases} \textcircled{+}$$

$$2p = 542$$

$$p = 271$$

$$q = p - 2 = 269$$

269, 271 — простые числа

$$p - q = 2 \Rightarrow o_m - o_n = 2 \Rightarrow o_n + 2 = o_m.$$

тогда $n \in [1; 5]$, $m \in [3; 7]$.

Рассмотрим 5 подсчетов:

1. $n=1 \Rightarrow p = S(M) - o_1 = 7o_1 + 21 - o_1 = 6o_1 + 21$

$$6o_1 + 21 = 271$$

$$6o_1 = 251$$

$$o_1 = \frac{251}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset.$$

2. $n=2 \Rightarrow p = S(M) - o_2 = 7o_1 + 21 - (o_1 + 1) = 6o_1 + 20$

$$6o_1 + 20 = 271$$

$$6o_1 = 251$$

$$o_1 = \frac{251}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. n=3 \Rightarrow p = 5(M) \Rightarrow -Q_3 = 20, +21 - (2, +2) = 60, +19$$

$$60, +19 = 281$$

$$60, = 252$$

$$Q_1 = \frac{252}{6} = 42 \Rightarrow M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$$

$$4. n=4 \Rightarrow \dots \Rightarrow Q_1 = \frac{253}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset$$

$$5. n=5 \Rightarrow \dots \Rightarrow Q_1 = \frac{254}{6} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset.$$

$$(4) p-q = 4 \Rightarrow p+q = 280$$

$$\begin{cases} p-q = 4, \\ p+q = 280; \oplus \end{cases}$$

$$2p = 276$$

$$p = \frac{276}{2} = 138$$

~~$$p = 138$$~~

$$q = p-4 = 138 - 4 = 134 = 2 \cdot 67$$

~~$$q = 134$$~~

q - составное $\Rightarrow \emptyset$

$$(5) p-q = 5 \Rightarrow p+q = 216$$

$$\begin{cases} p-q = 5, \\ p+q = 216; \oplus \end{cases}$$

$$2p = 221$$

$$p = \frac{221}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset.$$

$$(6) p-q = 6 \Rightarrow p+q = 180$$

$$\begin{cases} p-q = 6, \\ p+q = 180; \oplus \end{cases}$$

$$2p = 186$$

$$p = \frac{186}{2} = 93 = 3 \cdot 31$$

~~$$p = 93$$~~

p - составное $\Rightarrow \emptyset$.

Ответ: $M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$

P.S.: множество M является максимум, потому что при переборе вариантов это оказалось единственным возможным вариантом.

Он получился в случае ~~(2)~~ подсчета 3., т.е. при $p-q = 2$

и $n=3$. При этом $p=281 = 42+43+45+46+47+48$,

$$q = 269 = 42+43+44+45+47+48.$$

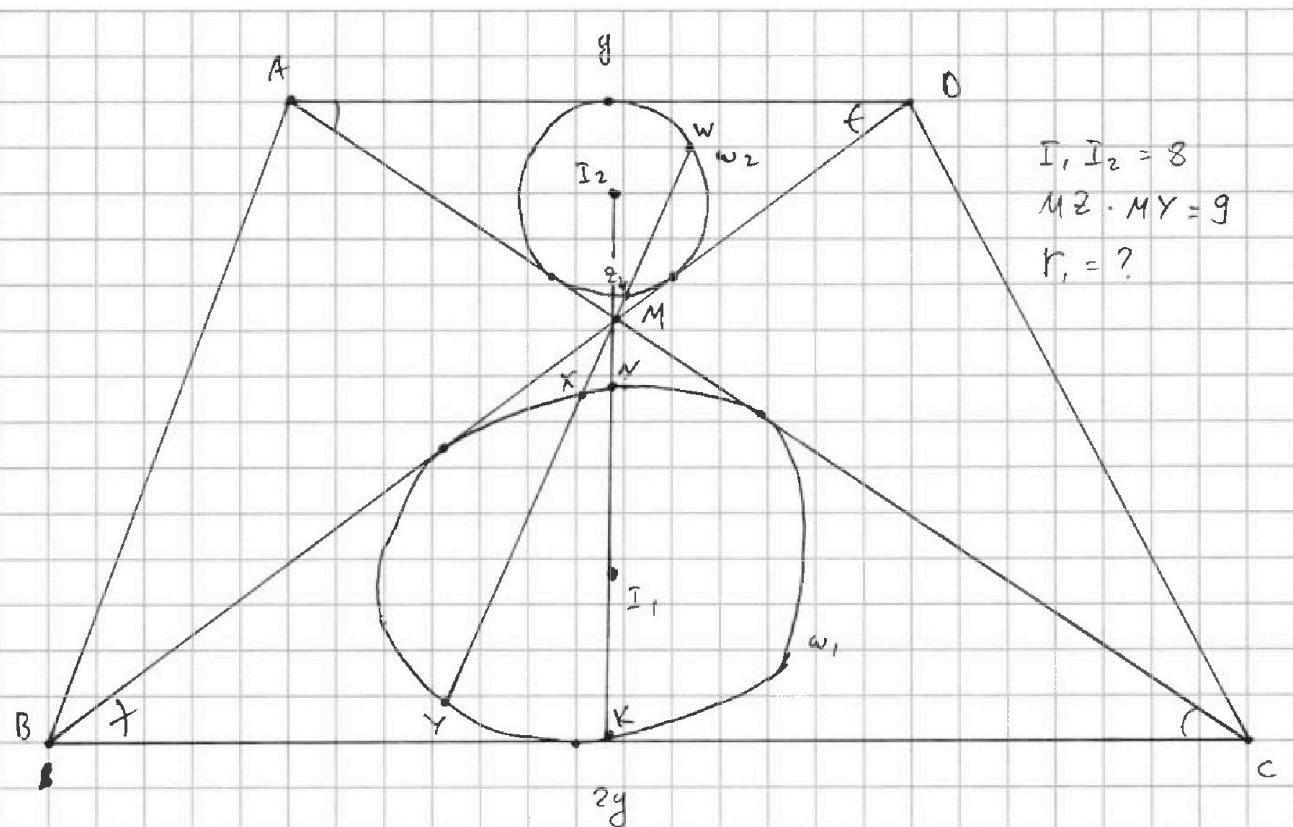


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Докажем, что точка M лежит на окружности I_1, I_2 , т.к.
 I_1 - центр окружности, вписанной в угол $BMC \Rightarrow$ лежит на его биссектрисе, которая является также биссектрисой угла $AMC \Rightarrow$ содержит I_2 . Ну и очевидно, что эта биссектриса проходит через вершину обоих углов - ~~угла~~ точки M .

2) $ABCD$ - трапеция $\Rightarrow \angle MBC = \angle MDA$ } как находим
 $\angle MCB = \angle MAD$ } лежащие при $AD \parallel BC$
 \angle и фигурах BO, AC .

$$\triangle MBC \sim \triangle MDA,$$

$$k = \frac{BC}{AD} = 2$$

При этом они расположены так, что переходят друг в друга при гомотетии в т. M .

Поэтому:

Пусть H_A^k - гомотетия с центром в т. A и коэффициентом k .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Порядок } H_M^{-2}: A \mapsto C \\ D \mapsto B \quad \Delta MDA \mapsto \Delta MBC$$

$$I_2 \mapsto I, \\ Z \mapsto X \quad \omega_2 \mapsto \omega, \\ W \mapsto Y$$

И наоборот при H_M^{-2} .

$$3) I_{1M} = 2I_2M \quad (\text{п.к. } I_2M \mapsto I_{1M} \text{ при } H_M^{-2})$$

у
~~Установка~~

$$I_1 I_2 = 8$$

$$I_1M + I_2M = 8$$

$$I_1M + \frac{I_1M}{2} = 8$$

$$\frac{3}{2} \cdot I_1M = 8$$

$$\underline{\underline{I_1M = \frac{8 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3}}}$$

$$4) MK = 2MZ \quad (\text{п.к. } MZ \mapsto MX \text{ при } H_M^{-2})$$

у

$$MZ \cdot MY = 9$$

$$\underline{\underline{\frac{MK}{2} \cdot MY = 9}}$$

$$MX \cdot MY = 18.$$

5) Рассмотрим $M\bar{I}_2$, пересекающее ω , в точках N и K .
(N ближе к M , чем K).

$$\begin{aligned} \text{Порядок } MN \cdot MK &= (MI_1 - I_1M)(MI_1 + I_1K) = \\ &= (MI_1 - r_i)(MI_1 + r_i) = \\ &= MI_1^2 - r_i^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - r_i^2 = \frac{256}{9} - r_i^2. \end{aligned}$$

6) По теореме о секущей (две в любой фиксированной точке вне окружности произведение секущей на её внешнюю часть постоянно)
две окружности ω , и точки M такие:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$Mx \cdot My = MN \cdot MK$$

$$18 = \frac{256}{9} - r^2$$

$$r^2 = \frac{256}{9} - 18 = \frac{256}{9} - \frac{162}{9} = \frac{94}{9}$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{94}{9}} = \frac{\sqrt{94}}{3}$$

Ответ: $r_1 = \frac{\sqrt{94}}{3}$

P.S.: рассуждение с гомотетией можно заменить кучей пар подобных треугольников, но с гомотетией легче.

P.P.S.: теорему о секущей можно заменить теоремой о симметрии относительно окружности ω_1 , но её, возможно, придется доказывать, а это делать не хочу, хоть это и можно.

P.P.P.S.: r_1 — это радиус окружности ω_1 .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \quad \checkmark \quad 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\text{если } d = \frac{3\pi}{14}, \quad 2d = \frac{3\pi}{7}, \quad 3d = \frac{9\pi}{14}.$$

Заметим, что $\frac{\pi}{6} < d = \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4}$, т.к. если продолжить вправо не равенство на 84° , то получим:

$$\frac{84}{6}\pi < 84d = 3 \cdot \frac{84}{14}\pi < \frac{84}{4}\pi$$

$14\pi < 84d = 18\pi < 21\pi$, что является верным равенством.

т.к. $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{14}, \frac{\pi}{4} \in \text{I четв.}$, где функция $f(x) = \sin x$ возрастает, то:

$$\sin \frac{\pi}{6} < \sin \frac{3\pi}{14} < \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2} < \sin \frac{3\pi}{14} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Заметим также, что $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$, т.к. $\frac{2\sqrt{2}}{4} < \frac{3}{4}$, т.к. $2\sqrt{2} < 3$,

т.к. $(2\sqrt{2})^2 < 3^2$, т.к. $8 < 9$, что является верным равенством.

↓

$$\sin d = \sin \frac{3\pi}{14} \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right).$$

$$5 - 4 \sin 3d \quad \checkmark \quad 3 \sin d - 4 \cos 2d$$

$$5 - 4 \sin 3d \cancel{=} -3 \sin d + 4 \cos 2d \quad \text{V O}$$

$$5 - 4(3 \sin d - 4 \sin^3 d) - 3 \sin d + 4(1 - 2 \sin^2 d) \quad \text{V O}$$

$$5 - 12 \sin d + 16 \sin^3 d - 3 \sin d + 4 - 8 \sin^2 d \quad \text{V O}$$

$$16 \sin^3 d - 8 \sin^2 d - 15 \sin d + 9 \quad \text{V O}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим теперь функцию

$$f(x) = 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9.$$

Проверяя якоте, входит ли в ~~на~~ сравнение

$$f(\sin \alpha) > 0.$$

Найдём промежутки знакопостоянства функции $f(x)$:

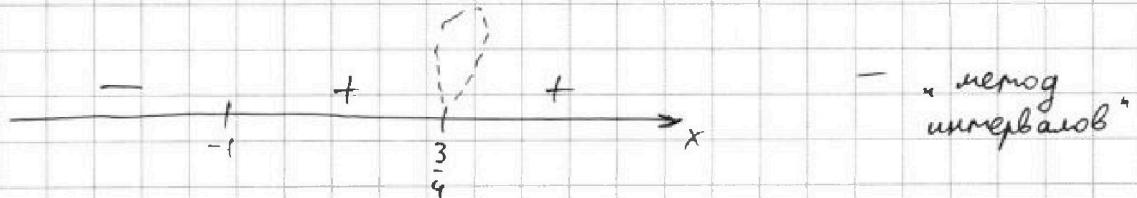
$$f(x) = 0$$

$$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 = 0.$$

Заметим, что $x = -1$ является корнем данного уравнения, так что вынесем множитель $(x + 1)$:

$$(x + 1)(16x^2 - 8x + 9) = 0$$

$$(x + 1)(4x^2 - 2x + 9) = 0$$



Замечание

Замечаем, что на интервале $(-1; \frac{3}{4})$ функция ~~зарисована~~ ~~зарисована~~ выше нуля.

$$\sin \alpha \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \subset (-1; \frac{3}{4})$$



$$f(\sin \alpha) > 0$$



$$16 \sin^3 \alpha - 8 \sin^2 \alpha - 15 \sin \alpha + 9 > 0$$



$$5 - 4 \sin 3\alpha > 3 \sin \alpha - 4 \cos 2\alpha$$

$$\text{Ответ: } 5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

П.5: задача обладает ~~зарисовкой~~ ~~зарисовкой~~ ~~зарисовкой~~.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 2 вида пирамид:

(1) Прямоугольные пирамиды, т.е. в основании пирамиды лежит прямоугольник. ~~Прямоугольные пирамиды~~ ~~пирамиды~~ ~~из 4~~ ~~вершин~~. т.к. любые 4 точки лежат в одной плоскости и любой треугольник является выпуклым многоугольником, то способов выбрать прямоугольную пирамиду с вершинами в данных 12 точках будет C_4^{12} , т.к. в прямоугольной пирамиде есть 4 вершины.

$$C_4^{12} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{4!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 5}{34 \cdot 2 \cdot 1} = \\ = 5 \cdot 9 \cdot 11 = 45 \cdot 11 = 495.$$

(2) Непрямоугольные пирамиды, т.е. в основании лежит выпуклый n -угольник и $n \geq 4$. Тогда основание не может содержать не 4 точки, не лежащие в плоскости α , т.к. если такая плоскость, то найдется набор из ~~меньше~~ 4-х точек, среди которых есть такая, не лежащая в плоскости α , и которая лежит в одной плоскости. Но т.к. 4 точки лежат в одной плоскости, то эта плоскость — α (~~плоскость~~ ~~н.о.~~ ~~н.о.~~ и. 2-ое предложение условия задачи) \Rightarrow такая, не лежащая в плоскости α , лежит в плоскости α \Rightarrow противоречие \Rightarrow основание любой непрямоугольной пирамиды, каждая вершина которой лежит в одной из 12 данных



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

может, не содержит ли одну из ногек, не лежащих в плоскости $\ell \Rightarrow$ лежит в плоскости ℓ .

Заметим также, что все 48 ногек в плоскости ℓ лежат на одной окружности \Rightarrow любой многоугольник с вершинами в данных ногках - выпуклый, т.к. оваленный.

Приле основание можно выбрать $\sum_{i=4}^8 c_i^8$ способами.

$$\cancel{\text{XXXXXX}} \quad \sum_{i=4}^8 c_i^8 = C_4^8 + C_5^8 + C_6^8 + C_7^8 + C_8^8 =$$

$$= \frac{8!}{4!4!} + \frac{8!}{5!3!} + \frac{8!}{6!2!} + \frac{8!}{7!1!} + \frac{8!}{8!0!} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8}{\cancel{2} \cdot 4} + \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 8}{\cancel{2} \cdot 4} + \frac{7 \cdot 8}{2} + 8 + 1 =$$

$$> 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 163$$

Но и остались замечать, что вершина всех ногок лежит (лежит в данной выпуклой вершине, не лежащей в плоскости основания) - это одна из ногек, не лежащих в плоскости основания, = плоскости ℓ , т.е. одна из четырех ногек вне плоскости ℓ .

$$4 \cdot 163 = 652$$

$$495 + 652 = 1147$$

$$\boxed{\text{Ответ: } 1147.}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

[ЧЕРНОВИК]

$$p-q < p+q$$

$$(0,6_1 + 0,6_2 + 0,6_3)^2 \leq (0,2 + 0,2 + 0,2) \cdot (0,2 + 0,2 + 0,2)$$

$$x \ln 25 + y \ln 25 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$\frac{p-q=0}{p+q=0} \cdot \frac{2p=2a+b}{p=a+b}$$

$$\bar{U} \{ x, y, z \}$$

$$(p-q)(p+q)$$

$$x = \frac{\ln 45}{\ln 25 + \ln 125 + \ln 25} = \frac{p+q}{p+2a+b}$$

$$\bar{Z} \bar{V} \{ \ln 25, \ln 25, \ln 125 \}$$

$$\bar{x}, \bar{y} \leq | \bar{u} |, | \bar{v} |$$

$$r^{2a+b}$$

$$p^2 - q^2 = 1080 \quad 1080 = 0 \cdot b \quad \frac{q=2b-a-e}{e < b} \quad \frac{p=a+b}{p=r}$$

$$\ln 45 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{(\ln 25)^2 + (\ln 25)^2 + (\ln 125)^2}$$

$$(\ln 45)^2 \quad (p-q)(p+q) = 1080$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(\ln 25)^2 + (\ln 25)^2 + (\ln 125)^2}{2}$$

$$\frac{2b-a-3}{2b+2a-25} = \frac{3}{5}$$

$$x \ln 25 + y \ln 25 + z \ln 125$$

$$\begin{aligned} & (\ln 25)^2 \\ & (\log_e 6)^2 \\ & \log_e 6 \end{aligned}$$

$$\ln 25^x + \ln 25^y + \ln 125^z = \ln 45$$

$$x^2 = \frac{2x+3z}{2x+3z} = 3 \quad x^{2k} = 3^2$$

$$25^x \cdot 25^y \cdot 125^z = 45 \quad x^{2k} = 25 \cdot 3 \quad x^{2k} = 25 \cdot 3 \quad x^{2k} = 25 \cdot 3$$

$$5^{2k} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 3^{2z} = 45$$

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5 \cdot 3^2$$

$$x^{2k} = 25$$

$$x^2$$

$$x^2 + z^2 - 1 \geq \frac{9}{13}$$

$$5^2 \times (8x+5)^0$$

$$y=2$$

$$2x+2y+3z = 1$$

$$2x+4+3z = 1 \Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)=5$$

$$x = -\frac{3}{2}(z-1)$$

$$2x+3z = -3$$

$$x^2+z^2=1$$

$$1080$$

$$x^2 + z^2 -$$

$$(2x+3z)^2 \leq (x^2+z^2)(2^2+3^2) \quad \frac{9}{4}(2^2+3^2)+z^2=1$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1080 & 225 & 125 & 5 \end{array}$$

$$9$$

$$9$$

$$x^2 + z^2 \geq \frac{9}{13} \quad 9^2 + (8z+4z)^2 = 4$$

$$5^2 + (8z+4z)^2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(Черновик)

основание $\triangle ABC$

$$4 \left(2^{12} - (C_0^{12} + C_1^{12} + C_2^{12}) \right) =$$

$$4 (4096 - (1 + 12 + 66)) =$$

4

$$2^{12} - 81 =$$

$$\frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12}{2} =$$

$$11 \cdot 6 = 66$$

$$= 4096 - 29 =$$

$$= 4067$$

$$4 \cdot 4067 = 16268$$

основание из 4-х чисел было 2

$$C_3^4 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4 \cdot 1 = 4$$

$$C_1^{12} \cdot C_2^4 + C_2^{12} \cdot C_1^4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$$P = 72\pi$$

$$q = 269$$

$$P - q = 2$$

$$\frac{q^2}{3} \cancel{\frac{q^2}{6}}$$

$$\frac{q^2}{6}$$

11

$$Q_m - Q_n = 2$$

$$348 + 10 + 40$$

$$\frac{q^2}{18}$$

$$Q_m = Q_n + 2$$

$$Mz \cdot MW = \frac{9}{2} \quad (31)$$

$$\frac{9}{2} = \frac{64}{9} - r^2$$

$$n \in [1; 5], m \in [3; 2]$$

$$r^2 = \frac{64}{9} - \frac{9}{2} =$$

$$n=1 \quad S(M) = 20_1 + 6_1(1+2+3+\dots+6) = 66 \quad 7-7=21 \quad - \frac{128}{18} = Mz \cdot MX = 2 Mz$$

$$S(M) = 20_1 + 2n$$

$$P - q = 3$$

$$P + q = 360$$

$$2P = 363 \quad \begin{array}{l} \cancel{P} \\ \cancel{q} \\ \cancel{r} \\ \cancel{s} \\ \cancel{t} \\ \cancel{u} \end{array}$$

$$q = 2$$

$$48$$

$$\frac{2 \cdot 9}{3} + \frac{h \cdot 5}{2} + \frac{9 \cdot 2r}{2} + \frac{9 \cdot 5}{2} + Q_2$$

$$Mz \cdot MY =$$

$$I_2 M = 2 \frac{2}{3}$$

$$r_1 = 2r_2 \quad I_2 M = 2 \frac{2}{3}$$

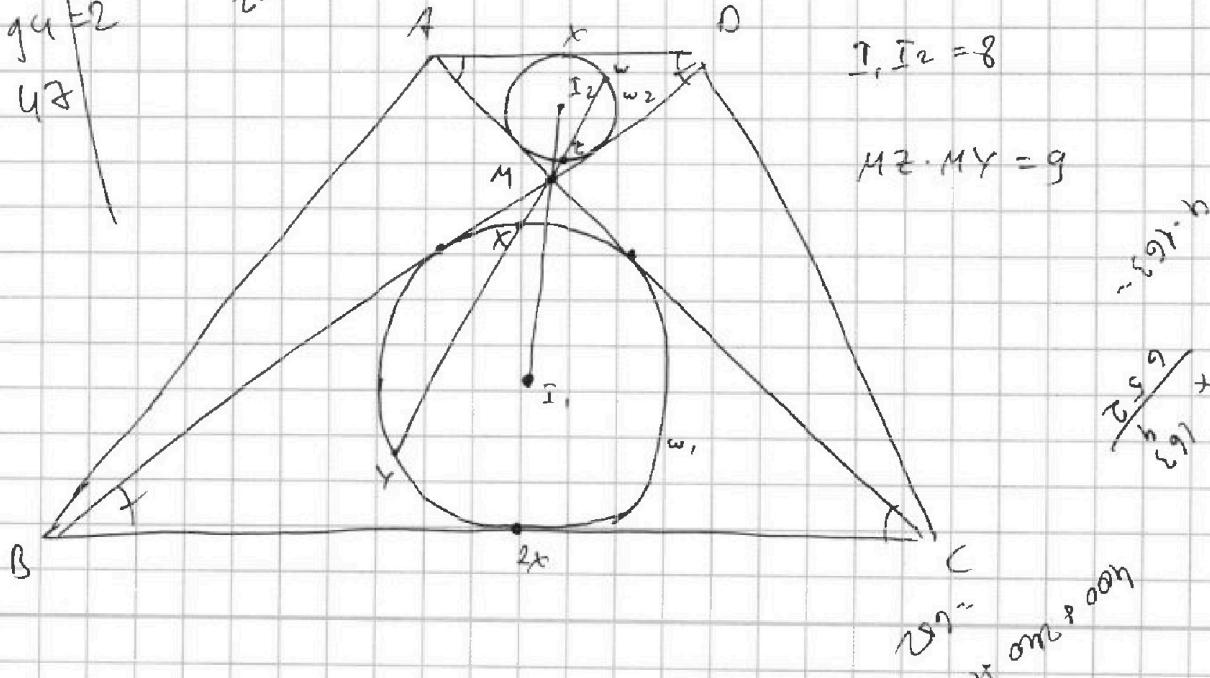
$$I_1 M = 5 \frac{1}{3}$$

$$3I_2 M = 8$$

$$I_1, I_2 = 8$$

$$Mz \cdot MY = 9$$

$$\sim 621.7$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(ЧЕРНОВИК)

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \quad \checkmark \quad 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$16x^2 - 24x + 9 = 0$$

$$\frac{b^2}{4} = k^2 - ac = (12)^2 - 16 \cdot 9 = 144 -$$

$$\text{нужно } d = \frac{3\pi}{14}, \text{ тогда } 2d = \frac{3\pi}{7}, \quad 3d = \frac{9\pi}{14}$$

$$5 - 4 \sin 3d \quad \checkmark \quad 3 \sin d - 4 \cos 2d$$

$$\cos^2 d - \sin^2 d = (x+1)(4x-3)^2$$

$$\sin 3d = 3 \sin^3 d - 4 \sin d$$

$$\frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \frac{3\pi}{14} < \frac{\pi}{28}$$

$$\sin 3d = \sin(3d + 2\pi) = \sin d + \cos d \sin 2d =$$

$$\frac{3\pi}{14} - \frac{1}{6} = \frac{9-7}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} = \sin d \cos 2d + \cos d \sin 2d =$$

$$= \sin d (1 - 2 \sin^2 d) + 2 \sin d \cos d =$$

$$= \sin d - 2 \sin^3 d + 2 \sin d (1 - \sin^2 d) = \sin d - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sin d - 2 \sin^3 d + 2 \sin d - 2 \sin^3 d = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} & 5 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{20} \\ & - 25 \cdot \frac{7}{14} \cdot \frac{20}{28} \\ & \boxed{\sin 3d = 3 \sin d - 4 \sin^3 d} \end{aligned}$$

$$- (16 - 3 + 15 + 9) = \frac{12}{2} < \frac{3}{4}$$

$$5 - 4(3 \sin d - 4 \sin^3 d) - 3 \sin d + 4(1 - 2 \sin^2 d) \quad \checkmark 0$$

$$5 - 12 \sin d + 16 \sin^3 d - 3 \sin d + 4 - 8 \sin^2 d \quad \checkmark 0 \quad 4 \cdot 2 < 9$$

$$16 \sin^3 d - 8 \sin^2 d - 15 \sin d + 9 \quad \checkmark 0 \quad 16 - 8 - 15 < 9$$

$$16 - 24 + 9 = 0$$

$$16 \sin^3 d + 9 \quad \checkmark 8 \sin^2 d + 15 \sin d$$

$$f(x) = 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 \quad \frac{14\pi}{84} < \frac{18\pi}{84} < \frac{2\pi}{84}$$

$$f(x) = (x+1)(16x^2 - 24x + 9)$$